**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**С.Г.Мысливец**

# СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

**Красноярск 2016**

М 952 Сборник задач по математическому анализу: Учеб. пособие для экон. специальностей /С.Г.Мысливец; СФУ - Красноярск, 2016. -90 с.

# Содержание

## 1. Элементарные функции и их графики

**1.1.** Построить графики основных элементарных функций, указать их области определения:

$y=x$, $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$, $y=a^x$, $y=\log_a x$, $(0<a<1, a>1)$, $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\operatorname{arctg} x$, $y=\operatorname{arcctg} x$.

Найти область определения $D$ каждой из следующих функций:

**1.2.** $y=\sqrt{4-x^2}$. **1.3.** $y=\arccos(1-2x)$.

**1.4.** $y=\ln\dfrac{x-2}{x+1}$. **1.5.** $y=\log_{x+1}(7-x)$.

**1.6.** $y=2^{\sqrt{\arcsin(1-x)}}$. **1.7.** $y=\sqrt{\ln(x^2-3)}$.

Следующие элементарные функции записать в виде композиции основных элементарных функций:

**1.8.** $y=\sqrt{\sin x^2}$. **1.9.** $y=\sin^2\ln x$.

**1.10.** $y=\ln\cos\sqrt[3]{\sin x}$. **1.11.** $y=2^{\operatorname{arctg}\ln\sin x}$.

Используя график функции $y=x^2$, построить графики функций:

**1.12.** $y=2x^2+1$. **1.13.** $y=(x-1)^2-1$.

С помощью графического сложения и вычитания построить графики функций:

**1.14.** $y=x^3+2x$. **1.15.** $y=x-\sin x$.

**1.16.** Построить график произведения функций $y=x\cdot\sin x$.

Построить графики следующих элементарных функций:

**1.17.** $y=|2-x|+|2+x|$. **1.18.** $y=|x^2+2x|-3$.

**1.19.** $y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -1, & x<0. \end{cases}$

**1.20.** $y=[x]$, где $[x]$ — целая часть $x$, которая определяется как наибольшее целое число, не превосходящее данное число $x$.

**1.21.** $y=\{x\}$, где $\{x\}=x-[x]$ — дробная часть $x$.

**1.22.** $y=2^{|x+1|}+2$.

## 2. Предел числовой последовательности

Написать первые пять членов последовательности:

**2.1.** $u_n=1+(-1)^n\dfrac{1}{n}$. **2.2.** $u_n=\dfrac{3n+5}{2n-3}$.

Написать формулу общего члена последовательности:

**2.3.** $2, \dfrac{4}{3}, \dfrac{6}{5}, \dfrac{8}{7}, \ldots$. **2.4.** $1, 0, -3, 0, 5, 0, -7, 0, \ldots$.

**2.5.** Доказать, что последовательность $u_n = \dfrac{n}{4n-3}$ монотонно убывает и ограничена.

**2.6.** Доказать, что последовательность $u_n = \dfrac{n}{n+1}$ монотонно возрастает и ограничена.

Найти наибольший (наименьший) член ограниченной сверху (снизу) последовательности $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

**2.7.** $u_n = 3n^2 - 10n - 14$.

**2.8.** $u_n = \sqrt[n]{n}$.

Найти $a = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$ и определить номер $N(\varepsilon)$ такой, что $|u_n - a| < \varepsilon$ при всех $n > N(\varepsilon)$, если:

**2.9.** $u_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n}$, $\quad\varepsilon = 0,005$.

**2.10.** $u_n = \dfrac{5n^2+1}{7n^2-3}$, $\quad\varepsilon = 0,005$.

Вычислить пределы:

**2.11.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n+1}{3-2n}$.

**2.12.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^2-5n+2}{2n^2+3}$.

**2.13.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2+1}{3+n^3}$.

**2.14.** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n+1}{5n-1} - \dfrac{2n^2+n}{5n^2-2}\right)$.

**2.15.** $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n})$.

**2.16.** $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+6} - \sqrt{n^2+2})$.

**2.17.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)!-n!}{n!(2n+1)}$.

**2.18.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)!-n!}{(3n^2+1)n!-(n-1)!}$.

**2.19.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n-1)!-3(n+1)!}{(n+2)n!-(n-1)!}$.

**2.20.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4(n+1)!-1}{(2n+5)n!}$.

**2.21.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n-3^n}{2^n+3^n}$.

**2.22.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^{n-1}+5^{n+1}}{3^n+5^{n-1}}$.

**2.23.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7^{n+2}+1}{5\cdot 7^n+3^{n+1}}$.

**2.24.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{n-1}-3\cdot 5^n}{1+5^{n-1}}$.

**2.25.** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \ldots + \dfrac{n-1}{n^2}\right)$.

**2.26.** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{4}{2n^2+1} + \dfrac{7}{2n^2+1} + \ldots + \dfrac{3n+1}{2n^2+1}\right)$.

**2.27.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3}$.

**2.28.** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)}\right)$.

**2.29.** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{1\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 5} + \ldots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$.

**2.30.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{25}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{5^n}\right)$.

**2.31.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)$.

**2.32.** Доказать, что если последовательность $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ бесконечно малая и $\forall n\in\mathbb{N}\ (u_n\neq 0)$, то последовательность $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ бесконечно большая.

## 3. Предел функции

Используя логическую символику, записать следующие утверждения:

**3.1.** $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\infty$.

**3.2.** $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=-\infty$.

**3.3.** $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=b$.

**3.4.** $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$.

**3.5.** $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=1$.

**3.6.** $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=+\infty$.

**3.7.** $\lim\limits_{x\to 3+0} f(x)=2$.

**3.8.** $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)=-\infty$.

Вычислить пределы:

**3.9.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+x+3}{2x^2+2}$.

**3.10.** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x+1}{2x}$.

**3.11.** $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{3x^3+2x-3}{4-x^3}$.

**3.12.** $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{2x^2+5}{4x^2+3x}$.

**3.13.** $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{5x^4+x^2-6}{x^2+3x-1}$.

**3.14.** $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x^2+3x}{x+6}$.

**3.15.** $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x^2+6x}{1-x^3}$.

**3.16.** $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{3x+5}{x^2-4}$.

**3.17.** $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{4x^2-1}}{x+3}$.

**3.18.** $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{4x^2-1}}{x+3}$.

**3.19.** $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{\sqrt{x^4+6}}{2x^2+x}$.

**3.20.** $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x+2}}{3x+5}$.

**3.21.** $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{x^3}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x+1}\right)$.

**3.22.** $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{2x^2}{x-1}-\frac{2x^3}{x^2+1}\right)$.

**3.23.** $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{6x}}{\sqrt{2x+\sqrt{2x+\sqrt{2x}}}}$.

Вычислить пределы:

**3.24.** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}$.

**3.25.** $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x^2+x-2}$.

**3.26.** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x^3-3x^2+2x}$.

**3.27.** $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-3x-4}{x^2+2x+1}$.

**3.28.** $\lim\limits_{x\to10}\dfrac{\sqrt{x-1}-3}{x-10}$.

**3.29.** $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}{\sqrt{2x-1}-\sqrt{5-x}}$.

**3.30.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+9}-3}$.

**3.31.** $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{2x-2}-\sqrt{7-x}}{\sqrt{3x-8}-\sqrt{x-2}}$.

**3.32.** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x^2-1}}$.

**3.33.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt[3]{2+x}-\sqrt[3]{2-x}}$.

**3.34.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$.

**3.35.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-7x+4}-2x\right)$.

Используя первый замечательный предел, вычислить:

**3.36.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{5x}$.

**3.37.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\arcsin 6x}{\sin x\,\mathrm{arctg}\,2x}$.

**3.38.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x\sin 5x}{\sin 3x\,\mathrm{tg}\,x}$.

**3.39.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin^2 3x}{x\,\mathrm{tg}\,2x}$.

**3.40.** $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 7x}{\mathrm{tg}\,3x}$.

**3.41.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 4x}{x^2}$.

**3.42.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{x^2}$.

**3.43.** $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\mathrm{ctg}\,x\right)$.

**3.44.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt{2}-2\cos x}{\pi-4x}$.

**3.45.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\mathrm{tg}\,x$.

Используя второй замечательный предел, вычислить

**3.46.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^{2x+1}$.

**3.47.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+1}{2x^2-2}\right)^{6x^2+1}$.

**3.48.** $\lim\limits_{x\to1}(2x-1)^{\frac{1}{x^2-1}}$.

**3.49.** $\lim\limits_{x\to2}(3-x)^{\frac{6}{2x-4}}$.

**3.50.** $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

**3.51.** $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\mathrm{tg}^2\sqrt{x}\right)^{\frac{3}{x}}$.

**3.52.** $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\ln(2+x)-\ln x)$.

**3.53.** $\lim\limits_{x\to-\infty}(3x+1)(\ln(3-2x)-\ln(1-2x))$.

**3.54.** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln(2x+1)-\ln(x+2)}{x^2-1}$.

**3.55.** $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\ln(4+x)-\ln(6+2x)}{x+2}$.

Доказать следующие соотношения:

**3.56.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e$.

**3.57.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$.

Вычислить пределы:

**3.58.** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{a^x-a}{x-1}$.

**3.59.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$.

Найти односторонние пределы:

**3.60.** $\lim\limits_{x\to 3\pm 0}\dfrac{x-3}{|x-3|}$. **3.61.** $\lim\limits_{x\to 2\pm 0}\dfrac{2+x}{4-x^2}$.

**3.62.** $\lim\limits_{x\to 2\pm 0}7^{\frac{1}{2-x}}$. **3.63.** $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\operatorname{arctg}x$.

**3.64.** $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}$. **3.65.** $\lim\limits_{x\to\pm 0}(2+x)^{\frac{1}{x}}$.

## 4. Непрерывность функции. Точки разрыва и их классификация

Доказать, что следующие функции непрерывны в каждой точке их естественной области определения:

**4.1.** $f(x)=x^3$. **4.2.** $f(x)=\sin x$.

**4.3.** $f(x)=e^x$. **4.4.** $f(x)=\ln x$.

Задана функция $f(x)$. При каком выборе параметров, входящих в ее определение, $f(x)$ будет непрерывной?

**4.5.** $f(x)=\begin{cases} x-1, & x\leqslant 1,\\ ax^2-2, & x>1.\end{cases}$

**4.6.** $f(x)=\begin{cases} ax+1, & x\leqslant \dfrac{\pi}{2},\\ \sin x+b, & x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$

Найти точки разрыва функции, исследовать их характер, в случае устранимого разрыва доопределить функцию "по непрерывности":

**4.7.** $f(x)=\dfrac{|3x-6|}{3x-6}$. **4.8.** $f(x)=\dfrac{1}{x}\sin x$.

**4.9.** $f(x)=2^{\frac{1}{x-2}}$. **4.10.** $f(x)=3^{\frac{x}{4-x^2}}$.

**4.11.** $f(x)=(x+1)\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$. **4.12.** $f(x)=\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

**4.13.** $f(x)=\dfrac{3^{\frac{1}{x-2}}-1}{3^{\frac{1}{x-2}}+1}$. **4.14.** $f(x)=\dfrac{1}{2^{\frac{x}{1-x}}-1}$.

**4.15.** $f(x)=\begin{cases} 2^x, & -1\leqslant x<1,\\ x-1, & 1<x\leqslant 4,\\ 1, & x=1.\end{cases}$

**4.16.** $f(x)=\begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 4-2x, & 1<x\leqslant 2,5,\\ 2x-7, & 2,5<x\leqslant 4.\end{cases}$

**4.17.** Исследовать на непрерывность и точки разрыва функцию $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+x^n}$. Построить график этой функции.

## 5. Производная

Пользуясь только определением производной, найти $f'(x)$:

**5.1.** $f(x)=\operatorname{ctg} x$. **5.2.** $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$.

**5.3.** $f(x)=2^x$. **5.4.** $f(x)=\log_2 x$.

Для заданной $f(x)$ найти $f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0)$:

**5.5.** $f(x)=\begin{cases} x, & x\leqslant 1, \\ -x^2+2x, & x>1, \end{cases} \quad x_0=1.$

**5.6.** $f(x)=\begin{cases} 0, & x\leqslant 0, \\ x^2\ln x, & x>0, \end{cases} \quad x_0=0.$

### 5.1. Производная сложной функции

Найти производные следующих функций:

**5.7.** $y=x^4-\dfrac{x^3}{3}+2x+5-\dfrac{1}{x}$. **5.8.** $y=\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^3}}+\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{5}$.

**5.9.** $y=\dfrac{x^2+x}{3x-4}$. **5.10.** $y=\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$.

**5.11.** $y=\cos^2\left(\sin\sqrt{x}\right)$. **5.12.** $y=\operatorname{arctg}\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)$.

**5.13.** $y=x^2\ln^3 x$. **5.14.** $y=\dfrac{e^{-x^2}}{2x}$.

**5.15.** $y=2^{\sqrt{sin^3 x}}$. **5.16.** $y=e^{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

**5.17.** $y=\ln\operatorname{arctg}\sqrt{1+x^2}$. **5.18.** $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

**5.19.** $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sin^2 x}}$. **5.20.** $y=\sqrt{1+\sqrt{x^2+\sqrt{\ln x}}}$.

### 5.2. Логарифмическая производная

Используя предварительное логарифмирование, найти производные следующих функций:

**5.21.** $y=\dfrac{(x-3)^3(2x-1)(x+2)^4}{x^5(3x-1)^2(x+5)^4}$. **5.22.** $y=\sqrt[3]{\dfrac{(x+2)(x-1)^2}{x^4(x+1)^5}}$.

**5.23.** $y=\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{(x-1)^2(2x+1)}}$. **5.24.** $y=x^3\sqrt{\dfrac{x-1}{(x+2)\sqrt{x-2}}}$.

**5.25.** $y=x^x$. **5.26.** $y=x^{\sin x}$.

**5.27.** $y=(\ln x)^{\frac{1}{x}}$.

**5.28.** $y=(\sin x)^{\arcsin x}$.

**5.29.** $y=x^{x^x}$.

**5.30.** $y=\dfrac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}$.

**5.31.** $y=\cos\left(x^{\sin x}\right)$.

**5.32.** $y=x^{x^2}+x^{2^x}+2^{x^x}$.

Найти производные функций:

**5.33.** $y=\ln|x|$.

**5.34.** $y=|\operatorname{arctg} x|$.

**5.35.** Найти $f'(x_0)$, если $f(x)=(x-x_0)\varphi(x)$, где функция $\varphi(x)$ непрерывна в точке $x_0$.

Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — дифференцируемые функции. Найти производные следующих сложных функций:

**5.36.** $y=\psi(x)^{\varphi(x)}$, $\psi(x)>0$.

**5.37.** $y=\log_{\varphi(x)}\psi(x)$, $\varphi(x)>0$, $\psi(x)>0$, $\varphi(x)\neq 1$.

Пусть $f(x)$ — произвольная дифференцируемая функция. Найти $y'$:

**5.38.** $y=f(e^x)e^{f(x)}$.

**5.39.** $y=f(f(x))$.

## 5.3. Производная функции, заданной неявно

Найти $y'_x$ для следующих функций, заданных неявно:

**5.40.** $x^4+y^4=x^2y$.

**5.41.** $x^2+y^2-\dfrac{y}{x}=\dfrac{x}{y}$.

**5.42.** $(x+y)^2-\operatorname{arctg}\sqrt{xy}=1$.

**5.43.** $\sqrt{\dfrac{y}{x}}-xy=1$.

**5.44.** $x-y=\arcsin x-\arcsin y$.

**5.45.** $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$.

**5.46.** $xy=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$.

**5.47.** $x^y=y^x$.

**5.48.** $2^{\frac{x}{y}}=\left(\dfrac{x}{y}\right)^2$.

**5.49.** $(\ln x)^y=y^x$.

**5.50.** Доказать, что функция $y$, определенная уравнением $xy-\ln y=1$, удовлетворяет также уравнению $y^2+(xy-1)y'=0$.

## 5.4. Производная параметрической функции

Для функций, заданных параметрически, найти $y'_x$:

**5.51.** $\begin{cases} x=2t, \\ y=3t^2-5t, \end{cases}$ $t\in(-\infty,+\infty)$.

**5.52.** $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t+1}, \\ y = \left(\dfrac{t}{t+1}\right)^2, \end{cases}$ $\quad t \neq -1.$

**5.53.** $\begin{cases} x = 2^{-t}, \\ y = 2^{2t}, \end{cases}$ $\quad t \in (-\infty, +\infty).$

**5.54.** $\begin{cases} x = a\cos\varphi, \\ y = b\sin\varphi, \end{cases}$ $\quad \varphi \in (0, \pi).$

**5.55.** $\begin{cases} x = \operatorname{tg} t, \\ y = \sin 2t + 2\cos 2t, \end{cases}$ $\quad t \in (-\dfrac{\pi}{2}, +\dfrac{\pi}{2}).$

**5.56.** $\begin{cases} x = \arccos \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \\ y = \arcsin \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \end{cases}$ $\quad t \in (0, +\infty).$

**5.57.** $\begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = t - \operatorname{arctg} t, \end{cases}$ $\quad t \in (0, +\infty).$

**5.58.** $\begin{cases} x = \arcsin(t^2 - 1), \\ y = \arccos 2t, \end{cases}$ $\quad t \in (0, \sqrt{2}).$

Найти $y'_x$ в указанных точках:

**5.59.** $\begin{cases} x = t\ln t, \\ y = \dfrac{\ln t}{t}, \end{cases}$ $\quad t = 1.$

**5.60.** $\begin{cases} x = t(t\cos t - 2\sin t), \\ y = t(t\sin t + 2\cos t), \end{cases}$ $\quad t = \dfrac{\pi}{4}.$

## Индивидуальное задание

Найти производные следующих функций:

**5.61.** $y=8x^3-\sqrt[5]{x^2}+4.$

**5.62.** $y=\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{7}{x}+5x^3-9.$

**5.63.** $y=\dfrac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x^4+1}}.$

**5.64.** $y=\dfrac{\sqrt[3]{(x^3+2x-1)^2}}{2x^2}.$

**5.65.** $y=\sqrt[5]{2x-1}(1+x^5).$

**5.66.** $y=(x^2-3x)\sqrt{(x+2)^3}.$

**5.67.** $y=\arccos^3\dfrac{x}{5}.$

**5.68.** $y=5\sin 3x+3\cos 5x.$

**5.69.** $y=2(\operatorname{tg}\sqrt{x}-\sqrt{x}).$

**5.70.** $y=x^3\arcsin x.$

**5.71.** $y=x\sin 3x+\dfrac{\cos 3x}{x}.$

**5.72.** $y=\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x^2+1}.$

**5.73.** $y=\operatorname{arctg}^2(x-2\sqrt{x}).$

**5.74.** $y=\sqrt{4x-1}+\operatorname{arctg}\sqrt{4x-1}.$

**5.75.** $y=\sin^3\dfrac{1}{x}.$

**5.76.** $y=(x^5-3x^2+1)^3.$

**5.77.** $y=\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}.$

**5.78.** $y=\operatorname{tg}^3x-3\operatorname{tg}x+3x.$

**5.79.** $y=\operatorname{ctg}\dfrac{7+x^2}{7-x^2}.$

**5.80.** $y=\sqrt[4]{(x^2-3)^3}+\sqrt{1-\sin 2x}.$

**5.81.** $y=\sin^4(x^2-2x+5).$

**5.82.** $y=\dfrac{1}{(1+\cos 4x)^5}.$

**5.83.** $y=\sqrt{x}\cdot\operatorname{tg}^5\dfrac{1}{\sqrt{x}}.$

**5.84.** $y=\operatorname{ctg}^3(x^2+1).$

**5.85.** $y=e^{x-3}\cdot\cos 2x.$

**5.86.** $y=x^3 3^x.$

**5.87.** $y=\ln\dfrac{x^7}{x^7+7}.$

**5.88.** $y=\dfrac{e^{2x}}{x^2+x}.$

**5.89.** $y=\lg(\operatorname{cosec}x+\sin x).$

**5.90.** $y=\ln(\sqrt{x}+5^{\sin x}).$

**5.91.** $y=\sqrt{\operatorname{tg}^2x+1+\sqrt{x^2+x}}.$

**5.92.** $y=\ln\sin x-\sin^2x.$

**5.93.** $y=2^{-\arccos\sqrt{x}}.$

**5.94.** $y=e^{x^2\cdot\arcsin x}.$

**5.95.** $y=2^{\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}}.$

**5.96.** $y=\sqrt{\dfrac{(x+3)(x+4)}{(x-1)(x-2)(x+1)}}.$

**5.97.** $y=x\big(\sin(\ln x)+\cos(\ln x)\big).$

**5.98.** $y=3^{\sin\sqrt{x^3+x}}.$

**5.99.** $y=\lg^2(\operatorname{tg}x+\sqrt{x-3}).$

**5.100.** $y=\ln\big(e^{-x}+xe^{-x}\big).$

**5.101.** $y=(\operatorname{tg}x)^x.$

**5.102.** $y=(\arcsin x)^{x^2}.$

**5.103.** $y=\cos(x^{\ln x}).$

**5.104.** $y=(\ln x)^{\ln x}.$

**5.105.** $\dfrac{y}{x}+x^2y^3-x=\dfrac{1}{y}.$

**5.106.** $xy=\operatorname{arctg}y+x^2.$

**5.107.** $y^2-\dfrac{x}{y}=\sin y$.

**5.108.** $\ln\dfrac{y}{x}-xy^2=1+y$.

**5.109.** $\begin{cases} x=t^2 \\ y=t^3+1 \end{cases}$.

**5.110.** $\begin{cases} x=\sin^2 t \\ y=\sin^2 t \end{cases}$.

**5.111.** $\begin{cases} x=t-\operatorname{tg} t \\ y=t-\sin t \end{cases}$.

**5.112.** $\begin{cases} x=\operatorname{arctg} t \\ y=t^2+1 \end{cases}$.

**5.113.** $\begin{cases} x=e^t\cos t \\ y=e^t\sin t \end{cases}$.

**5.114.** $\begin{cases} x=1+\ln t \\ y=1-\ln t \end{cases}$.

## 6. Дифференциал функции

**6.1.** Найти приращение $\triangle y$ и дифференциал $dy$ функции $y=x^3$, соответствующие значению аргумента $x_0=2$ и приращению аргумента $\triangle x=0,01$.

**6.2.** Найти приращение $\triangle y$ и дифференциал $dy$ функции $y=\sqrt{x}$, соответствующие значению аргумента $x_0=1$ и приращению аргумента $\triangle x=-0,1$.

**6.3.** Ребра куба увеличены на 1 см. Дифференциал $dV$ объема $V$ куба оказался равным 12 см$^3$. Найти первоначальную длину ребер.

**6.4.** Радиус круга увеличен на 1 см. Дифференциал площади круга оказался при этом равным $6\pi$ см$^2$. Найти первоначальную величину радиуса.

Найти дифференциалы указанных функций при произвольных значениях аргумента $x$ и при произвольном его приращении $\triangle x=dx$:

**6.5.** $y=x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\dfrac{x}{a}-5$.

**6.6.** $y=\sin x-x\cos x+4$.

**6.7.** $y=x\operatorname{arctg} x-\ln\sqrt{1+x^2}$.

**6.8.** $y=x\ln x-x+1$.

**6.9.** $y=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}-3$.

**6.10.** $y^5+y-x^2=1$.

**6.11.** $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$.

**6.12.** $e^y=x+y$.

Вычислить приближенно:

**6.13.** $\arcsin 0,05$.

**6.14.** $\operatorname{arctg} 1,04$.

**6.15.** $\ln 1,2$.

**6.16.** $\sqrt[4]{0,8}$.

## 7. Производные и дифференциалы высших порядков

Найти производные второго порядка от следующих функций:

**7.1.** $y=\cos^2 x$.

**7.2.** $y=\operatorname{arctg} x^2$.

**7.3.** $y=\log_2\sqrt[3]{1-x^2}$.

**7.4.** $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

**7.5.** $y=x^{\sqrt{x}}$. **7.6.** $y=x^{\sin x}$.

**7.7.** Найти $y'''(0)$, если $y=e^{2x}\sin 3x$.

**7.8.** Найти $y'''(2)$, если $y=\ln(x-1)$.

**7.9.** Найти $y^{IV}(1)$, если $y=x^3\ln x$.

Найти n-е производные заданных функций:

**7.10.** $y=\sin x$. **7.11.** $y=\ln x$.

**7.12.** $y=\dfrac{1+x}{1-x}$. **7.13.** $y=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$.

**7.14.** $y=\dfrac{2x+4}{x^2-4x+3}$. **7.15.** $y=\dfrac{x+2}{\sqrt{x+1}}$.

Применяя формулу Лейбница, найти производные указанных порядков от заданных функций:

**7.16.** $y=(x^2+x+1)\sin x$, найти $y^{(15)}$.

**7.17.** $y=\sin x\cdot e^{-x}$, найти $y^{(5)}$.

**7.18.** $y=x\log_2 x$, найти $y^{(10)}$.

**7.19.** Показать, что функция $y=\arcsin x$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $(1-x^2)y''=xy'$.

**7.20.** Показать, что функция $y=C_1xe^{2x}+C_2e^{2x}+e^x$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y''-4y'+4y=e^x$.

Найти производные 2-го порядка от функций, заданных неявно:

**7.21.** $y^2=2px$. **7.22.** $y=1+xe^y$.

**7.23.** $y=\operatorname{tg}(x+y)$. **7.24.** $e^{x-y}=xy$.

Найти производные 2-го порядка функций, заданных параметрически:

**7.25.** $\begin{cases} x=t+\sin t, \\ y=t+\cos t, \end{cases} \quad t(-\infty,+\infty).$

**7.26.** $\begin{cases} x=\dfrac{1}{\cos t}, \\ y=\operatorname{tg} t, \end{cases} \quad t\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right).$

**7.27.** $\begin{cases} x=\arcsin t, \\ y=\ln(1-t^2), \end{cases} \quad t\in(-1,1).$

**7.28.** $\begin{cases} x=\operatorname{arctg} t, \\ y=\ln(1+t^2), \end{cases} \quad t(-\infty,+\infty).$

**7.29.** $\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t, \end{cases} \qquad t\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right).$

Найти дифференциалы 2-го порядка указанных функций $y$ аргумента $x$:

**7.30.** $y=a\sin(bx+c)$.

**7.31.** $y=3^{-x^2}$.

**7.32.** $y=\dfrac{\sin x}{x}$.

**7.33.** $y=ax^2+bx+c$.

**7.34.** $xy+y^2=1$.

**7.35.** $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.

**7.36.** $x^3+y^3=y$.

**7.37.** $x=y-a\sin y$.

## 8. Теоремы о дифференцируемых функциях. Формула Тейлора. Геометрические приложения производной

**8.1.** Функция $f(x)=1-\sqrt[3]{x^2}$ обращается в нуль в точках $x=1$ и $x=-1$. Справедлива ли для этой функции теорема Ролля на отрезке $[-1,1]$?

**8.2.** Функция $f(x)=\dfrac{5-x^2}{x^4}$ имеет на концах отрезка $[-1,1]$ равные значения. Ее производная $f'(x)$ равна нулю только в двух точках $x=\pm\sqrt{10}$, расположенных за пределами этого отрезка. Какова причина нарушения теоремы Ролля?

**8.3.** Пусть $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)$. Доказать, что все три корня уравнения $f'(x)=0$ действительны.

**8.4.** Доказать, что уравнение $16x^4-64x+31=0$ не может иметь два различных действительных корня на интервале $(0,1)$.

**8.5.** Доказать, что уравнение $e^{x-1}+x-2=0$, имеющее корень $x=1$, не имеет других действительных корней.

**8.6.** Доказать, что если производная $f'(x)$ тождественно равна нулю на интервале $(a,b)$, то функция $f(x)$ постоянна на этом интервале.

**8.7.** Написать формулу Тейлора 3-го порядка для функции $y=\dfrac{x}{x-1}$ в точке $a=2$.

**8.8.** Написать формулу Маклорена 3-го порядка для функции $y=\arcsin x$.

**8.9.** Написать формулу Тейлора 3-го порядка для функции $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ в точке $a=1$.

Написать уравнения касательной и нормали к графику функции $y=f(x)$ в данной точке, если:

**8.10.** $y=\ln x, \qquad x_0=1.$

**8.11.** $y=e^{1-x^2}, \qquad x_0=-1.$

**8.12.** Написать уравнения касательной и нормали в точке $M_0(2,2)$ к кривой $x=\dfrac{1+t}{t^3}$, $y=\dfrac{3}{2t^2}+\dfrac{1}{2t}$, $t\neq 0$.

**8.13.** Написать уравнения касательной и нормали к кривой $x^3+y^2+2x-6=0$ в точке с ординатой $y_0=3$.

**8.14.** Показать, что касательные к гиперболе $y=\dfrac{x-4}{x-2}$ в точках ее пересечения с осями координат параллельны между собой.

**8.15.** Найти угол, под которым пересекаются кривые $y=(x-2)^2$ и $y=4x-x^2+4$.

**8.16.** Доказать, что сумма отрезков, отсекаемых касательной к кривой $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$ на осях координат, для всех ее точек равна $a$.

**8.17.** Показать, что отрезок касательной к астроиде $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$, заключенный между осями координат, имеет постоянную длину, равную $a$.

**8.18.** Найти расстояние от начала координат до нормали к линии $y=e^{2x}+x^2$, проведенной в точке с абсциссой $x=0$.

## 9. Правило Лопиталя вычисления пределов

Раскрыть неопределенности типа $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$:

**9.1.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\arcsin 3x}$.

**9.2.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$.

**9.3.** $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\pi-2\,\mathrm{arctg}\,x}{e^{\frac{3}{x}}-1}$.

**9.4.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x-\mathrm{tg}\,x}$.

**9.5.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{\ln(1+x)}$.

**9.6.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-3x-1}{\sin^2 5x}$.

**9.7.** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\mathrm{ctg}\,x-1}{\sin 4x}$.

**9.8.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-4x^2+5x-2}{x^3-5x^2+7x-3}$.

**9.9.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{1+2\ln\sin x}$.

**9.10.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\mathrm{tg}\,\dfrac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)}$.

**9.11.** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\cos x\cdot\ln(x-3)}{\ln(e^{x}-e^{3})}$.

**9.12.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(1-x)+\mathrm{tg}\,\dfrac{\pi x}{2}}{\mathrm{ctg}\,\pi x}$.

Раскрыть неопределенности типа $0\cdot\infty$ или $\infty-\infty$:

**9.13.** $\lim\limits_{x\to 0}(e^{x}+e^{-x}-2)\,\mathrm{ctg}\,x$.

**9.14.** $\lim\limits_{x\to 0}x^2 e^{\frac{1}{x^2}}$.

**9.15.** $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\,\mathrm{ctg}\,\pi(x-1)$.

**9.16.** $\lim\limits_{x\to 1}\ln x\cdot\ln(x-1)$.

**9.17.** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{\ln x}\right).$

**9.18.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\operatorname{arctg} x}-\dfrac{1}{x}\right).$

**9.19.** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{x}{\operatorname{ctg} x}-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right).$

**9.20.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right).$

Раскрыть неопределенности типа $0^0$, $\infty^0$, $1^\infty$:

**9.21.** $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x}.$

**9.22.** $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{arctg} x)^{\operatorname{tg} x}.$

**9.23.** $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}.$

**9.24.** $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}.$

**9.25.** $\lim\limits_{x\to +\infty}(x+2^x)^{\frac{1}{x}}.$

**9.26.** $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}.$

**9.27.** $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{(1-x)}}.$

**9.28.** $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^x.$

**9.29.** $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}.$

**9.30.** $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}.$

## 10. Исследование функций

Для указанных функций найти интервалы возрастания и убывания и точки экстремума:

**10.1.** $y=\dfrac{2x^2-1}{x^4}.$

**10.2.** $y=\dfrac{x}{\ln x}.$

**10.3.** $y=\ln x-\operatorname{arctg} x.$

**10.4.** $y=x^x.$

Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции $y=f(x)$:

**10.5.** $y=x^4+6x^2.$

**10.6.** $y=\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}.$

**10.7.** $y=xe^{2x}+1.$

**10.8.** $y=x^3\ln x+1.$

Определить наибольшее $M$ и наименьшее $m$ значения функций на указанных отрезках:

**10.9.** $y=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2-2x;\quad [0,3].$

**10.10.** $y=-3x^4+6x^2;\quad [0,2].$

**10.11.** $y=x+2\sqrt{x};\quad [0,4].$

**10.12.** $y=\dfrac{1-x+x^2}{1+x+x^2};\quad [0,1].$

Найти асимптоты графиков указанных функций:

**10.13.** $y=\dfrac{2x^2+1}{x-1}.$

**10.14.** $y=\dfrac{1}{e^x-e^2}.$

**10.15.** $y=\dfrac{\sqrt{|x^2-3|}}{x}.$

**10.16.** $y=3x+\operatorname{arctg} 5x.$

**10.17.** $y=\dfrac{3^x}{3^x-1}.$

**10.18.** $y=\dfrac{|x^3-8|}{x^2}.$

Построить графики следующих функций:

**10.19.** $y=\dfrac{x^3}{2(x-1)^2}$. **10.20.** $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{|x^2-1|}}$.

**10.21.** $y=(x-2)e^{-\frac{1}{x}}$. **10.22.** $y=\dfrac{x^2}{\ln x}$.

**10.23.** Исследовать на экстремум в точке $x_0$ функцию $f(x)=(x-x_0)^k\varphi(x)$, где $k\in\mathbb{N}$ и $\varphi(x)$ непрерывна в точке $x_0$, причем $\varphi(x_0)\neq 0$.

**10.24.** На параболе $y=x^2$ найти точку $N$, наименее удаленную от прямой $y=2x-4$.

**10.25.** Показать, что кривая $y=\dfrac{x+1}{x^2+1}$ имеет три точки перегиба, лежащие на одной прямой.

**10.26.** Показать, что точки перегиба кривой $y=x\sin x$ лежат на кривой $y^2(4+x^2)=4x^2$.

**10.27.** На координатной плоскости дана точка $M_0(x_0,y_0)$, лежащая в первой четверти. Провести через эту точку прямую так, чтобы треугольник, образованный ею с положительными полуосями координат, имел наименьшую площадь.

## Индивидуальное задание

Построить графики следующих функций:

**10.28.** $y=\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^2$. **10.29.** $y=\dfrac{\ln x}{x}$.

**10.30.** $y=\dfrac{(x-3)^2}{4(x-1)}$. **10.31.** $y=x-2\operatorname{arctg} x$.

**10.32.** $y=\dfrac{x^2+9}{2x}$. **10.33.** $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{4x}$.

**10.34.** $y=\dfrac{2x+1}{x^2}$. **10.35.** $y=\dfrac{e^x}{e^x-1}$.

**10.36.** $y=\dfrac{x+2}{x^3}$. **10.37.** $y=2^{\frac{x}{x+2}}$.

**10.38.** $y=\dfrac{x-1}{x^2-2x}$. **10.39.** $y=(x-1)e^{2x-1}$.

**10.40.** $y=\dfrac{2-x^3}{2x}$. **10.41.** $y=x\ln x$.

**10.42.** $y=\dfrac{x^2+1}{x}$. **10.43.** $y=e^{\frac{x}{1-x}}$.

**10.44.** $y=\dfrac{x^3}{3-x^2}$. **10.45.** $y=xe^{\frac{1}{x+1}}$.

**10.46.** $y=\dfrac{4+x}{x^2}$.

**10.47.** $y=\dfrac{\ln x}{2x}$.

**10.48.** $y=\dfrac{x^2-5}{x-3}$.

**10.49.** $y=x^2\ln x$.

**10.50.** $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$.

**10.51.** $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$.

**10.52.** $y=\dfrac{x}{x^3-1}$.

**10.53.** $y=e^{\frac{1}{4-x^2}}$.

**10.54.** $y=\dfrac{x^3-1}{4x^2}$.

**10.55.** $y=\ln\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)$.

**10.56.** $y=\dfrac{6x}{1+x^2}$.

**10.57.** $y=x-\ln(x+1)$.

**10.58.** $y=\dfrac{1}{x^2-9}$.

**10.59.** $y=x^2e^{-x}$.

**10.60.** $y=\dfrac{x}{x^3-1}$.

**10.61.** $y=\dfrac{1}{e^x-1}$.

**10.62.** $y=\dfrac{x^2}{x+1}$.

**10.63.** $y=\ln\left(\dfrac{x+2}{x+3}\right)$.

**10.64.** $y=\dfrac{x^3}{3-x^2}$.

**10.65.** $y=xe^{\frac{1}{x-4}}$.

**10.66.** $y=\dfrac{x^2-5}{x+3}$.

**10.67.** $y=e^{\frac{x}{x-3}}$.

**10.68.** $y=\dfrac{4x^3+8}{x}$.

**10.69.** $y=(x+4)e^{2x}$.

**10.70.** $y=\dfrac{x^2}{x-1}$.

**10.71.** $y=e^{\frac{1}{2x+4}}$.

**10.72.** $y=\dfrac{x^2}{x+2}$.

**10.73.** $y=\operatorname{arctg}x^2$.

**10.74.** $y=\dfrac{(x-1)^2}{x^2}$.

**10.75.** $y=\ln(x^2-2x)$.

**10.76.** $y=\dfrac{x^3-1}{4x^2}$.

**10.77.** $y=\ln\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)$.

**10.78.** $y=\dfrac{1}{x^2-4}$.

**10.79.** $y=xe^x$.

**10.80.** $y=\dfrac{x^2+1}{2x}$.

**10.81.** $y=e^{\frac{x+1}{x-1}}$.

**10.82.** $y=\dfrac{x^2}{x^2-4}$.

**10.83.** $y=xe^{\frac{x^2}{2}}$.

**10.84.** $y=\dfrac{x^2+2}{2x}$.

**10.85.** $y=e^{\frac{2}{2-x}}$.

**10.86.** $y=\dfrac{x^2}{x^3-1}$.

**10.87.** $y=x\operatorname{arctg}x$.

**10.88.** $y=\dfrac{x^2+1}{x}$.

**10.89.** $y=\dfrac{\ln x}{x}$.

**10.90.** $y=\dfrac{x}{x^2-4}$.

**10.91.** $y=e^{\frac{1}{x+3}}$.

## 11. Непосредственное интегрирование. Метод замены переменной

Используя таблицу основных интегралов, найти следующие интегралы:

**11.1.** $\displaystyle\int\left(\sqrt[3]{x}-\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)dx.$

**11.2.** $\displaystyle\int\frac{3-2x}{x^2}\,dx.$

**11.3.** $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x^2-3}-\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^4-9}}\,dx.$

**11.4.** $\displaystyle\int\frac{x^2}{1+x^2}\,dx.$

**11.5.** $\displaystyle\int(x^2+2x)^2\,dx.$

**11.6.** $\displaystyle\int(\sin 2x+\cos 2x)^2\,dx.$

**11.7.** $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}.$

**11.8.** $\displaystyle\int\frac{dx}{1+4x^2}.$

**11.9.** $\displaystyle\int\cos^2 x dx.$

**11.10.** $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+2x+2}.$

**11.11.** $\displaystyle\int(2x+3)^5 dx.$

**11.12.** $\displaystyle\int\frac{dx}{(1-3x)^4}.$

**11.13.** $\displaystyle\int\frac{dx}{x+5}.$

**11.14.** $\displaystyle\int\frac{dx}{3x-4}.$

Методом подведения под знак дифференциала найти интегралы:

**11.15.** $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{x^2+4}.$

**11.16.** $\displaystyle\int\frac{\cos x\,dx}{1+\sin^2 x}.$

**11.17.** $\displaystyle\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^6}}.$

**11.18.** $\displaystyle\int\sin(\ln x)\frac{dx}{x}.$

**11.19.** $\displaystyle\int\frac{x+\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2}\,dx.$

**11.20.** $\displaystyle\int\sin\sqrt{x}\,\frac{dx}{\sqrt{x}}.$

**11.21.** $\displaystyle\int\frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}.$

**11.22.** $\displaystyle\int\frac{dx}{\cos^2 x\operatorname{tg}^3 x}.$

**11.23.** $\displaystyle\int\frac{2x+1}{x^2+x+3}\,dx.$

**11.24.** $\displaystyle\int\frac{x+1}{2x^2+3}\,dx.$

**11.25.** $\displaystyle\int\frac{x+1+\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

**11.26.** $\displaystyle\int\frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^4 x+3}}\,dx.$

**11.27.** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x \cos x}$.

**11.28.** $\displaystyle\int \frac{1+\ln x}{4+x\ln x}\,dx$.

Вычислить интегралы с помощью подходящей замены:

**11.29.** $\displaystyle\int (x+1)\sqrt{x-5}\,dx$.

**11.30.** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$.

**11.31.** $\displaystyle\int x(5x-1)^{10}\,dx$.

**11.32.** $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(3-x)^7}$.

**11.33.** $\displaystyle\int \frac{x+2}{\sqrt{x+1}+1}\,dx$.

**11.34.** $\displaystyle\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$.

**11.35.** $\displaystyle\int \frac{x+3}{\sqrt{x-1}}\,dx$.

**11.36.** $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$.

## 12. Интегрирование по частям в неопределенном интеграле

Применяя формулу интегрирования по частям, найти интегралы:

**12.1.** $\displaystyle\int (x^2+x)\sin 3x\,dx$.

**12.2.** $\displaystyle\int (3x+5)\cos(2x+1)\,dx$.

**12.3.** $\displaystyle\int x^2 e^{-x}\,dx$.

**12.4.** $\displaystyle\int x^3 e^{2x}\,dx$.

**12.5.** $\displaystyle\int x^3 e^{-x^2}\,dx$.

**12.6.** $\displaystyle\int \frac{x\sin x}{\cos^3 x}\,dx$.

**12.7.** $\displaystyle\int (x+2)\ln x\,dx$.

**12.8.** $\displaystyle\int x\ln^2 x\,dx$.

**12.9.** $\displaystyle\int \frac{\ln^2 x}{x^2}\,dx$.

**12.10.** $\displaystyle\int \arcsin x\,dx$.

**12.11.** $\displaystyle\int \operatorname{arctg} x\,dx$.

**12.12.** $\displaystyle\int x\operatorname{arctg} x\,dx$.

**12.13.** $\displaystyle\int e^{2x}\cos 3x\,dx$.

**12.14.** $\displaystyle\int e^{-4x}\sin(2x+1)\,dx$.

**12.15.** $\displaystyle\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\,dx$.

**12.16.** $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$.

**12.17.** $\displaystyle\int x\operatorname{arctg}^2 x\,dx$.

**12.18.** $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{(x^2+1)^2}$.

**12.19.** $\displaystyle\int \sqrt{1+x^2}\,dx$.

**12.20.** $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx$.

**12.21.** $\displaystyle\int x\arcsin x\,dx$.

**12.22.** $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

**12.23.** $\displaystyle\int \frac{\ln(\ln x)}{x}\,dx$.

**12.24.** $\displaystyle\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$.

## 13. Интегрирование рациональных функций

Найти интегралы от простейших рациональных дробей:

**13.1.** $\displaystyle\int \frac{dx}{x+4}$. **13.2.** $\displaystyle\int \frac{dx}{3x+5}$.

**13.3.** $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-2)^3}$. **13.4.** $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+2)^4}$.

**13.5.** $\displaystyle\int \frac{dx}{(2x+3)^2}$. **13.6.** $\displaystyle\int \frac{dx}{(3-x)^3}$.

**13.7.** $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$. **13.8.** $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-3x+2}$.

**13.9.** $\displaystyle\int \frac{2x+5}{x^2+2x+2}\,dx$. **13.10.** $\displaystyle\int \frac{x-4}{x^2-4x+8}\,dx$.

**13.11.** $\displaystyle\int \frac{5-3x}{x^2+3x+5}\,dx$. **13.12.** $\displaystyle\int \frac{5x+2}{x^2+5x+9}\,dx$.

**13.13.** $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$. **13.14.** $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+4x+5)^2}$.

**13.15.** $\displaystyle\int \frac{x+2}{(x^2+4)^2}\,dx$. **13.16.** $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^3}$.

Найти интегралы от рациональных функций:

**13.17.** $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-3)(x+4)}$. **13.18.** $\displaystyle\int \frac{2x^2-1}{x^3-5x^2+6x}\,dx$.

**13.19.** $\displaystyle\int \frac{x^3+2}{x^3-4x}\,dx$. **13.20.** $\displaystyle\int \frac{x^4+3x^3+3x^2-5}{x^3+3x^2+3x+1}\,dx$.

**13.21.** $\displaystyle\int \frac{3x^2+2x+1}{(x-1)^2(x+2)}\,dx$. **13.22.** $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^2+2)}$.

**13.23.** $\displaystyle\int \frac{2x^2-4x+5}{(x-1)(x^2+2x+2)}\,dx$. **13.24.** $\displaystyle\int \frac{4x+2}{x^2(x^2+4)}\,dx$.

**13.25.** $\displaystyle\int \frac{5x-13}{(x^2-5x+6)^2}\,dx$. **13.26.** $\displaystyle\int \frac{x^4+1}{x^4-1}\,dx$.

**13.27.** $\displaystyle\int \frac{7x+5}{x^2(x^2+2x+5)}\,dx$. **13.28.** $\displaystyle\int \frac{3x+6}{x^4+5x^2+4}\,dx$.

## 14. Интегрирование тригонометрических функций

Найти интегралы:

**14.1.** $\displaystyle\int \frac{dx}{3\cos x+2}$. **14.2.** $\displaystyle\int \frac{dx}{3-2\sin x+\cos x}$.

**14.3.** $\displaystyle\int \frac{dx}{5+4\sin x+3\cos x}$. **14.4.** $\displaystyle\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\,dx$.

**14.5.** $\displaystyle\int \frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x - 2\cos x + 5}$.

**14.6.** $\displaystyle\int \frac{\sin 2x\,dx}{1 + 4\cos^2 x}$.

**14.7.** $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x\,dx}{2 + \sin x}$.

**14.8.** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x(\cos^2 x + 4)}$.

**14.9.** $\displaystyle\int \frac{dx}{4\sin^2 x - 7\cos^2 x}$.

**14.10.** $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg} x + 3}{4\sin^2 x + 3\cos^2 x}\,dx$.

**14.11.** $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\cos^8 x}\,dx$.

**14.12.** $\displaystyle\int \cos^7 x\,dx$.

**14.13.** $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}\,dx$.

**14.14.** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos^5 x}$.

**14.15.** $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}\,dx$.

**14.16.** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^4 x\cos^2 x}$.

**14.17.** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x\cos x}$.

**14.18.** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{\cos x\sin^3 x}}$.

**14.19.** $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^4 x}$.

**14.20.** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x\cos^3 x}$.

**14.21.** $\displaystyle\int \sin^2 x\cos^2 x\,dx$.

**14.22.** $\displaystyle\int \cos^2 x\sin^4 x\,dx$.

**14.23.** $\displaystyle\int \cos^4 x\,dx$.

**14.24.** $\displaystyle\int \sin^6 2x\,dx$.

**14.25.** $\displaystyle\int \sin 3x\cos 5x\,dx$.

**14.26.** $\displaystyle\int \sin(2x+1)\cos(3x-2)\,dx$.

**14.27.** $\displaystyle\int \sin 10x\sin 15x\,dx$.

**14.28.** $\displaystyle\int \cos 6x\cos 4x\,dx$.

**14.29.** $\displaystyle\int \sin x\sin 2x\sin 3x\,dx$.

**14.30.** $\displaystyle\int \cos x\cos^2 2x\,dx$.

## 15. Интегрирование иррациональных функций

Найти интегралы:

**15.1.** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}$.

**15.2.** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt[4]{x} + 1}$.

**15.3.** $\displaystyle\int \frac{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}}{x(1 + \sqrt[3]{x})}\,dx$.

**15.4.** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x} + 4)}$.

**15.5.** $\displaystyle\int \frac{dx}{(5+x)\sqrt{1+x}}$.

**15.6.** $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{2x-3}}$.

**15.7.** $\displaystyle\int \frac{(\sqrt[6]{x+2} - 1)\,dx}{(x+2)(1 + \sqrt[3]{x+2})}$.

**15.8.** $\displaystyle\int \frac{(\sqrt[6]{2x-1} + 1)\,dx}{(2x-1)(\sqrt[3]{2x-1} - 1)}$.

**15.9.** $\displaystyle\int \frac{dx}{(\sqrt[4]{x+3}-1)\sqrt{x+3}}$.

**15.10.** $\displaystyle\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,\frac{dx}{(x-1)^3}$.

**15.11.** $\displaystyle\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx$.

**15.12.** $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,\frac{dx}{(1-x)^2}$.

**15.13.** $\displaystyle\int x^{-\frac{1}{2}}(1+x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}\,dx$.

**15.14.** $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt[4]{1+x^4}}$.

**15.15.** $\displaystyle\int x^{-\frac{2}{3}}(1+x^{\frac{1}{3}})^{-\frac{1}{2}}\,dx$.

**15.16.** $\displaystyle\int x^{-1}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx$.

**15.17.** $\displaystyle\int x^{-2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx$.

**15.18.** $\displaystyle\int x^{-6}\sqrt{1+x^2}\,dx$.

**15.19.** $\displaystyle\int x^{-4}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx$.

**15.20.** $\displaystyle\int x^{2}(4+x^2)^{-\frac{5}{2}}\,dx$.

**15.21.** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{8x-x^2}}$.

**15.22.** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-6x+4}}$.

**15.23.** $\displaystyle\int \frac{x-3}{\sqrt{x^2+6x+1}}\,dx$.

**15.24.** $\displaystyle\int \frac{x+4}{\sqrt{2-x-x^2}}\,dx$.

**15.25.** $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+8x+1}}$.

**15.26.** $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x+2x^2}}$.

**15.27.** $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{6x-x^2-5}}$.

**15.28.** $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+2)^2\sqrt{x^2+5}}$.

**15.29.** $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-3)\sqrt{4-x^2}}$.

**15.30.** $\displaystyle\int \sqrt{1-2x-x^2}\,dx$.

**15.31.** $\displaystyle\int \sqrt{x^2-2x+10}\,dx$.

**15.32.** $\displaystyle\int \sqrt{x^2+4x+5}\,dx$.

**15.33.** $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx$.

**15.34.** $\displaystyle\int \sqrt{(x^2-1)^3}\,dx$.

### Индивидуальное задание

**15.35.** $\displaystyle\int \frac{e^x\,dx}{4+e^{2x}}$.

**15.36.** $\displaystyle\int \frac{5+7x-x^2}{x\sqrt{x}}\,dx$.

**15.37.** $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}}$.

**15.38.** $\displaystyle\int \frac{\sin x\,dx}{1-2\cos x}$.

**15.39.** $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x}}$.

**15.40.** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3-5x^2}}$.

**15.41.** $\displaystyle\int \frac{e^x\,dx}{\sqrt{3+2e^x-e^{2x}}}$.

**15.42.** $\displaystyle\int \sin 2x\, e^{\sin^2 x}\,dx$.

**15.43.** $\displaystyle\int x\operatorname{arctg}\sqrt{4x^2-1}\,dx$.

**15.44.** $\displaystyle\int x^3\ln(1+x^4)\,dx$.

**15.45.** $\int (2-3x)\,e^{4x}\,dx.$

**15.46.** $\int \sqrt{x}\arcsin\sqrt{1-x^3}\,dx.$

**15.47.** $\int x^3\cos x^2\,dx.$

**15.48.** $\int e^{2x}\sin x\,dx.$

**15.49.** $\int \dfrac{3x-7}{(x+1)(x^2+4)}\,dx.$

**15.50.** $\int \dfrac{x^3-6}{x^4+6x^2+8}\,dx.$

**15.51.** $\int \dfrac{5x^4+12x^2-1}{x(x^2+1)}\,dx.$

**15.52.** $\int \dfrac{5-2x^2}{x^3+x^2+2x+2}\,dx.$

**15.53.** $\int \dfrac{5x^2-2}{x(x+1)(x-2)}\,dx.$

**15.54.** $\int \dfrac{x^4+16}{x^5+4x^3}\,dx.$

**15.55.** $\int \dfrac{\sin^2 x+2\cos^2 x}{(\sin x+\cos x)\cos^3 x}\,dx.$

**15.56.** $\int \dfrac{dx}{4+5\sin^2 x}.$

**15.57.** $\int \dfrac{dx}{\cos x\sqrt{4\cos^2 x-\sin^2 x}}.$

**15.58.** $\int \dfrac{\sin^3 x}{2+\cos x}\,dx.$

**15.59.** $\int \dfrac{dx}{(1+\sin x)\cos x}.$

**15.60.** $\int \dfrac{dx}{4\sin x-3\cos x+2}.$

**15.61.** $\int \dfrac{dx}{\cos x+2\sin x+3}.$

**15.62.** $\int \dfrac{1+\sin x}{1+\cos x}\,dx.$

**15.63.** $\int \dfrac{dx}{\sin^3 x\cos^3 x}.$

**15.64.** $\int \dfrac{\operatorname{tg} x\,dx}{\sin^2 x\cos^2 x}.$

**15.65.** $\int \dfrac{\sin^5 x}{\cos^2 x}\,dx.$

**15.66.** $\int \dfrac{\sin^2 x}{\cos x}\,dx.$

**15.67.** $\int \sin^2 x\cos^2 x\,dx.$

**15.68.** $\int \sin^6 x\,dx.$

**15.69.** $\int \sin 3x\cos 6x\,dx.$

**15.70.** $\int \sin 2x\cos x\cos 5x\,dx.$

**15.71.** $\int \dfrac{1+\sqrt[6]{x}}{\sqrt[12]{x^{11}}-\sqrt[6]{x^5}}\,dx.$

**15.72.** $\int \dfrac{\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\,dx.$

**15.73.** $\int \dfrac{1}{x^2}\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}\,dx.$

**15.74.** $\int \dfrac{3x+4}{\sqrt{3+2x-x^2}}\,dx.$

**15.75.** $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}.$

**15.76.** $\int \dfrac{dx}{(2x+1)\sqrt{x^2+4x+1}}.$

**15.77.** $\int \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}\,dx.$

**15.78.** $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{x^5-4}}.$

**15.79.** $\int \sqrt{(x^2+2x)^3}\,dx.$

**15.80.** $\int \sqrt{x^2+4x+5}\,dx.$

## 16. Функции нескольких переменных. Частные производные и полный дифференциал ф.н.п.

Найти области определения функций двух переменных

**16.1.** $z = \sqrt{1-(x^2+y)^2}$. **16.2.** $z = \ln(-x-y)$.

**16.3.** $z = \sqrt{9-x^2-y^2} + \sqrt{x^2+y^2-4}$.

**16.4.** $z = \sqrt{\ln(x^2+y^2)}$.

Найти частные производные 1-го порядка от заданных функций:

**16.5.** $z = xy + \dfrac{y}{x}$. **16.6.** $z = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

**16.7.** $z = xe^{-xy}$. **16.8.** $z = y^x$.

**16.9.** $z = \dfrac{\cos y^2}{x}$. **16.10.** $z = \ln(x^2+y^2)$.

**16.11.** $z = \arcsin\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. **16.12.** $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{x+y}$.

**16.13.** $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. **16.14.** $u = \left(\dfrac{y}{x}\right)^z$.

**16.15.** $u = xy^2z^3t^4 + 3x - 4y + 2z - t + 1$.

**16.16.** Найти $f'_x(3,2)$ и $f'_y(3,2)$, если $f(x,y) = x^3y + xy^2 - 2x + 3y - 1$.

**16.17.** Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix},$$

если $x = r\cos\varphi\cos\theta$, $y = r\sin\varphi\cos\theta$, $z = r\sin\theta$.

**16.18.** Найти полное приращение и дифференциал функции $z = x^2 - xy + y^2$, если $x$ изменяется от 2 до 2,1, а $y$ — от 1 до 1,2.

**16.19.** Найти полное приращение и дифференциал функции $z = \ln(x^2 + y^2)$, если $x$ изменяется от 2 до 2,1, а $y$ — от 1 до 0,9.

Найти дифференциалы функций:

**16.20.** $z = \ln(y + \sqrt{x^2+y^2})$. **16.21.** $z = \operatorname{tg}\dfrac{y^2}{x}$.

**16.22.** $z = \ln\cos\dfrac{x}{y}$. **16.23.** $u = (xy)^z$.

**16.24.** $u = xy + yz + zx$. **16.25.** $u = e^{xyz}$.

Вычислить приближенно:

**16.26.** $(2,01)^{3,03}$. **16.27.** $\sqrt{(1,02)^3+(1,97)^3}$.

**16.28.** Прямоугольный параллелепипед имеет измерения: $a=2$ м, $b=3$ м, $c=6$ м. Найти приближенно величину изменения длины диагонали параллелепипеда, если $a$ увеличится на 2 см, $b$ — на 1см, а $c$ уменьшится на 3 см.

## 17. Частные производные сложных функций и функций, заданных неявно

**17.1.** Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $z=\sqrt{u^2+v^3}$, где $u=\dfrac{x}{y}$, $v=\dfrac{x+y}{y}$.

**17.2.** Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $z=u^2\ln v$, где $u=\dfrac{y}{x}$, $v=x^2+y^2$.

**17.3.** Найти $dz$, если $z=u^2v-v^2u$, где $u=x\sin y$, $v=y\cos x$.

**17.4.** Найти $\dfrac{dz}{dt}$, если $z=e^{2x-3y}$, где $x=\operatorname{tg} t$, $y=t^2-t$.

**17.5.** Найти $\dfrac{dz}{dt}$, если $z=x^y$, где $x=\ln t$, $y=\sin t$.

**17.6.** Найти $\dfrac{dz}{dt}$, если $z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, где $x=e^{2t}+1$, $y=e^{2t}-1$.

**17.7.** Найти $\dfrac{du}{dt}$, если $u=\dfrac{yz}{x}$, где $x=e^t$, $y=\ln t$, $z=t^2-1$.

**17.8.** Найти $\dfrac{dz}{dx}$, если $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{y}$, где $y=e^{(x+1)^2}$.

**17.9.** Найти $\dfrac{dz}{dx}$, если $z=\dfrac{x^2y^3}{t}$, где $y=\sqrt{x^2+1}$, $t=\arcsin x$.

**17.10.** Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $z=\dfrac{uv+v}{t^2+1}$, где $u=x^y$, $v=y^x$, $t=\sqrt{xy}$.

**17.11.** Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial z}{\partial t}$, если $z=\sqrt{u^2+v^3}$, где $u=\dfrac{yx}{t}$, $v=x^2yt^3$.

**17.12.** Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $z=f(u,v)$, где $u=\ln(x^2-y^2)$, $v=xy^2$.

**17.13.** Найти $dz$, если $z=f(u,v)$, где $u=\cos(xy)$, $v=x^5-7y$.

**17.14.** Найти $dz$, если $z=f(u,v)$, где $u=\sin\dfrac{x}{y}$, $v=\sqrt{\dfrac{x}{y}}$.

**17.15.** Найти $du$, если $u=f(x,y,z)$, где $x=s^2+t^2$, $y=s^2-t^2$, $z=2st$.

**17.16.** Показать, что функция $z=y\cdot\varphi(\cos(x-y))$ удовлетворяет уравнению $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{z}{y}$.

**17.17.** Показать, что функция $z = xf\left(\frac{y}{x}\right) - x^2 - y^2$ удовлетворяет уравнению $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z - x^2 - y^2$.

**17.18.** Показать, что функция $z = \frac{y}{f(x^2 - y^2)}$ удовлетворяет уравнению $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$.

**17.19.** Показать, что функция $u = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{6}x^3(y+z) + \frac{1}{2}x^2yz + f(y - x, z - x)$ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = xyz$.

**17.20.** Найти $\frac{dy}{dx}$, если $y\sin x - \cos(x - y) = 0$.

**17.21.** Найти $\frac{dy}{dx}$, если $x + y = e^{x-y}$.

**17.22.** Найти $\frac{dy}{dx}$, если $x - y + \operatorname{arctg} y = 0$.

**17.23.** Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z^3 - 4xz + y^2 - 4 = 0$.

**17.24.** Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z\ln(x+z) - \frac{xy}{z} = 0$.

**17.25.** Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $F(x+y+z, x^2+y^2+z^2) = 0$.

**17.26.** Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $f(yz, e^{xz}) = 0$.

**17.27.** Найти $dz$, если $yz = \operatorname{arctg}(xz)$.

**17.28.** Показать, что функция $z$, определяемая уравнением $\varphi(cx - az, cy - bz) = 0$, где $\varphi$ — произвольная дифференцируемая функция двух переменных, удовлетворяет уравнению

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = c.$$

## 18. Частные производные и дифференциалы высших порядков

Найти частные производные 2-го порядка от заданных функций:

**18.1.** $z = xy + \frac{y}{x}$.

**18.2.** $z = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

**18.3.** $z = xe^{-xy}$.

**18.4.** $z = y^x$.

**18.5.** $z = \arcsin\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

**18.6.** $u = \left(\frac{y}{x}\right)^z$.

**18.7.** Показать, что $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$, если $z=x\sin(2x+3y)$.

**18.8.** Показать, что $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$, если $z=\cos\dfrac{y}{x}\arccos\dfrac{x}{y}$.

**18.9.** Найти $f'''_{xxx}(0,1)$, $f'''_{xxy}(0,1)$, $f'''_{xyy}(0,1)$, $f'''_{yyy}(0,1)$, если $f(x,y)=e^{x^2y}$.

**18.10.** Найти $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x\partial y\partial\xi\partial\eta}$, если $u=\ln\dfrac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}$.

**18.11.** Найти $\dfrac{\partial^6 u}{\partial x^3\partial y^3}$, если $u=x^3\sin y+y^3\sin x$.

**18.12.** Найти $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}$, если $u=\dfrac{xz+x^2y}{z+1}$.

**18.13.** Найти $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y\partial z}$, если $u=\dfrac{x^3y+y^3}{\cos^2 z}$.

**18.14.** Найти $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}$, если $u=\dfrac{xy^2z}{x+1}$.

**18.15.** Показать, что функция $u=a\sin\lambda x\cos a\lambda t$ удовлетворяет *уравнению колебания струны*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

**18.16.** Показать, что функция $u=\dfrac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$ удовлетворяет *уравнению Лапласа*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

Найти дифференциалы 2-го порядка следующих функций:

**18.17.** $z=\dfrac{y}{x}-\dfrac{x}{y}$.

**18.18.** $z=(x+y)e^{xy}$.

**18.19.** $z=x\ln\dfrac{y}{x}$.

**18.20.** $u=e^{xyz}$.

**18.21.** Найти $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, если $z=u^2\ln v$, $u=\dfrac{y}{x}$, $v=x^2y$.

**18.22.** Найти $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, если $z=f(u,v)$, $u=xy$, $v=\dfrac{x}{y}$.

**18.23.** Найти $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$, если $u=f(x,y,z)$, $z=\varphi(x,y)$.

**18.24.** Найти все частные производные 2-го порядка от функции $u=f(x,xy,xyz)$.

**18.25.** Найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, если $x+y=e^{x-y}$.

**18.26.** Найти $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, если $x+y+z=e^z$.

## 19. Градиент и производная по направлению. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Определить вид линий или поверхностей уровня следующих скалярных полей:

**19.1.** $z=y^2+x$.

**19.2.** $z=\dfrac{y}{x}$.

**19.3.** $u=x+y+z$.

**19.4.** $u=x^2+y^2-z^2$.

Найти градиенты функций в указанных точках:

**19.5.** $z=\dfrac{x^2+y}{y+1}$, $M_0(1,0)$.

**19.6.** $z=\dfrac{xy^2}{x+1}$, $M_0(0,1)$.

**19.7.** $u=\dfrac{xy+y^2}{z+1}$, $M_0(1,1,0)$.

**19.8.** $u=\dfrac{y^2+1}{xz}$, $M_0(1,0,1)$.

**19.9.** Найти стационарные точки поля $u=2x^2-4xy+y^2-2yz+6z$ (точки, в которых градиент функции равен 0).

**19.10.** Найти единичный вектор нормали к поверхности уровня поля $u=x^2+2xy-4yz$ в точке $M_0(1,1,-1)$, направленный в сторону возрастания поля.

**19.11.** Найти скорость и направление наибыстрейшего возрастания поля $u=xyz$ в точке $M_0(1,2,2)$.

**19.12.** Найти угол между градиентами поля $u=x^2+2y^2-z^2$ в точках $M_1(2,3,-1)$ и $M_2(1,-1,2)$.

Найти производные от следующих полей в заданных точках по заданному направлению:

**19.13.** $u=x^2+\dfrac{1}{2}y^2$ в точке $M_0(2,-1)$ по направлению $\overrightarrow{M_0M_1}$, где $M_1(6,2)$.

**19.14.** $u=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}y^2+z$ в точке $M_0(2,1,1)$ по направлению прямой $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z-1}{2}$ в сторону возрастания поля.

**19.15.** $u=\dfrac{x^2+y^3}{z+1}$ в точке $M_0(2,-1,0)$ по направлению $\operatorname{grad} u(M_1)$, где $M_1(1,-1,0)$.

**19.16.** Найти проекцию $\operatorname{grad} u(M_0)$ на вектор $\vec{s}=\{2,-2,1\}$, где $u=xy+yz+2xz$, $M_0(2,-1,4)$.

Найти уравнения касательной плоскости и нормали к следующим поверхностям в указанных точках:

**19.17.** $z=\sin x\cos y$ в точке $M_0\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$.

**19.18.** $z=e^{x\cos y}$ в точке $M_0\left(1, \pi, \frac{1}{e}\right)$.

**19.19.** $x(y+z)(xy-z)+8=0$ в точке $M_0(2,1,3)$.

**19.20.** $2^{\frac{x}{z}}+2^{\frac{y}{z}}=8$ в точке $M_0(2,2,1)$.

**19.21.** $z^2+4z+x^2=0$ в точках пересечения с осью $Oz$.

**19.22.** Найти углы, которые образует нормаль к поверхности $z=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$ в точке $M_0\left(1, 1, \frac{\pi}{4}\right)$ с осями координат.

**19.23.** Для поверхности $z=4x-xy+y^2$ найти уравнение касательной плоскости, параллельной плоскости $4x+y+2z+9=0$.

**19.24.** Для поверхности $x^2-z^2-2x+6y=4$ найти уравнение нормали, параллельной прямой $\frac{x+2}{1}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{4}$.

**19.25.** Для поверхности $2x-y^2+4y+z^2=4$ найти уравнение касательной плоскости, перпендикулярной прямой $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z+1}{-4}$.

**19.26.** Для поверхности $x^2-4y+z^2-6z=23$ найти уравнение нормали, перпендикулярной плоскости $-2x+y+3z-8=0$.

**19.27.** На поверхности $x^2+2y^2+3z^2+2xy+2xz+4yz=8$ найти точки, в которых касательные плоскости параллельны координатным плоскостям.

**19.28.** Показать, что касательные плоскости к поверхности $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ отсекают на осях координат отрезки, сумма квадратов которых постоянна и равна $a^2$.

## 20. Локальный экстремум функций нескольких переменных

Найти экстремумы функций двух переменных:

**20.1.** $z=x^2+xy+y^2-3x-6y$.

**20.2.** $z=xy^2(1-x-y)\quad (x>0,\ y>0)$.

**20.3.** $z=3x^2-x^3+3y^2+4y$.

**20.4.** $z=xy+\frac{50}{x}+\frac{20}{y}\quad (x>0,\ y>0)$.

**20.5.** $z=x^2+y^2-2\ln x-18\ln y\quad (x>0,\ y>0)$.

**20.6.** $z=x^3+3xy^2-15x-12y$.

**20.7.** $z=2x^3-xy^2+5x^2+y^2$.

**20.8.** $z=(2x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$.

Найти экстремумы функций трех переменных:

**20.9.** $u = x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z$.

**20.10.** $u = xy^2z^3(1 - x - 2y - 3z) \quad (x > 0,\ y > 0,\ z > 0)$.

**20.11.** $u = x + \dfrac{y}{x} + \dfrac{z}{y} + \dfrac{2}{z}$.

Найти экстремумы функций $z$, заданных неявно:

**20.12.** $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 4z - 7 = 0$.

**20.13.** $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8yz - z + 8 = 0$.

## 21. Условный экстремум функций нескольких переменных

Найти условные экстремумы функций:

**21.1.** $z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$ при $x + y + 3 = 0$.

**21.2.** $z = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ при $x + y = 2$.

**21.3.** $z = \dfrac{x - y - 4}{\sqrt{2}}$ при $x^2 + y^2 = 1$.

**21.4.** $z = xy^2$ при $x + 2y = 1$.

**21.5.** $z = \dfrac{xy}{3} - 4x^2 + y + 10x$ при $y = x^2 - 6$.

**21.6.** $z = \dfrac{y^2}{4} - x^2 - \dfrac{xy}{3}$ при $y = x^2$.

**21.7.** $z = 2x + y$ при $x^2 + y^2 = 1$.

**21.8.** $z = x + 2y$ при $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{1} = 1$.

**21.9.** $u = 2x + y - 2z$ при $x^2 + y^2 + z^2 = 36$.

**21.10.** $u = x^2 + y^2 + z^2$ при $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{4} = 1$.

**21.11.** $u = xy^2z^3$ при $x + 2y + 3z = 12$ $(x > 0,\ y > 0,\ z > 0)$.

**21.12.** $u = x^2 - xz - \dfrac{y^2}{2}$ при $z = x^2 - y$.

**21.13.** $u = xyz$ при $x + y + z = 4$, $xy + yz + zx = 5$.

**21.14.** Доказать неравенство

$$\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} \geqslant \left(\frac{x + y + z}{3}\right)^3,$$

если $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$.

## 22. Наибольшее и наименьшее значения функции

**22.1.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x - 2y + 5$ в области $x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$, $y - x \leqslant 1$.

**22.2.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 2y - 2x$ в области $y \geqslant 0$, $x - y \geqslant 0$, $x + y \leqslant 2$.

**22.3.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2 - xy - x - y$ в области $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + y \leqslant 3$.

**22.4.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2 - y + 2x$ в области $x \geqslant 0$, $y \geqslant -1$, $x + y \leqslant 2$.

**22.5.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 2y - x^2 + 3$ в области $x^2 - 2x \leqslant y$, $y \leqslant x$.

**22.6.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = xy - x^2$ в области $x^2 - 1 \leqslant y$, $y - x \leqslant 1$.

**22.7.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 - y^2 + xy + x - 3$ в области $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 2$.

**22.8.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2 - 4xy + 6y + 2$ в области $-1 \leqslant x \leqslant 2$, $-1 \leqslant y \leqslant 2$.

**22.9.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = xy$ в области $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

**22.10.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = xy^2$ в области $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

**22.11.** Из всех прямоугольных параллелепипедов, имеющих данную сумму ребер $12a$, найти параллелепипед с наибольшим объемом.

**22.12.** Найти прямоугольный параллелепипед с длиной диагонали $d$, имеющий наибольший объем.

**22.13.** Внутри четырехугольника найти точку, сумма квадратов расстояний которой от вершин была бы наименьшей.

**22.14.** В полушар радиуса $R$ вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объема.

**22.15.** В прямой круговой конус с радиусом основания $R$ и высотой $H$ вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объема.

**22.16.** Из всех треугольников с основанием $a$ и углом $\alpha$ при вершине найти треугольник с наибольшей площадью.

## 23. Определенный интеграл

Используя формулу Ньютона-Лейбница, вычислить интегралы:

**23.1.** $\displaystyle\int_2^9 \sqrt[3]{x-1}\,dx.$ **23.2.** $\displaystyle\int_0^3 2^x\,dx.$

**23.3.** $\displaystyle\int\limits_1^2 \frac{dx}{2x-1}.$

**23.4.** $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{x^2\,dx}{1+x^6}.$

**23.5.** $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{dx}{4x^2+4x+5}.$

**23.6.** $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}.$

**23.7.** $\displaystyle\int\limits_3^4 \frac{x^2+3}{x-2}\,dx.$

**23.8.** $\displaystyle\int\limits_1^e \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx.$

**23.9.** $\displaystyle\int\limits_1^e \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}.$

**23.10.** $\displaystyle\int\limits_{\frac{3}{4}}^2 \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}.$

**23.11.** $\displaystyle\int\limits_0^2 \frac{2x-1}{2x+1}\,dx.$

**23.12.** $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{(x^2+3x)\,dx}{(x+1)(x^2+1)}.$

Вычислить интегралы с помощью замены переменной:

**23.13.** $\displaystyle\int\limits_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}.$

**23.14.** $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+2\cos x}.$

**23.15.** $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+2\sin^2 x}.$

**23.16.** $\displaystyle\int\limits_{-1}^1 \sqrt{3-2x-x^2}\,dx.$

**23.17.** $\displaystyle\int\limits_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$

**23.18.** $\displaystyle\int\limits_2^{\frac{4}{\sqrt{3}}} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,dx.$

**23.19.** $\displaystyle\int\limits_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$

**23.20.** $\displaystyle\int\limits_1^5 \frac{dx}{x+\sqrt{2x-1}}.$

**23.21.** $\displaystyle\int\limits_{\frac{1}{4}}^1 \frac{dx}{x\sqrt{1+4x^2}}.$

**23.22.** $\displaystyle\int\limits_{-1}^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{5-4x}}.$

**23.23.** $\displaystyle\int\limits_{\ln 2}^{\ln 6} \frac{e^x\sqrt{e^x-2}}{e^x+2}\,dx.$

**23.24.** $\displaystyle\int\limits_0^3 x^2\sqrt{9-x^2}\,dx.$

**23.25.** Показать, что $\displaystyle\int\limits_e^{e^2} \frac{dx}{\ln x} = \int\limits_1^2 \frac{e^x}{x}\,dx.$

**23.26.** Показать, что $\displaystyle\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \frac{dx}{\arcsin x} = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x}\,dx.$

Вычислить интегралы методом интегрирования по частям:

**23.27.** $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}\,dx.$

**23.28.** $\displaystyle\int\limits_1^e \ln^2 x\,dx.$

**23.29.** $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} e^{2x}\sin 4x\,dx.$

**23.30.** $\displaystyle\int\limits_1^e x\ln x\,dx.$

**23.31.** $\displaystyle\int\limits_0^1 x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx.$

**23.32.** $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x^2\cos 2x\,dx.$

**23.33.** Оценить интеграл $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{8+x^3}\,dx.$

**23.34.** Оценить интеграл $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{5+2\sin x}}.$

С помощью определенных интегралов найти пределы сумм:

**23.35.** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n^2}\right).$

**23.36.** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n}\left(1+\cos\frac{\pi}{2n}+\cos 2\frac{\pi}{2n}+\ldots+\cos(n-1)\frac{\pi}{2n}\right).$

**23.37.** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\ldots+\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right).$

**23.38.** Найти точки экстремума функции

$$\Phi(x)=\int\limits_a^x \frac{\cos t}{t}\,dt \qquad \left(x>0,\quad 0<a<\frac{\pi}{2}\right).$$

Найти производные следующих функций:

**23.39.** $\Phi(x)=\int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$.

**23.40.** $\Phi(x)=\int\limits_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} \sin(t^2)\,dt$.

**23.41.** $\Phi(x)=\int\limits_x^0 \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}}$.

**23.42.** $\Phi(x)=\int\limits_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\ln t}\quad (x>0)$.

## 24. Геометрические приложения определенного интеграла

### 24.1. Площадь плоской фигуры

**24.1.** Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y=\ln x$ и прямыми $x=e$, $x=e^2$, $y=0$.

**24.2.** Найти площадь фигуры, ограниченной параболами $y^2=4x$, $x^2=4y$.

**24.3.** Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y=x^2+2x$ и прямой $y=x+2$.

**24.4.** Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=\frac{27}{x^2+9}$ и $y=\frac{x^2}{6}$.

**24.5.** Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y^2=2px$ и $y^2=\frac{4}{p}(x-p)^3$, $(p>0)$.

**24.6.** Найти площадь фигуры, ограниченной окружностями $x^2+y^2=a^2$, $x^2+y^2-2ay=a^2$ и прямой $y=a$.

**24.7.** Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=\frac{a^3}{a^2+x^2}$, $y=\frac{a^2x}{a^2+x^2}$ и осью $Oy$.

**24.8.** Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=e^x-1$ и $y=e^{2x}-3$, $x=0$.

**24.9.** Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y=3+2x-x^2$ и осью $Ox$.

**24.10.** Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y=\arcsin x$ и прямыми $x=0$, $y=\frac{\pi}{2}$.

**24.11.** Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y=\ln x$, касательной к ней в точке $x=e$ и осью $Ox$.

**24.12.** Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=\ln(x+2)$, $y=2\ln x$, $y=0$.

**24.13.** Найти площадь фигуры, ограниченной астроидой $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$.

**24.14.** Найти площадь петли кривой $x=\dfrac{1}{3}t(3-t^2)$, $y=t^2$.

**24.15.** Найти площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $x=2(t-\sin t)$, $y=2(1-\cos t)$ и осью $Ox$.

**24.16.** Найти площадь петли кривой $x=2t-t^2$, $y=2t^2-t^3$.

**24.17.** Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $r=a(1+\sin\varphi)$.

**24.18.** Найти площадь одного лепестка кривой $r=a\sin 2\varphi$.

**24.19.** Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $r=a\sin 5\varphi$.

**24.20.** Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $r^2=2\cos 2\varphi$, $r=1$ $(r\geqslant 1)$.

**24.21.** Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $r=a\cos 3\varphi$.

**24.22.** Найти площадь фигуры, ограниченной окружностью $r=\sqrt{3}\sin\varphi$ и кардиоидой $r=1-\cos\varphi$ (вне кардиоиды).

## 24.2. Длина дуги кривой

**24.23.** Найти длину полукубической параболы $y^2=\dfrac{8}{27}(x-1)^3$, лежащей внутри параболы $y^2=2x$.

**24.24.** Найти длину дуги кривой $y=2\ln(4-x^2)$, лежащей выше оси $Ox$.

**24.25.** Найти длину дуги кривой $y=\dfrac{2}{\pi}\ln\sin\dfrac{\pi x}{2}$ от $x=\dfrac{1}{2}$ до $x=\dfrac{3}{2}$.

**24.26.** Найти длину дуги полукубической параболы $y^2=5(x-1)^3$, отсекаемой прямой $x=2$.

**24.27.** Найти длину дуги кривой $x=a(3\cos t-\cos 3t)$, $y=a(3\sin t-\sin 3t)$ от $t=0$ до $t=\dfrac{\pi}{2}$.

**24.28.** Найти длину дуги кривой $x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t$ от $t=0$ до $t=1$.

**24.29.** Найти длину дуги кривой $x=\dfrac{t^6}{6}$, $y=2-\dfrac{t^4}{4}$ между точками ее пересечения с осями координат.

**24.30.** Найти длину петли кривой $x=a(t^2+1)$, $y=\dfrac{a}{3}(t^3-3t)$.

**24.31.** Найти длину дуги кардиоиды $r=2(1-\cos\varphi)$, находящейся внутри окружности $r=1$.

**24.32.** Найти длину всей кривой $r=a\cos^3\dfrac{\varphi}{3}$.

**24.33.** Найти длину дуги спирали Архимеда $r=5\varphi$, находящейся внутри окружности $r=10\pi$.

**24.34.** Найти длину всей кривой $r=a\sin^4\dfrac{\varphi}{4}$.

### 24.3. Объем тел вращения

**24.35.** Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси $Ox$ фигуры, ограниченной линиями $2y=x^2$ и $2x+2y-3=0$.

**24.36.** Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси $Ox$ фигуры, ограниченной линиями $y=e^{-2x}-1$, $y=e^{-x}+1$, $x=0$.

**24.37.** Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси $Oy$ фигуры, ограниченной линиями $y=x$, $y=x+\sin^2 x$ $(0\leqslant x\leqslant\pi)$.

**24.38.** Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси $Oy$ фигуры, ограниченной линиями $y=\dfrac{x^2}{2}+2x+2$, $y=2$.

**24.39.** Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси $Ox$ фигуры, ограниченной кривой $x=a\cos t$, $y=a\sin 2t$ и осью $Ox$ $(0\leqslant x\leqslant a)$.

## 25. Несобственные интегралы

### 25.1. Интегралы с бесконечными пределами

Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость):

**25.1.** $\displaystyle\int\limits_e^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^3 x}$.

**25.2.** $\displaystyle\int\limits_e^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

**25.3.** $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+6x+11}$.

**25.4.** $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+8}$.

**25.5.** $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg} x\,dx}{x^2+1}$.

**25.6.** $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}$.

**25.7.** $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{x\,dx}{x^2+4}$.

**25.8.** $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty}\frac{1+2x}{x^2(1+x)}\,dx$.

**25.9.** $\displaystyle\int\limits_2^{+\infty}\frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2+5)^3}}$.

**25.10.** $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty}\frac{x\,dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}$.

**25.11.** $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx.$

**25.12.** $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx.$

**25.13.** $\int\limits_0^{+\infty} x^3e^{-x^2}\,dx.$

**25.14.** $\int\limits_0^{+\infty} e^{-2x}\cos x\,dx.$

**25.15.** $\int\limits_0^{+\infty} x\cos x\,dx.$

**25.16.** $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx.$

Исследовать на сходимость интегралы:

**25.17.** $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{3+2x^2+5x^4}.$

**25.18.** $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^3}+\sqrt{x^2+1}}{x^3+3x+1}\,dx.$

**25.19.** $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}}\,dx.$

**25.20.** $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)(x+2)}}.$

**25.21.** $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin\dfrac{1}{x}}{2+x\sqrt{x}}\,dx.$

**25.22.** $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}+\cos^2 x}.$

### 25.2. Интегралы от неограниченных функций

Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость):

**25.23.** $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{x^2+x^4}.$

**25.24.** $\int\limits_0^{2} \frac{x\,dx}{(x^2-1)^{\frac{4}{5}}}.$

**25.25.** $\int\limits_1^{e} \frac{dx}{x\ln^3 x}.$

**25.26.** $\int\limits_2^{4} \frac{dx}{\sqrt{6x-x^2-8}}.$

**25.27.** $\int\limits_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{dx}{x\sqrt{9x^2-1}}.$

**25.28.** $\int\limits_0^{2} \frac{x^3\,dx}{\sqrt{4-x^2}}.$

**25.29.** $\int\limits_1^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}.$

**25.30.** $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}.$

Исследовать на сходимость интегралы:

**25.31.** $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\cos\frac{1}{x}}{\sqrt[3]{x}}\,dx.$ **25.32.** $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^4}}.$

**25.33.** $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\ln\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)}{e^x-1}\,dx.$ **25.34.** $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^x-\cos x}.$

## 26. Двойной интеграл, его вычисление в декартовой системе координат

Для данных повторных интегралов написать уравнения кривых, ограничивающих области интегрирования, и построить эти области:

**26.1.** $\displaystyle\int\limits_1^2 dx \int\limits_x^{x+3} f(x,y)\,dy.$ **26.2.** $\displaystyle\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_{x^2}^{2-x^2} f(x,y)\,dy.$

**26.3.** $\displaystyle\int\limits_0^2 dy \int\limits_{2-y}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dx.$ **26.4.** $\displaystyle\int\limits_0^1 dx \int\limits_{\sqrt{x}}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dy.$

Для указанных ниже областей $D$ записать двойной интеграл

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$$

в виде повторных, взятых в различных порядках:

**26.5.** $D$ — параллелограмм, ограниченный прямыми $y=x$, $y=x-3$, $y=2$, $y=4$.

**26.6.** $D$ — область, ограниченная кривыми $y^2=2x$, $x^2+y^2=4x$, $y=0$ $(y>0)$.

Изменить порядок интегрирования в следующих повторных интегралах:

**26.7.** $\displaystyle\int\limits_{-1}^1 dy \int\limits_{y^2-1}^{1-y^2} f(x,y)\,dx.$ **26.8.** $\displaystyle\int\limits_0^4 dx \int\limits_{\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} f(x,y)\,dy.$

**26.9.** $\displaystyle\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\frac{y^2}{9}}^{y} f(x,y)\,dx + \int\limits_1^3 dy \int\limits_{\frac{y^2}{9}}^{1} f(x,y)\,dx.$

**26.10.** $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{0}^{\frac{x+2}{2}} f(x,y)\,dy + \int\limits_{2}^{\frac{10}{3}} dx \int\limits_{\sqrt{x^2-4}}^{\frac{x+2}{2}} f(x,y)\,dy.$

**26.11.** $\int\limits_{0}^{a} dx \int\limits_{\sqrt{2ax-x^2}}^{a+\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)\,dy.$ **26.12.** $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{y^2-1}^{\frac{y^2}{2}} f(x,y)\,dx.$

Вычислить повторные интегралы:

**26.13.** $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{2} (x^2+y)\,dy.$ **26.14.** $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{x}^{x\sqrt{3}} \frac{x\,dy}{x^2+y^2}.$

**26.15.** $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{a\cos\varphi}^{a(1+\cos\varphi)} r\,dr.$ **26.16.** $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{2\cos\varphi} r^3\,dr.$

Вычислить следующие интегралы:

**26.17.** $\iint\limits_{D} xy\,dx\,dy$, где область $D$ ограничена кривыми $x+y=2$, $x^2+y^2=2y$.

**26.18.** $\iint\limits_{D} (x^2+y^2)\,dx\,dy$, где область $D$ ограничена кривыми $y=x$, $x+y=2$, $x=0$.

**26.19.** $\iint\limits_{D} y\,dx\,dy$, где область $D$ — треугольник с вершинами $O(0,0)$, $A(1,1)$, $B(0,1)$.

**26.20.** $\iint\limits_{D} (x+2y)\,dx\,dy$, где область $D$ ограничена кривыми $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$.

**26.21.** $\iint\limits_{D} (4-y)\,dx\,dy$, где область $D$ ограничена кривыми $x^2=4y$, $y=1$, $x=0$ $(x>0)$.

**26.22.** $\iint\limits_{D} \frac{x\,dx\,dy}{x^2+y^2}$, где область $D$ ограничена кривыми $y=x\,\mathrm{tg}\,x$, $y=x$.

**26.23.** $\iint\limits_D \sqrt{a^2+x^2}\,dx\,dy$, где область $D$ ограничена кривыми $y^2-x^2=a^2$, $x=a$, $x=0$, $y=0$ $(y>0)$.

**26.24.** $\iint\limits_D e^{x+y}\,dx\,dy$, где область $D$ ограничена кривыми $y=e^x$, $x=0$, $y=2$.

## 27. Замена переменных в двойном интеграле. Двойной интеграл в полярной системе координат

Перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования по новым переменным в следующих интегралах:

**27.1.** $\int\limits_0^{\frac{3a}{4}} dx \int\limits_{\frac{a\sqrt{3}}{2}-\sqrt{\frac{3a^2}{4}-x^2}}^{\sqrt{ax-x^2}} f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) dy.$

**27.2.** $\int\limits_0^a dx \int\limits_{\sqrt{ax}}^{a+\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)\,dy.$ **27.3.** $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx.$

**27.4.** $\iint\limits_D f\left(\dfrac{y}{x}\right) dx\,dy$, где область $D$ ограничена линиями $x^2+y^2=\sqrt{6}\,x$, $(x^2+y^2)^2=9(x^2-y^2)$, $y=0$ $(y\geqslant 0,\ x\leqslant\sqrt{6})$.

Перейдя к полярным координатам, вычислить следующие интегралы:

**27.5.** $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}} e^{x^2+y^2}\,dy.$ **27.6.** $\int\limits_0^a dy \int\limits_{\sqrt{ay-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$

**27.7.** $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2-9}\,dx\,dy$, где область $D$ — кольцо между двумя окружностями $x^2+y^2=9$ и $x^2+y^2=25$.

**27.8.** $\iint\limits_D \dfrac{dx\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$, где область $D$ — часть круга радиуса $a$ с центром в точке $O(0,0)$, лежащая в первой четверти.

**27.9.** $\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$, где область $D$ ограничена кривыми $x^2+y^2=ax$, $x^2+y^2=2ax$, $y=0$ $(y>0)$.

**27.10.** $\iint\limits_D \frac{x\,dx\,dy}{x^2+y^2}$, где область $D$ ограничена кривыми $x^2=ay$, $x^2+y^2=2a^2$, $y=0$ $(x>0,\ a>0)$.

**27.11.** $\iint\limits_D x\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, где область $D$ ограничена лепестком лемнискаты $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ $(x\geqslant 0)$.

Перейти к новым переменным $u$ и $v$ и расставить пределы интегрирования в следующих интегралах:

**27.12.** $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$, где область $D$ определена неравенствами $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $x+y\leqslant a$. Положить $u=x+y$, $ay=uv$.

**27.13.** $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$, где область $D$ ограничена кривыми $x^2=ay$, $x^2=by$, $y^2=px$, $y^2=qx$ $(0<a<b,\ 0<p<q)$. Положить $x^2=uy$, $y^2=vx$.

**27.14.** $\int\limits_0^3 dx \int\limits_{1-x}^{3-x} f(x,y)\,dy$. Положить $u=x+y$, $v=x-y$.

Вычислить следующие двойные интегралы:

**27.15.** $\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{c^2-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}$, $(c>1)$, где область $D$ ограничена эллипсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (перейти к обобщенным полярным координатам $r$ и $\varphi$ по формулам $x=ar\cos\varphi$, $y=br\sin\varphi$).

**27.16.** $\iint\limits_D e^{(x+y)^2}\,dx\,dy$, где область $D$ задана неравенствами $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $x+y\leqslant 1$ (произвести замену переменных $x=u(1-v)$, $y=uv$).

## 28. Вычисление площадей плоских фигур

**28.1.** Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y^2=4ax+4a^2$ и $x+y=2a$ $(a>0)$.

**28.2.** Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $xy=4$ и $x+y=5$.

**28.3.** Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=\frac{8a^3}{x^2+4a^2}$, $x=2y$, $x=0$ $(a>0)$.

**28.4.** Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $(x-1)(y+2)=2$ и $x+y=2$.

**28.5.** Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=\dfrac{a^3}{a^2+x^2}$, $y=\dfrac{a^2x}{a^2+x^2}$ и осью $Oy$ $(a>0)$.

**28.6.** Найти площадь фигуры, ограниченной осью $Oy$, параболой $(x-a)^2=2p(y-b)$ и касательной к ней в точке с абсциссой $x=c$ $(c>a>0,\ p>0)$.

**28.7.** Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $x^2+y^2=2ax$, $x^2+y^2=2bx$, $y=x$, $y=0$ $(0<a<b)$.

**28.8.** Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$ и $x^2+y^2=2ax$.

**28.9.** Найти площадь фигуры, ограниченной петлей кривой $(x+y)^4=ax^2y$, лежащей в первой четверти $(a>0)$.

**28.10.** Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $(x^2+y^2)^4=a^2x^2y^4$.

**28.11.** Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $(x^2+y^2)^2=a^2xy$.

**28.12.** Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $(x^2+y^2)^2=a^2(2x^2+3y^2)$.

**28.13.** Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $r=a(1-\cos\varphi)$ и $r=a$ (вне кардиоиды).

**28.14.** Найти площадь фигуры, лежащей в первой четверти, ограниченной кривыми $r=a\operatorname{tg}\varphi$, $r=\dfrac{a}{\cos\varphi}$ и полярной осью.

**28.15.** Найти площадь фигуры, ограниченной лемнискатой Бернулли $r^2=a^2\sin 2\varphi$.

**28.16.** Найти площадь фигуры, ограниченной окружностью $r=\sqrt{3}\sin\varphi$ и кардиоидой $r=1-\cos\varphi$ (вне кардиоиды).

## 29. Вычисление объемов тел

**29.1.** Найти объем тела, ограниченного поверхностями $y=x^2$, $z=y$, $z+y=2$.

**29.2.** Найти объем цилиндра $x^2+y^2=2x$, стоящего на плоскости $z=0$ и ограниченного сверху гиперболическим параболоидом $z=xy$.

**29.3.** Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x=0$, $z=0$, $z=4-y^2$ и $y=\dfrac{x^2}{2}$.

**29.4.** Найти объем тела, ограниченного поверхностями $y=x^2$, $x+y=2$, $x=0$, $z=0$, $z=xy$.

**29.5.** Найти объем тела, ограниченного поверхностями $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt{2-x}$, $z=0$, $z=y$.

**29.6.** Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z^2-x^2=a^2$, $z^2-y^2=a^2$, $z=a\sqrt{2}$ $(a>0)$.

**29.7.** Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x^2-y^2=2az$, $x^2+y^2=a^2$, $z=0$ (внутри цилиндра: $a>0$).

**29.8.** Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z=x^2+y^2$, $z=2(x^2+y^2)$, $y=x$, $y^2=x$.

**29.9.** Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=az$, $x^2+y^2=ax$, $z=0$.

**29.10.** Найти объем тела, ограниченного сферой $x^2+y^2+z^2=4a^2$ и параболоидом $x^2+y^2=3az$ (внутри параболоида).

**29.11.** Найти объем тела, ограниченного конусом $x^2+y^2=z^2$ и параболоидом $x^2+y^2=8-2z$, $z\geqslant 0$.

## 30. Дифференциальные уравнения 1-го порядка. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Показать, что заданные выражения определяют общие решения или общие интегралы соответствующих дифференциальных уравнений:

**30.1.** $y=x(C-\ln|x|)$, $\quad (x-y)\,dx+x\,dy=0$.

**30.2.** $y=x\left(\int\limits_1^x \frac{e^t}{t}dt+C\right)$, $\quad xy'-y=xe^x$.

**30.3.** Написать уравнение, которому удовлетворяют все точки экстремума интегральных кривых дифференциального уравнения $y'=f(x,y)$. Как отличить точки максимума от точек минимума?

**30.4.** Написать уравнение, которому удовлетворяют все точки перегиба интегральных кривых дифференциального уравнения $y'=f(x,y)$.

Составить дифференциальные уравнения семейств кривых:

**30.5.** Парабол $y=x^2+2ax$.

**30.6.** Гипербол $x^2-y^2=2ax$.

**30.7.** $y=\sin x+C\cos x$.

**30.8.** Составить дифференциальное уравнение семейства кривых, у которых отрезок любой нормали, заключенный между осями координат, делится пополам в точке касания.

Решить дифференциальные уравнения:

**30.9.** $y'\sqrt{1-x^2}=1+y^2$. **30.10.** $y'+\dfrac{x\sin x}{y\cos y}=0$.

**30.11.** $2(1+y^2)x\,dx+(1+x^2)\,dy=0$.

**30.12.** $xy\,dx+\sqrt{1-x^2}\,dy=0$.

**30.13.** $ye^{2x}dx-\left(1+e^{2x}\right)dy=0$.

**30.14.** $(1+y)(e^x dx-e^{2y}dy)-(1+y^2)\,dy=0$.

**30.15.** $y'(x^2+1)=2xy$. **30.16.** $y'\operatorname{tg}x+y=1$.

**30.17.** $y'=\dfrac{1}{2x+y}$. **30.18.** $y'=(4x+y+1)^2$.

Найти частные решения уравнений, удовлетворяющие начальным условиям:

**30.19.** $(1+y^2)\,dx-xy\,dy=0$; $y(1)=0$.

**30.20.** $(xy^2+x)\,dy+(x^2y-y)\,dx=0$; $y(1)=1$.

**30.21.** $y'\operatorname{tg}x=y$; $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$.

**30.22.** $xy'=y\ln y$; $y(1)=e$.

## 31. Однородные дифференциальные уравнения

Определить порядок однородности или неоднородности функций:

**31.1.** $f(x,y)=\dfrac{xy+y^2}{x^2+y^2}$. **31.2.** $f(x,y)=x+\sqrt{xy}$.

**31.3.** $f(x,y)=\dfrac{1+x}{x-y}$. **31.4.** $f(x,y)=xy+y$.

**31.5.** $f(x,y)=\dfrac{y(\ln y-\ln x)}{x}$. **31.6.** $f(x,y)=\dfrac{y}{x}\sin\dfrac{y}{x}$.

Решить дифференциальные уравнения:

**31.7.** $y'=\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}$. **31.8.** $y'=\dfrac{y}{x}+\sin\dfrac{y}{x}$.

**31.9.** $x\,dy-y\,dx=x\,dx$. **31.10.** $xy'+y=yy'-x$.

**31.11.** $y'=\dfrac{x-y}{x+y}$. **31.12.** $(x-y)\,dx+x\,dy=0$.

**31.13.** $(x^2+xy)y'=x\sqrt{x^2-y^2}+xy+y^2$.

**31.14.** $(2x-y+1)\,dx+(2y-x-1)\,dy=0$.

**31.15.** $(y+2)\,dx-(2x+y-4)\,dy=0$.

**31.16.** $(x+y+1)\,dx+(2x+2y-1)\,dy=0$.

**31.17.** $(x-y+4)\,dx-(x+y-2)\,dy=0$.

Найти частные решения уравнений, удовлетворяющие данным начальным условиям:

**31.18.** $xy' = y \ln \dfrac{y}{x}$; $\quad y(1) = e^2$.

**31.19.** $(\sqrt{xy} - x)\,dy + y\,dx = 0$; $\quad y(1) = 1$.

**31.20.** $(y + \sqrt{x^2 + y^2})\,dx - x\,dy = 0$; $\quad y(1) = 0$.

## 32. Линейные дифференциальные уравнения и уравнения Бернулли

Решить дифференциальные уравнения:

**32.1.** $y' + 2xy = xe^{-x^2}$.

**32.2.** $y' + 2y = e^{3x}$.

**32.3.** $y' + \dfrac{y}{1+x} = x^2$.

**32.4.** $y' + \dfrac{y}{x} = 2\ln x + 1$.

**32.5.** $(1+x^2)y' = 2xy + (1+x^2)^2$.

**32.6.** $y' = \dfrac{2y}{x+1} + e^x(x+1)^2$.

**32.7.** $y' \cos x + y \sin x = 1$.

**32.8.** $y' = \dfrac{y}{x+y^3}$.

**32.9.** $(1+y^2)\,dx = (\operatorname{arctg} y - x)\,dy$.

**32.10.** $y'(\sin y - x) = 1$.

Найти частные решения уравнений, удовлетворяющие заданным начальным условиям:

**32.11.** $y' + y \operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\cos x}$; $\quad y(0) = 0$.

**32.12.** $y' = 2y + e^x - x$; $\quad y(0) = \dfrac{1}{4}$.

**32.13.** $y' = \dfrac{y}{2y\ln y + y - x}$; $\quad y(1) = 1$.

**32.14.** $y' + y\cos x = \sin x \cdot \cos x$; $\quad y(0) = 0$.

Решить дифференциальные уравнения Бернулли:

**32.15.** $y' + 4xy = 2xe^{-x^2}\sqrt{y}$.

**32.16.** $y' = y \operatorname{ctg} x + \dfrac{y^3}{\sin x}$.

**32.17.** $y' = \dfrac{2x}{x^2\cos y + \sin 2y}$.

**32.18.** $y\,dx - (4x^2 y + x)\,dy = 0$.

Найти частные решения уравнений Бернулли, удовлетворяющие заданным начальным условиям:

**32.19.** $3\,dy = (1 - 3y^3)y \sin x\,dx$; $\quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.

**32.20.** $y\,dx + \left(x - \dfrac{1}{2}x^3 y\right)dy = 0$; $\quad y\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1$.

**32.21.** Найти уравнения кривых, у которых площадь трапеции, ограниченной осями координат, касательной и отрезком, соединяющим точку касания с ее проекцией на ось абсцисс, есть величина постоянная, равная $3d^2$.

## 33. Уравнения в полных дифференциалах. Приложения дифференциальных уравнений 1-ого порядка

Решить дифференциальные уравнения, предварительно убедившись, что они являются уравнениями в полных дифференциалах:

**33.1.** $(2x+y)\,dx+(x+2y)\,dy=0.$

**33.2.** $(10xy-8y+1)\,dx+(5x^2-8x+3)\,dy=0.$

**33.3.** $\left(2x+e^{\frac{x}{y}}\right)dx+\left(1-\dfrac{x}{y}\right)e^{\frac{x}{y}}\,dy=0.$

**33.4.** $2x\cos^2 y\,dx+(2y-x^2\sin 2y)\,dy=0.$

**33.5.** $e^{-y}dx-(2y+xe^{-y})\,dy=0.$

**33.6.** $\left(y^2e^{xy^2}+6x-8\right)dx+\left(2xye^{xy^2}-8y\right)dy=0.$

**33.7.** Найти уравнение кривой, проходящей через точку $(1,2)$, если ее подкасательная вдвое больше абсциссы точки касания.

**33.8.** Найти уравнение кривой, проходящей через точку $(\frac{1}{2},-1)$, если длина отрезка полуоси абсцисс, отсекаемого ее касательной, равна квадрату абсциссы точки касания.

**33.9.** Найти уравнения кривых, у которых длина отрезка нормали постоянна и равна $a$.

**33.10.** Найти уравнение кривой, проходящей через точку $(1,0)$, если длина отрезка оси абсцисс, отсекаемого ее нормалью, на 2 больше абсциссы точки касания.

**33.11.** Найти уравнение кривой, проходящей через точку $(3,1)$, если длина отрезка, отсекаемого любой ее касательной на оси ординат, равна поднормали.

**33.12.** Скорость накопления капитала пропорциональна корню квадратному из количества этого капитала в данный момент. Сколько будет накоплено через 3 года, если начальный капитал составлял 10.000 рублей, а через год он стал 12.100 рублей?

## 34. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка

Решить дифференциальные уравнения, используя метод понижения порядка:

**34.1.** $y''=\dfrac{1}{1+x^2}.$

**34.2.** $y''=x+\sin x.$

**34.3.** $y''' = x^3 + 3x$.

**34.4.** $y^{IV} = (x+3)^{-3}$.

**34.5.** $y'' + 2xy'^2 = 0$.

**34.6.** $xy'' = y' + x\sin\dfrac{y'}{x}$.

**34.7.** $xy'' = y'\ln\dfrac{y'}{x}$.

**34.8.** $x^3y'' + x^2y' = 1$.

**34.9.** $y''' = 2(y''-1)\operatorname{ctg} x$.

**34.10.** $x^2y''' = y''^2$.

**34.11.** $xy''' + y'' = x + 1$.

**34.12.** $y'' = \dfrac{y'}{x} + \dfrac{x^2}{2y'}$.

**34.13.** $yy'' = y' - y'^2$.

**34.14.** $y^3y'' + 1 = 0$.

**34.15.** $yy'' + y - y'^2 = 0$.

**34.16.** $yy'' - 2yy'\ln y = y'^2$.

**34.17.** $y''\operatorname{tg} y = 2y'^2$.

**34.18.** $(y-1)y'' = 2y'^2$.

Найти частные решения дифференциальных уравнений, удовлетворяющие начальным условиям:

**34.19.** $(1+x^2)y'' = 2xy', \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 3.$

**34.20.** $y'' = \dfrac{y'}{x} + \dfrac{x^2}{y'}, \qquad y(2) = 0, \qquad y'(2) = 4.$

**34.21.** $(1+x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 1.$

**34.22.** $\dfrac{y''}{y'} = \dfrac{2yy'}{1+y^2}, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1.$

**34.23.** $yy'' - y'^2 = y^2, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0.$

**34.24.** $2yy'' + y^2 - y'^2 = 0, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 1.$

**34.25.** Найти интегральную кривую уравнения $yy'' + y'^2 - 1 = 0$, проходящую через точку $M_0(0,1)$ и касающуюся в этой точке прямой $x + y = 1$.

**34.26.** Показать, что параметрически заданная функция

$$\begin{cases} x = \ln t \\ y = t(\ln t - 1) \end{cases}$$

является решением дифференциального уравнения $y'' = \dfrac{y'}{x}\left(1 + \ln\dfrac{y'}{x}\right)$.

## 35. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

По данным корням характеристического уравнения линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами составить дифференциальное уравнение и написать его общее решение:

**35.1.** $k_{1,2} = 1,\ k_{3,4} = 2 \pm i$.

**35.2.** $k_{1,2,3,4} = -1$.

**35.3.** $k_{1,2,3} = 0,\ k_{4,5,6,7} = \pm i$.

**35.4.** $k_{1,2} = 1,\ k_{3,4} = -1$.

По данным корням характеристического уравнения линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами написать общее решение:

**35.5.** $k_{1,2}=0$, $k_{3,4,5}=2$, $k_{6,7}=2\pm 3i$, $k_{8,9,10,11}=\pm i$.

**35.6.** $k_{1,2,3}=1$, $k_4=-3$, $k_{5,6,7,8}=1\pm 2i$, $k_{9,10}=-3\pm i$.

**35.7.** $k_1=2$, $k_{2,3,4,5}=-2$, $k_{6,7,8,9,10,11}=2\pm 3i$.

**35.8.** $k_{1,2}=0$, $k_{3,4,5,6,7}=-1$, $k_{8,9}=-2\pm 4i$.

Найти общие решения дифференциальных уравнений:

**35.9.** $y''-4y'+3y=0$.

**35.10.** $y''-2y'-3y=0$.

**35.11.** $y''-4y'+4y=0$.

**35.12.** $y''+6y'+9y=0$.

**35.13.** $y''+6y'+13y=0$.

**35.14.** $y''-4y'+5y=0$.

**35.15.** $y''+3y'=0$.

**35.16.** $y''+2y'+10y=0$.

**35.17.** $y'''-5y''+17y'-13y=0$.

**35.18.** $y^{IV}+2y'''+y''=0$.

**35.19.** $y^{IV}-8y''+16y=0$.

**35.20.** $y^{V}-6y^{IV}+9y'''=0$.

**35.21.** $y^{VI}-2y^{V}+3y^{IV}-4y'''+3y''-2y'+y=0$.

Найти частные решения уравнений по данным начальным условиям:

**35.22.** $y''-5y'+4y=0$; $y(0)=y'(0)=1$.

**35.23.** $y''-2y'+y=0$; $y(2)=1$, $y'(2)=-2$.

**35.24.** $y'''-y'=0$; $y(0)=3$, $y'(0)=-1$, $y''(0)=1$.

**35.25.** Найти интегральную кривую дифференциального уравнения $y''+y=0$, касающуюся в точке $O(0,0)$ прямой $y=x$.

**35.26.** Найти интегральную кривую дифференциального уравнения $y''-4y'+3y=0$, касающуюся в точке $M_0(0,2)$ прямой $x-y+2=0$.

## 36. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

### 36.1. Метод вариации решения неоднородных уравнений

Методом вариации произвольных постоянных решить следующие уравнения:

**36.1.** $y''+3y'+2y=\dfrac{1}{e^x+1}$.

**36.2.** $y''+4y=\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

**36.3.** $y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{\sqrt{4-x^2}}$.

**36.4.** $y''+4y'+4y=e^{-2x}\ln x$.

**36.5.** $y''-3y'+2y=\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1}$.

**36.6.** $y''+4y=\operatorname{tg} 2x$.

**36.7.** $y''-2y'+2y=\dfrac{e^x}{\sin x}$.

**36.8.** $y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{x^3}$.

**36.9.** $y'' - y = \dfrac{e^{2x}}{e^x + 2}$.

**36.10.** $y'' - 2y' + y = e^x \ln(x+3)$.

Найти частные решения уравнений, удовлетворяющие начальным условиям:

**36.11.** $y'' - y = \dfrac{1}{1+e^x}$, $\quad y(0) = 1,\ y'(0) = \ln 2$.

**36.12.** $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{\sqrt{4-x^2}}$, $\quad y(0) = 1,\ y'(0) = 5$.

## 36.2. Неоднородные дифференциальные уравнения со специальной правой частью

Для каждого из данных неоднородных дифференциальных уравнений написать вид его частного решения с неопределенными коэффициентами (числовых значений коэффициентов не находить):

**36.13.** $y'' - 8y' + 16y = (1-x^2)e^{4x}$.

**36.14.** $y'' - 4y' = 2x\cos^2 4x$.

**36.15.** $y^{IV} + 2y'' + y = x\sin x$.

**36.16.** $y'' - 4y' + 13y = e^{2x}(x^2\cos 3x - x\sin 3x)$.

Найти общие решения следующих уравнений:

**36.17.** $y'' - y = (4x-2)e^{-x}$.

**36.18.** $y''' - 3y'' + 3y' - y = 12e^x$.

**36.19.** $y'' - 3y' + 2y = 2xe^x$.

**36.20.** $y'' - 2y' = (x^2+2)e^x$.

**36.21.** $y'' - 4y' + 4y = (6x+4)e^{2x}$.

**36.22.** $y''' - 3y'' = -60x^3 - 12x^2 + 12x$.

**36.23.** $y'' - y = 2x\cos x$.

**36.24.** $y'' + 9y = 10\cos 2x - 5\sin 2x$.

**36.25.** $y'' + y = 5e^{-x}\cos x$.

**36.26.** $y'' + y' = 3\cos 2x - 10x\sin 2x$.

**36.27.** $y'' + 4y = 8\sin 2x$.

**36.28.** $y'' + y = 8x\cos x$.

**36.29.** $y'' - 2y' + 2y = e^x(4\cos x + 2\sin x)$.

**36.30.** $y^{IV} + y'' = 12(x^2 + x)$.

Найти частные решения уравнений, удовлетворяющие начальным условиям:

**36.31.** $y'' - 2y' = 2e^x$; $\quad y(1) = -1,\ y'(1) = 0$.

**36.32.** $y''' - y' = -2x$; $\quad y(0) = 0,\ y'(0) = 2,\ y''(0) = 2$.

**36.33.** $y'' + 4y = x$; $\quad y(0) = 1,\ y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

**36.34.** $y'' + y = 4e^x$; $\quad y(0) = 4,\ y'(0) = -3$.

## 37. Системы дифференциальных уравнений

Найти общее решение систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

**37.1.** $\begin{cases} y'=z, \\ z'=-2y+3z. \end{cases}$ **37.2.** $\begin{cases} y'=4y-z, \\ z'=2y+z. \end{cases}$

**37.3.** $\begin{cases} y'=y-4z, \\ z'=y+5z. \end{cases}$ **37.4.** $\begin{cases} y'=5y-z, \\ z'=y+3z. \end{cases}$

**37.5.** $\begin{cases} y'=2y-5z, \\ z'=5y-6z. \end{cases}$ **37.6.** $\begin{cases} y'=y-5z, \\ z'=y-3z. \end{cases}$

**37.7.** $\begin{cases} y'=y+2z, \\ z'=-2y+z. \end{cases}$ **37.8.** $\begin{cases} x'=x-z, \\ y'=x, \\ z'=x-y. \end{cases}$

Найти частные решения систем дифференциальных уравнений, удовлетворяющие начальным условиям:

**37.9.** $\begin{cases} y'=y+3z, \\ z'=-y+5z, \qquad y(0)=3, \quad z(0)=1. \end{cases}$

**37.10.** $\begin{cases} y'=-y+2z, \\ z'=-2y-5z, \qquad y(0)=0, \quad z(0)=1. \end{cases}$

**37.11.** $\begin{cases} y'=y-3z, \\ z'=3y+z, \qquad y(0)=2, \quad z(0)=1. \end{cases}$

**37.12.** $\begin{cases} x'=y+z, \\ y'=z+x, \\ z'=x+y, \qquad x(0)=2, \quad y(0)=2, \quad z(0)=-1. \end{cases}$

Найти общие решения систем неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

**37.13.** $\begin{cases} y'=y-z, \\ z'=y+z+e^x. \end{cases}$ **37.14.** $\begin{cases} y'=5y-3z+xe^{2x}, \\ z'=3y-z+e^{3x}. \end{cases}$

### Индивидуальное задание

**37.15.** $10x^5y'+y^5=0.$ **37.16.** $xyy'=1-x^2.$

**37.17.** $y'x=\dfrac{y}{\ln^3 x}.$ **37.18.** $3xy'+y^2=1.$

**37.19.** $2^{x-2y}+3^{x-2y}y'=0.$ **37.20.** $y'=\operatorname{tg}2x\cdot\operatorname{tg}2y.$

**37.21.** $y'=\dfrac{y}{x}\cos\ln\dfrac{y}{x}.$ **37.22.** $xy'(\ln y-\ln x)=y.$

**37.23.** $(x^2-1)y'-xy=x^3-x.$ **37.24.** $xy'=2(y-\sqrt{xy}).$

**37.25.** $y'-2xy=x.$ **37.26.** $y'+y=e^{-x}.$

**37.27.** $e^y\,dx+(xe^y-2y)\,dy=0.$ **37.28.** $xy'=x+2y.$

**37.29.** $(2xy^2-y)\,dx+x\,dy=0.$

**37.30.** $y'(x+\sin y)=1.$

**37.31.** $(x^3+\ln y)\,dx+\dfrac{x}{y}\,dy=0.$

**37.32.** $x\,dy+y\,dx=x^5y^2dx.$

**37.33.** $y''=\sin 10x\cdot\sin 15x.$

**37.34.** $y''=\cos\dfrac{x}{2}\cdot\cos\dfrac{x}{3}.$

**37.35.** $x(y''+1)+y'=0.$

**37.36.** $y''=2y'+x.$

**37.37.** $y'''=2(y''-1)\operatorname{ctg}x.$

**37.38.** $2yy''=y'^2.$

**37.39.** $y''y^3=1.$

**37.40.** $9y''+6y'+y=0.$

**37.41.** $y''-6y'+8y=0.$

**37.42.** $y''-4y'+20y=0.$

**37.43.** $y''+4y'+40y=0.$

**37.44.** $y''+4y=\dfrac{1}{\sin 2x}.$

**37.45.** $y''-4y'+5y=\dfrac{e^{2x}}{\cos x}.$

**37.46.** $y''+4y'+4y=2xe^{-2x}.$

**37.47.** $(2x+4y+3)\,dy-(x+2y+1)\,dx=0.$

**37.48.** $(x+y+4)\,dy-(2x+2y+1)\,dx=0.$

**37.49.** $(x^4+6x^2y^2+y^4)\,dx+4xy(x^2+y^2)\,dy=0.$

**37.50.** $2x\cos^2 y\,dx-(1+x^2\sin 2y)\,dy=0.$

**37.51.** $\left(\dfrac{x}{\sin y}+2\right)dx+\dfrac{\cos y}{\cos 2y-1}(x^2+1)\,dy=0.$

**37.52.** $(15x^2y^2-5)\,dx+(10x^3y+12y^3+6)\,dy=0.$

**37.53.** $1+yy''+y'^2=0,\qquad y(1)=1,\ y'(1)=0.$

**37.54.** $(y''x-y')y'=x^3,\qquad y(1)=1,\ y'(1)=0.$

**37.55.** $y''-4y=0,\qquad y(0)=0,\ y'(0)=8.$

**37.56.** $(1+yy')y''=(1+y'^2)y',\qquad y(0)=1,\ y'(0)=1.$

**37.57.** $y''+2y'=0,\qquad y(0)=0,\ y'(0)=4.$

**37.58.** $y''-2y'+y=(6x^2+8)e^x.$

**37.59.** $y''-2y'+5y=e^x(x\cos 2x-x^2\sin 2x).$

**37.60.** $y''+y=(3x-2)\sin 2x+(x^2+x+2)\cos 2x.$

**37.61.** $\begin{cases} y'=y-9z,\\ z'=y+z.\end{cases}$

**37.62.** $\begin{cases} y'=y+z,\\ z'=-2y+3z.\end{cases}$

## 38. Числовые ряды с положительными членами

Показать, что следующие ряды сходятся, и найти их суммы:

**38.1.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$

**38.2.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}.$

Используя необходимый признак сходимости ряда, установить расходимость данных рядов:

**38.3.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+5}{\sqrt{n^2+2n}}.$

**38.4.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+3n+1}{n^2+4}.$

**38.5.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2+1}$.

**38.6.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\ln(n+2)}$.

Используя признак сравнения или предельный признак сравнения, исследовать на сходимость данные ряды:

**38.7.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n-2}$.

**38.8.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$.

**38.9.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n^2+2}$.

**38.10.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$.

**38.11.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin^2\frac{\pi}{n}$.

**38.12.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln\Big(1+\frac{1}{n}\Big)$.

Пользуясь признаком Даламбера, исследовать на сходимость данные ряды:

**38.13.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+5}{2^n}$.

**38.14.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$.

**38.15.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)2^n}{3^{n+1}}$.

**38.16.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{50}}{2^n}$.

**38.17.** $\displaystyle\frac{3}{1}+\frac{3\cdot5}{1\cdot4}+\ldots+\frac{3\cdot5\ldots(2n+1)}{1\cdot4\ldots(3n-2)}+\ldots$.

**38.18.** $\displaystyle 1+\frac{1\cdot11}{3!}+\frac{1\cdot11\cdot21}{5!}+\ldots+\frac{1\cdot11\cdot21\ldots(10n-9)}{(2n-1)!}+\ldots$.

Используя признак Коши, исследовать на сходимость данные ряды:

**38.19.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n$.

**38.20.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

**38.21.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n^2+1}{3n^2+4}\right)^{2n}$.

**38.22.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(2n+1)^{n-1}}$.

Используя интегральный признак Коши, исследовать на сходимость данные ряды:

**38.23.** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$.

**38.24.** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$.

**38.25.** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$.

**38.26.** $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^2}$.

Исследовать на сходимость данные ряды:

**38.27.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$.

**38.28.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$.

**38.29.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+1)^{2n}}{(2n-1)^{2n-1}}$.

**38.30.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

**38.31.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

**38.32.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{2n^2}$.

**38.33.** $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\ln n \ln\ln n}$.

**38.34.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^n\cdot n!}{n^n}$.

**38.35.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(3n+1)(2\sqrt{n}-1)}$.

**38.36.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+2}\right)^{n}$.

**38.37.** $\frac{1}{2}+\frac{1\cdot 5}{6!!}+\frac{1\cdot 5\cdot 9}{10!!}+\ldots+\frac{1\cdot 5\cdot 9\ldots(4n-3)}{(4n-2)!!}+\ldots$.

**38.38.** $2+\frac{2\cdot 5}{1\cdot 5}+\frac{2\cdot 5\cdot 8}{1\cdot 5\cdot 9}+\ldots+\frac{2\cdot 5\cdot 8\ldots(3n-1)}{1\cdot 5\cdot 9\ldots(4n-3)}+\ldots$.

**38.39.** $\frac{1}{100}+\frac{1\cdot 4}{100\cdot 102}+\frac{1\cdot 4\cdot 7}{100\cdot 102\cdot 104}+\ldots$

$$\ldots+\frac{1\cdot 4\cdot 7\ldots(3n-2)}{100\cdot 102\cdot 104\ldots(2n+98)}+\ldots.$$

### 39. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница

Исследовать на абсолютную и условную сходимость данные ряды:

**39.1.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3n+1}$.

**39.2.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$.

**39.3.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{5n-2}$.

**39.4.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{\sqrt{n^3+4n+1}}$.

**39.5.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^n$.

**39.6.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n+3}{n+1}\right)^n$.

**39.7.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$.

**39.8.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt{\ln n}}$.

**39.9.** $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n\sqrt{\ln\ln n}}$.

**39.10.** $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n(\ln\ln n)^3}$.

**39.11.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 4\cdot 7\ldots(3n-2)}{3\cdot 5\cdot 7\ldots(2n+1)}$.

**39.12.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n\, n!}{(2n-1)!!}$.

Убедиться в том, что к рядам $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ с указанными ниже членами ($k \in \mathbb{N}$) нельзя применить признак Лейбница. Исследовать эти ряды на сходимость другими способами:

**39.13.** $u_{2k-1} = \dfrac{1}{\sqrt{k+1}+1}, \quad u_{2k} = -\dfrac{1}{\sqrt{k+1}-1}$.

**39.14.** $u_{2k-1} = \dfrac{1}{3k+2}, \quad u_{2k} = -\dfrac{1}{3k-1}$.

**39.15.** $u_{2k-1} = \dfrac{1}{3^k}, \quad u_{2k} = -\dfrac{1}{2^k}$.

## 40. Функциональные ряды

Найти области сходимости рядов ($x \in \mathbb{R}$). Исследовать ряды на абсолютную сходимость.

**40.1.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{-x}$.

**40.2.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n\sqrt{n}}$.

**40.3.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n!(x+3)^n}$.

**40.4.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^x$.

**40.5.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 x}$.

**40.6.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln^n x}{n}$.

Найти области абсолютной сходимости указанных рядов:

**40.7.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(x-2)^n}$.

**40.8.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(x+1)^n}$.

**40.9.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n2^n}{(x-3)^{2n}}$.

**40.10.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{nx}$.

**40.11.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{x-2}{1-2x}\right)^n$.

**40.12.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^n$.

Найти область сходимости и область равномерной сходимости указанных рядов:

**40.13.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n(x+2)^n}$.

**40.14.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(x+1)^n}$.

**40.15.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{(x-1)^n}{n^2}$.

**40.16.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2(x+1)^n}$.

**40.17.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{nx}}{n^2}$. **40.18.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$.

## 41. Степенные ряды

Исследовать ряды на абсолютную и равномерную сходимость:

**41.1.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n\cdot n^2}$. **41.2.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n\cdot 2^n\sqrt{2n+1}}$.

**41.3.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x+2)^{2n}}{n}$. **41.4.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{n+1}(x-4)^n}{n\sqrt{\ln n}}$.

**41.5.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-3)^{2n}}{(2n+1)3^n}$. **41.6.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{nx^n}{3n-2}$.

**41.7.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{4n-1}\right)^{2n+1}2^n(x-1)^n$. **41.8.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)x^n}{n!}$.

**41.9.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(3n+1)(x-1)^n$. **41.10.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^{2n+1}}{3^n(2n+1)}$.

**41.11.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-3)^n}{(2n+1)4^n}$. **41.12.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{x^{3n-1}}{8^{n+1}n\ln^3 n}$.

**41.13.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n2^n\ln n}$. **41.14.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^{2n+1}(x-1)^n$.

**41.15.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n(x-3)^{2n-1}}{n(n+1)}$. **41.16.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n\sqrt{n}}$.

**41.17.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(x-3)^{2n}}{n2^n\ln^2 n}$. **41.18.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n^2}}{n!2^n}$.

**41.19.** Пусть степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n$ сходится на интервале $|x-a|<R$, $R>0$, и $f(x)$ — сумма этого ряда. Показать, что значения производных $f^{(n)}(x)$ в точке $a$ можно выразить через коэффициенты ряда по формулам

$$f^{(n)}(a)=n!a_n, \qquad n=0,1,\ldots$$

## 42. Разложение функций в ряд Тейлора и Маклорена

Написать первые три ненулевых члена разложения в ряд по степеням $x$ следующих функций:

**42.1.** $f(x)=\operatorname{tg} x$

**42.2.** $f(x)=\dfrac{1}{\cos x}$.

**42.3.** $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

**42.4.** $f(x)=e^x\cos x$.

Используя разложения основных элементарных функций, а также возможность почленного дифференцирования и интегрирования степенных рядов, разложить функции в ряд Маклорена по степеням $x$ и указать области сходимости полученных рядов:

**42.5.** $f(x)=\sin^2 x$.

**42.6.** $f(x)=\dfrac{x}{4+x^2}$.

**42.7.** $f(x)=\dfrac{5}{x+2}$.

**42.8.** $f(x)=\dfrac{2}{(x-1)^2}$.

**42.9.** $f(x)=\dfrac{3x+1}{(x-2)^2}$.

**42.10.** $f(x)=\dfrac{x}{3+4x}$.

**42.11.** $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{9+x^2}}$.

**42.12.** $f(x)=\sqrt{2-x}$.

**42.13.** $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2-5x+6}$.

**42.14.** $f(x)=\dfrac{3}{1+x-2x^2}$.

**42.15.** $f(x)=(1-x)e^{-2x}$.

**42.16.** $f(x)=\sin 2x\cos 2x$.

**42.17.** $f(x)=\ln\dfrac{x+2}{x+3}$.

**42.18.** $f(x)=\ln(x^2+3x+2)$.

**42.19.** $f(x)=\operatorname{arctg} x$.

**42.20.** $f(x)=\arcsin x$.

**42.21.** $f(x)=\displaystyle\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$.

**42.22.** $f(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t^2}{t}\,dt$.

Разложить функции по степеням $(x-a)$:

**42.23.** $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$, $\quad a=2$.

**42.24.** $f(x)=\dfrac{1}{x^2-6x+5}$, $\quad a=3$.

**42.25.** $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$, $\quad a=-4$.

**42.26.** $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2+x}}$, $\quad a=2$.

**42.27.** $f(x)=\ln(5x+3)$, $\quad a=1$.

**42.28.** $f(x)=\ln(x^2+6x+13)$, $\quad a=-3$.

Найти области сходимости указанных рядов и их суммы:

**42.29.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n$. **42.30.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(x+1)^n$.

**42.31.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^{-2n-2}x^{2n}$. **42.32.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x-3)^n}{n+1}$.

**42.33.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^{2n}$. **42.34.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(n+1)x^n}{n!}$.

## 43. Применение степенных рядов

**43.1.** Определить, сколько нужно взять членов в разложении функции $\ln(1+x)$, чтобы вычислить $\ln 2$ с точностью до 0,0001.

**43.2.** Определить, сколько нужно взять членов ряда в разложении функции $\cos x$, чтобы вычислить $\cos 10^\circ$ с точностью до 0,0001.

Разложить указанные функции в степенные ряды по степеням $x$:

**43.3.** $\int\limits_0^x \dfrac{\ln(1+t^2)}{t}\,dt$. **43.4.** $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\int\limits_0^x \dfrac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt$.

**43.5.** $\int\limits_0^x \cos t^2\,dt$. **43.6.** $\int\limits_0^x \dfrac{1}{\sqrt{1+t^3}}\,dt$.

Вычислить интегралы с точностью до 0,0001:

**43.7.** $\int\limits_0^{0,3} \dfrac{\ln(1+t)}{t}\,dt$. **43.8.** $\int\limits_0^{0,2} \dfrac{\operatorname{arctg} t}{t}\,dt$.

Доказать указанные тождества:

**43.9.** $\sum\limits_{k=n}^{\infty}\dfrac{1}{(\alpha+k)(\alpha+k+1)}=\dfrac{1}{\alpha+n}$.

**43.10.** $\sum\limits_{k=n}^{\infty}\dfrac{1}{(\alpha+k)(\alpha+k+1)(\alpha+k+2)}=\dfrac{1}{2(\alpha+n)(\alpha+n+1)}$.

**43.11.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}=\ln 2$. **43.12.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{2n+1}=\dfrac{\pi}{4}$.

Найти суммы рядов, не вычисляя частичных сумм:

**43.13.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n n}$. **43.14.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}$.

**43.15.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)3^{2n+1}}$.

**43.16.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}$.

**43.17.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3^n(2n)!}$.

**43.18.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$.

Найти решения уравнений, удовлетворяющие заданным начальным условиям:

**43.19.** $y'' = x^2 y, \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

**43.20.** $y'' = x^2 y, \qquad y(0) = y'(0) = 1.$

Найти первые 5 членов разложения решения дифференциального уравнения в степенной ряд:

**43.21.** $y' = 2\cos x - xy^2, \qquad y(0) = 1.$

**43.22.** $y'' = -2xy, \qquad y(0) = y'(0) = 1.$

Используя степенные ряды, проинтегрировать следующие дифференциальные уравнения:

**43.23.** $y'' + xy' + y = 1, \qquad y(0) = y'(0) = 0.$

**43.24.** $y'' - xy' + y = x, \qquad y(0) = y'(0) = 0.$

## Ответы

### 1. Элементарные функции и их графики

**1.2.** $D=[-2,2]$. **1.3.** $D=[0,1]$. **1.4.** $D=(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$. **1.5.** $D=(-1,0)\cup(0,7)$. **1.6.** $D=[0,1]$. **1.7.** $D=(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$. **1.8.** $y=\sqrt{u}$, $u=\sin v$, $v=x^2$. **1.9.** $y=u^2$, $u=\sin v$, $v=\ln x$. **1.10.** $y=\ln u$, $u=\cos v$, $v=\sqrt[3]{t}$, $t=\sin x$. **1.11.** $y=2^u$, $u=\operatorname{arctg} v$, $v=\ln t$, $t=\sin x$. **1.12.** График функции $y=x^2$ растянуть вдоль оси Oy в 2 раза и поднять вдоль этой же оси вверх на 1. **1.13.** График функции $y=x^2$ сместить вправо по оси Ox на 1 и вниз по оси Oy на 1.

**1.17.** $y=\begin{cases} -2x, & x\in(-\infty,-2),\\ 4, & x\in[-2,2],\\ 2x, & x\in(2,+\infty).\end{cases}$

**1.18.** $y=\begin{cases} (x+1)^2-4, & x\in(-\infty,-2)\cup(0,+\infty),\\ -(x+1)^2-2, & x\in[-2,0].\end{cases}$

**1.20.** $y=\begin{cases} \dots \\ -1, & x\in[-1,0),\\ 0, & x\in[0,1),\\ 1, & x\in[1,2),\\ \dots\end{cases}$

**1.21.** Прямая $y=x-n$ при $x\in[n,n+1)$, $n\in\mathbb{Z}$.

**1.22.** $y=\begin{cases} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+1}+2, & x\in(-\infty,-1),\\ 2^{x+1}+2, & x\in[-1,+\infty].\end{cases}$

### 2. Предел числовой последовательности

**2.1.** $0,\dfrac{3}{2},\dfrac{2}{3},\dfrac{5}{4},\dfrac{4}{5},\dots$. **2.2.** $-8,11,\dfrac{14}{3},\dfrac{17}{5},\dfrac{20}{7},\dots$. **2.3.** $u_n=\dfrac{2n}{2n-1}$. **2.4.** $u_n=n\cos\dfrac{\pi(n-1)}{2}$. **2.7.** Наименьший член $u_2=-22$. **2.8.** Наибольший член $u_3=\sqrt[3]{3}$. **2.9.** $a=1$, $N=10$. **2.10.** $a=\dfrac{5}{7}$, $N=10$. **2.11.** $-\dfrac{5}{2}$. **2.12.** 2. **2.13.** 0. **2.14.** 0. **2.15.** 0. **2.16.** 2. **2.17.** $\dfrac{1}{2}$. **2.18.** $\dfrac{1}{3}$. **2.19.** $-3$. **2.20.** 2. **2.21.** $-1$. **2.22.** 25. **2.23.** $\dfrac{49}{5}$. **2.24.** $-15$. **2.25.** $\dfrac{1}{2}$. **2.26.** $\dfrac{3}{4}$. **2.27.** $\dfrac{1}{3}$

$\left(\text{Использовать тождество } \sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$. **2.28.** 1. **2.29.** $\dfrac{1}{2}$. **2.30.** $\dfrac{1}{6}$. **2.31.** 1.

### 3. Предел функции

**3.1.** $\forall M>0\ \exists\delta>0\colon \forall x\colon 0<|x|<\delta \Rightarrow |f(x)|>M$. **3.2.** $\forall M>0\ \exists\delta>0\colon \forall x\colon -\delta<x-1<0 \Rightarrow f(x)<-M$. **3.3.** $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\colon \forall x\colon 0<x-a<\delta \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon$. **3.4.** $\forall M>0\ \exists N>0\colon \forall x\colon x>N \Rightarrow f(x)>M$. **3.5.** $\forall\varepsilon>0\ \exists N>0\colon \forall x\colon x<-N \Rightarrow |f(x)-1|<\varepsilon$. **3.6.** $\forall M>0\ \exists N>0\colon \forall x\colon x<-N \Rightarrow f(x)>M$. **3.7.** $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\colon \forall x\colon 0<x-3<\delta \Rightarrow |f(x)-2|<\varepsilon$. **3.8.** $\forall M>0\ \exists N>0\colon \forall x\colon |x|>N \Rightarrow f(x)<-M$. **3.9.** $\dfrac{3}{2}$. **3.10.** 2. **3.11.** $-3$. **3.12.** $\dfrac{1}{2}$. **3.13.** $\infty$. **3.14.** $\infty$. **3.15.** 0. **3.16.** 0. **3.17.** 2. **3.18.** $-2$. **3.19.** $\dfrac{1}{2}$. **3.20.** $-\dfrac{2}{3}$. **3.21.** $\dfrac{1}{4}$. **3.22.** 2. **3.23.** $\sqrt{3}$. **3.24.** $-\dfrac{1}{2}$. **3.25.** $\dfrac{4}{3}$. **3.26.** 0. **3.27.** $\infty$. **3.28.** $\dfrac{1}{6}$. **3.29.** $-\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **3.30.** $\dfrac{3}{2}$. **3.31.** $\dfrac{3}{4}$. **3.32.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **3.33.** $\dfrac{3\sqrt[6]{2}}{2}$. **3.34.** $\dfrac{1}{2}$. **3.35.** $-\dfrac{7}{4}$. **3.36.** $\dfrac{3}{5}$. **3.37.** 3. **3.38.** $\dfrac{10}{3}$. **3.39.** $\dfrac{9}{2}$. **3.40.** $-\dfrac{7}{3}$. **3.41.** 8. **3.42.** $-4$. **3.43.** 0. **3.44.** $-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. **3.45.** 1. **3.46.** $e^{10}$. **3.47.** $e^9$. **3.48.** $e$. **3.49.** $e^{-3}$. **3.50.** $e^{-\frac{1}{2}}$. **3.51.** $e^3$. **3.52.** 2. **3.53.** $-3$. **3.54.** $\dfrac{1}{6}$. **3.55.** $-\dfrac{1}{2}$. **3.57.** Сделать замену $a^x-1=y$. **3.58.** $a\ln a$. **3.59.** $a-b$. **3.60.** 1, $-1$. **3.61.** $-\infty$, $+\infty$. **3.62.** 0, $+\infty$. **3.63.** $\dfrac{\pi}{2}$, $-\dfrac{\pi}{2}$. **3.64.** 1, $-1$. **3.65.** $+\infty$, 0.

### 4. Непрерывность функции. Точки разрыва и их классификация

**4.5.** $a=2$. **4.6.** $b=\dfrac{\pi a}{2}$. **4.7.** $x=2$ — точка разрыва первого рода. **4.8.** $x=0$ — точка устранимого разрыва, $f(0)=1$. **4.9.** $x=2$ — точка разрыва второго рода. **4.10.** $x_1=2$, $x_2=-2$ — точки разрыва второго рода. **4.11.** $x=0$ — точка разрыва первого рода. **4.12.** $x=0$ — точка устранимого разрыва, $x=\pm1$ — точки разрыва второго рода. **4.13.** $x=2$ — точка разрыва первого рода. **4.14.** $x=1$ — точка разрыва первого рода, $x=0$ — точка разрыва второго рода. **4.15.** $x=1$ — точка разрыва первого рода. **4.16.** $x=2,5$ — точка разрыва первого рода. **4.17.** $x=\pm1$ — точки разрыва первого рода, $f(x)=0$ при $|x|>1$, $f(x)=1$ при $|x|<1$, $f(1)=\dfrac{1}{2}$, $f(-1)$ не существует.

## 5. Производная

**5.1.** $y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$. **5.2.** $y' = -\dfrac{2}{x^3}$. **5.3.** $y' = 2^x \ln 2$. **5.4.** $y' = \dfrac{1}{x\ln 2}$. **5.5.** $f'_-(1) = 1$, $f'_+(1) = 0$. **5.6.** $f'_-(0) = f'_+(0) = 0$. **5.7.** $y' = 4x^3 - x^2 + 2 + \dfrac{1}{x^2}$. **5.8.** $y' = -\dfrac{3}{5\sqrt[5]{x^8}} + \dfrac{2}{15\sqrt[3]{x}}$. **5.9.** $y' = \dfrac{3x^2-8x-4}{(3x-4)^2}$. **5.10.** $y' = \dfrac{2}{1+\sin 2x}$. **5.11.** $y' = -\dfrac{\sin\left(2\sin\sqrt{x}\right)\cdot\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$. **5.12.** $y' = \dfrac{1}{2(1+x^2)}$. **5.13.** $y' = x\ln^2 x(2\ln x + 3)$. **5.14.** $y' = -e^{-x^2}\dfrac{1+2x^2}{2x^2}$. **5.15.** $y' = 3\cdot 2^{\sqrt{\sin^3 x}-1}\sqrt{\sin x}\cos x\ln 2$. **5.16.** $y' = \dfrac{e^{\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)$. **5.17.** $y' = \dfrac{x}{(2+x^2)}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}\operatorname{arctg}\sqrt{1+x^2}}$. **5.18.** $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. **5.19.** $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sin^2 x}}}\cdot\left(1+\dfrac{1+\sin 2x}{2\sqrt{x+\sin^2 x}}\right)$. **5.20.** $y' = \dfrac{1}{4\sqrt{1+\sqrt{x^2+\sqrt{\ln x}}}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x^2+\sqrt{\ln x}}}\cdot\left(2x+\dfrac{1}{2x\sqrt{\ln x}}\right)$. **5.21.** $y' = \dfrac{(x-3)^3(2x-1)(x+2)^4}{x^5(3x-1)^2(x+5)^4}\cdot\left(\dfrac{3}{x-3}+\dfrac{2}{2x-1}+\dfrac{4}{x+2}-\dfrac{5}{x}-\dfrac{6}{3x-1}-\dfrac{4}{x+5}\right)$. **5.22.** $y' = \sqrt[3]{\dfrac{(x+2)(x-1^2)}{x^4(x+1)^5}}\cdot\left(\dfrac{1}{3(x+2)}+\dfrac{2}{3(x-1)}-\dfrac{4}{3x}-\dfrac{5}{3(x+1)}\right)$. **5.23.** $y' = \dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{(x-1)^2(2x+1)}}\cdot\left(\dfrac{1}{2(x+1)}-\dfrac{2}{3(x-1)}-\dfrac{2}{3(2x+1)}\right)$. **5.24.** $y' = x^3\sqrt{\dfrac{x-1}{(x+2)\sqrt{x-2}}}\cdot\left(\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{2(x-1)}-\dfrac{1}{2(x+2)}-\dfrac{1}{4(x-2)}\right)$. **5.25.** $y' = x^x(\ln x + 1)$. **5.26.** $y' = x^{\sin x}\cdot\left(\cos x\ln x+\dfrac{\sin x}{x}\right)$. **5.27.** $y' = (\ln x)^{\frac{1}{x}}\cdot\left(\dfrac{1}{x^2\ln x}-\dfrac{\ln\ln x}{x^2}\right)$. **5.28.** $y' = (\sin x)^{\arcsin x}\cdot\left(\dfrac{\ln\sin x}{\sqrt{1-x^2}}+\arcsin x\cdot\operatorname{ctg} x\right)$. **5.29.** $y' = x^{x^x}x^x\ln x\cdot\left(\ln x+1+\dfrac{1}{x\ln x}\right)$. **5.30.** $y' = \dfrac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}\cdot\left(\ln\ln x+\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{2\ln x}{x}\right)$. **5.31.** $y' = -\sin\left(x^{\sin x}\right)\cdot x^{\sin x}\cdot\left(\cos x\ln x+\dfrac{\sin x}{x}\right)$. **5.32.** $y' =$

$x^{x^2+1}(2\ln x+1)+x^{2^x}2^x\left(\ln 2\ln x+\dfrac{1}{x}\right)+2^{x^x}x^x\ln 2(\ln x+1)$. **5.33.** $y'=\dfrac{1}{x}$ при $x\neq 0$. **5.34.** $y'=\dfrac{1}{1+x^2}$ при $x>0$; $y'=-\dfrac{1}{1+x^2}$ при $x<0$; $y'_-(0)=-1$, $y'_+(0)=1$. **5.35.** $f'(x_0)=\varphi(x_0)$. **5.36.** $y'=\psi(x)^{\varphi(x)}\cdot\left(\varphi'(x)\ln\psi(x)+\dfrac{\varphi(x)\psi'(x)}{\psi(x)}\right)$. **5.37.** $y'=\dfrac{1}{\ln^2\varphi(x)}\cdot\left(\dfrac{\psi'(x)\ln\varphi(x)}{\psi(x)}-\dfrac{\varphi'(x)\ln\psi(x)}{\varphi(x)}\right)$. **5.38.** $y'=e^{f(x)}\big(f'(e^x)e^x+f(e^x)f'(x)\big)$. **5.39.** $y'=f'(f(x))f'(x)$. **5.40.** $y'=\dfrac{2xy-4x^3}{4y^3-x^2}$. **5.41.** $y'=\dfrac{x^2y-2x^3y^2-y^3}{2x^2y^3-xy^2+x^3}$. **5.42.** $y'=\dfrac{4(x+y)(1+xy)\sqrt{xy}-y}{x}$. **5.43.** $y'=\dfrac{y+2xy\sqrt{xy}}{x-2x^2\sqrt{xy}}$. **5.44.** $y'=\sqrt{\dfrac{1-y^2}{1-x^2}}\cdot\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-y^2}}$. **5.45.** $y'=\dfrac{x+y}{x-y}$. **5.46.** $y'=\dfrac{y}{x}\cdot\dfrac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}$. **5.47.** $y'=\dfrac{y}{x}\cdot\dfrac{x\ln y-y}{y\ln x-x}$. **5.48.** $y'=\dfrac{y}{x}$. **5.49.** $y'=\dfrac{y(x\ln x\ln y-y)}{x\ln x(y\ln\ln x-x)}$. **5.51.** $y'_x=3t-\dfrac{5}{2}$. **5.52.** $y'_x=-\dfrac{2t}{t+1}$. **5.53.** $y'_x=-2^{3t+1}$. **5.54.** $y'_x=-\dfrac{b}{a}\operatorname{ctg}\varphi$. **5.55.** $y'_x=2\cos^2 t\cdot(\cos 2t-2\sin 2t)$. **5.56.** $y'_x=1$. **5.57.** $y'_x=\dfrac{t}{2}$. **5.58.** $y'_x=-\dfrac{\sqrt{2-t^2}}{\sqrt{1-4t^2}}$. **5.59.** $y'_x(1)=1$. **5.60.** $y'_x\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-1$.

### 6. Дифференциал функции

**6.1.** $\triangle y=0,120601$; $dy=0,12$. **6.2.** $\triangle y=-0,0513167$; $dy=-0,05$. **6.3.** 1 см. **6.4.** 2 см. **6.5.** $dy=2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$. **6.6.** $dy=x\sin x\,dx$. **6.7.** $dy=\operatorname{arctg}x\,dx$. **6.8.** $dy=\ln x\,dx$. **6.9.** $dy=\arcsin x\,dx$. **6.10.** $dy=\dfrac{2x\,dx}{1+5y^2}$. **6.11.** $dy=\dfrac{x+y}{x-y}\,dx$. **6.12.** $dy=\dfrac{dx}{e^y-1}$. **6.13.** 0,05. **6.14.** 0,805. **6.15.** 0,2. **6.16.** 0,95.

### 7. Производные и дифференциалы высших порядков

**7.1.** $y''=-2\cos 2x$. **7.2.** $y''=\dfrac{2-6x^4}{(1+x^4)^2}$. **7.3.** $y''=-\dfrac{2}{3\ln 2}\cdot\dfrac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$. **7.4.** $y''=\dfrac{3x}{(1-x^2)^2}+\dfrac{(1+2x^2)\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}$. **7.5.** $y''=x^{\sqrt{x}-1}(2+\ln x)\cdot$

$\left(\frac{1}{4}\ln x+\frac{1}{2}-\frac{1}{4\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x}(2+\ln x)}\right)$. **7.6.** $y''=x^{\sin x}\cdot\left[\left(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)^2-\right.$ $\left.-\sin x\ln x+\frac{2\cos x}{x}-\frac{\sin x}{x^2}\right]$. **7.7.** $y'''(0)=9$. **7.8.** $y'''(2)=2$. **7.9.** $y^{IV}(1)=6$. **7.10.** $y^{(n)}=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$. **7.11.** $y^{(n)}=(-1)^{n-1}\cdot\frac{(n-1)!}{x^n}$. **7.12.** $y^{(n)}=\frac{2n!}{(1-x)^{n+1}}$. **7.13.** $y^{(n)}=(-1)^n n!\cdot\left(\frac{1}{(x-2)^{n+1}}-\frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right)$. **7.14.** $y^{(n)}=(-1)^n n!\cdot\left(\frac{5}{(x-3)^{n+1}}-\frac{3}{(x-1)^{n+1}}\right)$. **7.15.** $y^{(n)}=$ $\frac{(-1)^{n+1}(2n-3)!!}{2^n}\cdot\frac{(x+2-2n)}{(x+1)^{\frac{2n+1}{2}}}$. **7.16.** $y^{(15)}=(209-x-x^2)\cos x-$ $15(2x+1)\sin x$. **7.17.** $y^{(5)}=4\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)e^{-x}$. **7.18.** $y^{(10)}=\frac{8!\log_2 e}{x^9}$. **7.21.** $y''=-\frac{p^2}{y^3}$. **7.22.** $y''=e^{2y}\cdot\frac{2-xe^y}{(1-xe^y)^3}$. **7.23.** $y''=-\frac{2(1+y^2)}{y^5}$. **7.24.** $y''=\frac{y\big((1+y)^2+(x-1)^2\big)}{x^2(1+y)^3}$. **7.25.** $y''_{xx}=\frac{\sin t-\cos t-1}{(1+\cos t)^3}$. **7.26.** $y''_{xx}=$ $-\operatorname{ctg}^3 t$. **7.27.** $y''_{xx}=-\frac{2}{1-t^2}$. **7.28.** $y''_{xx}=2(1+t^2)$. **7.29.** $y''_{xx}=\frac{1}{3a\cos^4 t\sin t}$. **7.30.** $d^2y=-ab^2\sin(bx+c)\,dx^2$. **7.31.** $d^2y=3^{-x^2}\ln 9(2x^2\ln 3-1)\,dx^2$. **7.32.** $d^2y=\frac{(2-x^2)\sin x-2x\cos x}{x^3}\,dx^2$. **7.33.** $d^2y=a\,dx^2$. **7.34.** $d^2y=$ $\frac{2y(x+y)}{(x+2y)^3}\,dx^2$. **7.35.** $d^2y=-\frac{R^2dx^2}{(y-b)^3}$. **7.36.** $d^2y=6\frac{x(1+3y^2)\,dx^2}{(1-3y^2)^3}$. **7.37.** $d^2y=\frac{(x-y)\,dx^2}{(1-a\cos y)^3}$.

## 8. Теоремы о дифференцируемых функциях. Формула Тейлора. Геометрические приложения производной

**8.1.** $f(x)$ не дифференцируема при $x=0\in[-1,1]$. **8.2.** $f(x)$ разрывна при $x=0\in[-1,1]$. **8.7.** $2-(x-2)+(x-2)^2-(x-2)^3+\frac{(x-2)^4}{(1+\theta(x-2))^5}$. **8.8.** $x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{4!}\cdot\frac{9\theta x+6\theta^3x^3}{(1-\theta^2x^2)^{\frac{7}{2}}}$. **8.9.** $1-\frac{(x-1)}{2}+\frac{3}{8}(x-1)^2-\frac{5}{16}(x-1)^3+$ $\frac{35}{128}\frac{(x-1)^4}{(1+\theta(x-1))^{\frac{9}{2}}}$. **8.10.** $x-y-1=0$, $x+y-1=0$. **8.11.** $2x-y+3=0$,

$x+2y-1=0$. **8.12.** $7x-10y+6=0$, $10x+7y-34=0$. **8.13.** $5x+6y-13=0$, $6x-5y+21=0$. **8.15.** $\operatorname{arctg}\dfrac{8}{15}$. **8.18.** $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

### 9. Правило Лопиталя вычисления пределов

**9.1.** $\dfrac{2}{3}$. **9.2.** 2. **9.3.** $\dfrac{2}{3}$. **9.4.** $-\dfrac{1}{2}$. **9.5.** 2. **9.6.** $\dfrac{9}{50}$. **9.7.** $\dfrac{1}{2}$. **9.8.** $\dfrac{1}{2}$. **9.9.** $\dfrac{1}{2}$. **9.10.** $-\infty$. **9.11.** $\cos 3$. **9.12.** $-2$. **9.13.** 0. **9.14.** $+\infty$. **9.15.** $\dfrac{1}{\pi}$. **9.16.** 0. **9.17.** $-1$. **9.18.** 0. **9.19.** $-1$. **9.20.** $\dfrac{2}{3}$. **9.21.** 1. **9.22.** 1. **9.23.** $e$. **9.24.** 1. **9.25.** 2. **9.26.** $\dfrac{1}{e}$. **9.27.** $\dfrac{1}{e}$. **9.28.** 1. **9.29.** $e^{-6}$. **9.30.** $e^2$.

### 10. Исследование функций

**10.1.** На $(-\infty,-1)\cup(0,1)$ возрастает, на $(-1,0)\cup(1,+\infty)$ убывает; $y_{max}=y(-1)=y(1)=1$. **10.2.** На $(0,1)\cup(1,e)$ убывает, на $(e,+\infty)$ возрастает; $y_{min}=y(e)=e$. **10.3.** Возрастает на всей области определения. **10.4.** На $\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$ убывает, на $\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)$ возрастает; $y_{min}=y\left(\dfrac{1}{e}\right)=\left(\dfrac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}\approx 0,69$. **10.5.** График всюду выпуклый вниз. **10.6.** На $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ — выпуклость вниз, на $(-1,1)$ — выпуклость вверх; $M_1\big(-1,\sqrt[3]{2}\big)$ и $M_2\big(1,\sqrt[3]{2}\big)$ — точки перегиба. **10.7.** На $(-\infty,-1)$ — выпуклость вверх, на $(-1,+\infty)$ — выпуклость вниз; $M(-1,1-e^{-2})$ — точка перегиба. **10.8.** На $\left(0,e^{-\frac{5}{6}}\right)$ — выпуклость вверх, на $\left(e^{-\frac{5}{6}},+\infty\right)$ — выпуклость вниз; $M\left(e^{-\frac{5}{6}},1-\dfrac{5}{6}e^{-\frac{5}{6}}\right)$ — точка перегиба. **10.9.** $M=0$, $m=-\dfrac{22}{3}$. **10.10.** $M=3$, $m=-24$. **10.11.** $M=8$, $m=0$. **10.12.** $M=1$, $m=\dfrac{1}{3}$. **10.13.** $x=1$ — вертикальная; $y=2x+2$ — наклонная. **10.14.** $x=2$ — вертикальная; $y=0$ (правая) и $y=-\dfrac{1}{e^2}$ (левая) горизонтальные. **10.15.** $x=0$ — вертикальная; $y=1$ (правая) и $y=-1$ (левая) — горизонтальные. **10.16.** $y=3x+\dfrac{\pi}{2}$ (правая) и $y=3x-\dfrac{\pi}{2}$ (левая) — наклонные. **10.17.** $x=0$ — вертикальная; $y=1$ (правая) и $y=0$ (левая) — горизонтальные. **10.18.** $x=0$ — вертикальная; $y=x$ (правая) и $y=-x$ (левая) — наклонные. **10.19.** $y_{min}=y(3)=\dfrac{27}{8}$; $(0,0)$ — точка перегиба; $x=1$ и $y=\dfrac{x+2}{2}$ асимптоты. **10.20.** $y_{min}=y(0)=0$, $y_{min}=y(\pm\sqrt{2})=2$; $x=\pm 1$ — вертикальные асимптоты, $y=x$ — правая асимптота, $y=-x$ — левая асимптота.

**10.21.** $y_{max}=y(-2)=-4\sqrt{e}$, $y_{min}=y(1)=-\dfrac{1}{e}$; $(0,4;-1,6e^{-\frac{5}{2}})$ — точка перегиба; $x=0$ — левая асимптота, $y=x-3$ — асимптота. **10.22.** $y_{max}=y(0)=0$, $y_{min}=y(\pm\sqrt{e})=2e$; $x=\pm1$ — асимптоты. **10.23.** $f(x_0)=0$ — минимум, если $\varphi(x_0)>0$ и $n$ четное; $f(x_0)=0$ — максимум, если $\varphi(x_0)<0$ и $n$ четное; экстремума нет, если $n$ нечетное. **10.24.** $N(1,1)$. **10.27.** $x_0(y-y_0)+y_0(x-x_0)=0$.

## 11. Непосредственное интегрирование. Метод замены переменной

**11.1.** $\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}-\dfrac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+C$. **11.2.** $-\dfrac{3}{x}-2\ln|x|+C$. **11.3.** $\ln\left|\dfrac{x+\sqrt{x^2+3}}{x+\sqrt{x^2-3}}\right|+C$. **11.4.** $x-\operatorname{arctg}x+C$. **11.5.** $\dfrac{1}{5}x^5+x^4+\dfrac{4}{3}x^3+C$. **11.6.** $x-\dfrac{1}{4}\cos 4x+C$. **11.7.** $\dfrac{1}{3}\arcsin 3x+C$. **11.8.** $\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}2x+C$. **11.9.** $\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}\sin 2x+C$. **11.10.** $\operatorname{arctg}(x+1)+C$. **11.11.** $\dfrac{1}{12}(2x+3)^6+C$. **11.12.** $\dfrac{1}{9(1-3x)^3}+C$. **11.13.** $\ln|x+5|+C$. **11.14.** $\dfrac{1}{3}\ln|3x-4|+C$. **11.15.** $\dfrac{1}{2}\ln(x^2+4)+C$. **11.16.** $\operatorname{arctg}(\sin x)+C$. **11.17.** $\dfrac{1}{3}\arcsin x^3+C$. **11.18.** $-\cos\ln x+C$. **11.19.** $\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)+\dfrac{1}{3}\operatorname{arctg}^3 x+C$. **11.20.** $-2\cos\sqrt{x}+C$. **11.21.** $\arcsin e^x+C$. **11.22.** $-\dfrac{1}{2\operatorname{tg}^2 x}+C$. **11.23.** $\ln(x^2+x+3)+C$. **11.24.** $\dfrac{1}{4}\ln(2x^2+3)+\dfrac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2}\,x}{\sqrt{3}}+C$. **11.25.** $-\sqrt{1-x^2}+\arcsin x+\dfrac{1}{4}\arcsin^4 x+C$. **11.26.** $-\ln\left|\cos^2 x+\sqrt{\cos^4 x+3}\right|+C$. **11.27.** $\ln|\operatorname{tg}x|+C$. **11.28.** $\ln|4+x\ln x|+C$. **11.29.** $\dfrac{2}{5}\sqrt{(x-5)^5}+4\sqrt{(x-5)^3}+C$. **11.30.** $\ln\left|\dfrac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right|+C$. **11.31.** $\dfrac{(5x-1)^{12}}{300}+\dfrac{(5x-1)^{11}}{275}+C$. **11.32.** $-\dfrac{1}{5(3-x)^5}+\dfrac{1}{2(3-x)^6}+C$. **11.33.** $\dfrac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}-(x+1)+4\sqrt{x+1}-4\ln|\sqrt{x+1}+1|+C$. **11.34.** $2\ln|\sqrt{x}+1|+C$. **11.35.** $\dfrac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}+8\sqrt{x-1}+C$. **11.36.** $\ln\left|\dfrac{x}{1+\sqrt{x^2+1}}\right|+C$.

## 12. Интегрирование по частям в неопределенном интеграле

**12.1.** $\frac{1}{27}\big((2-9x-9x^2)\cos 3x+3(2x+1)\sin 3x\big)+C$. **12.2.** $\frac{3}{4}\cos(2x+1)+\frac{1}{2}(3x+5)\sin(2x+1)+C$. **12.3.** $-(x^2+2x+2)e^{-x}+C$. **12.4.** $\frac{1}{8}e^{2x}(4x^3-6x^2+6x-3)+C$. **12.5.** $-\frac{1}{2}e^{-x^2}(x^2+1)+C$. **12.6.** $\frac{x}{2\cos^2 x}-\frac{1}{2}\operatorname{tg} x+C$. **12.7.** $\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\ln x-\frac{x^2}{4}-2x+C$. **12.8.** $\frac{x^2}{4}(2\ln^2 x-2\ln x+1)+C$. **12.9.** $-\frac{1}{x}\big(\ln^2 x+2\ln x+2\big)+C$. **12.10.** $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$. **12.11.** $x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$. **12.12.** $\frac{1}{2}(x^2+1)\operatorname{arctg} x-\frac{x}{2}+C$. **12.13.** $\frac{1}{13}e^{2x}(2\cos 3x+3\sin 3x)+C$. **12.14.** $-\frac{1}{10}e^{-4x}\big(\cos(2x+1)+2\sin(2x+1)\big)+C$. **12.15.** $x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+C$. **12.16.** $x\operatorname{tg} x+\ln|\cos x|+C$. **12.17.** $\frac{1+x^2}{2}\operatorname{arctg}^2 x-x\operatorname{arctg} x+\frac{1}{2}\ln|1+x^2|+C$. **12.18.** $-\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x+C$. **12.19.** $\frac{x}{2}\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\ln\big|x+\sqrt{x^2+1}\big|+C$. **12.20.** $\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x+C$. **12.21.** $\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{4}\right)\arcsin x+\frac{x}{4}\sqrt{1-x^2}+C$. **12.22.** $-\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x+C$. **12.23.** $\big(\ln(\ln x)-1\big)\ln x+C$. **12.24.** $-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C$.

## 13. Интегрирование рациональных функций

**13.1.** $\ln|x+4|+C$. **13.2.** $\frac{1}{3}\ln|3x+5|+C$. **13.3.** $-\frac{1}{2(x-2)^2}+C$. **13.4.** $-\frac{1}{3(x+2)^3}+C$. **13.5.** $-\frac{1}{2(2x+3)}+C$. **13.6.** $\frac{1}{2(3-x)^2}+C$. **13.7.** $\operatorname{arctg}(x+2)+C$. **13.8.** $\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|+C$. **13.9.** $\ln(x^2+2x+2)+3\operatorname{arctg}(x+1)+C$. **13.10.** $\frac{1}{2}\ln(x^2-4x+8)-\operatorname{arctg}\frac{x-2}{2}+C$. **13.11.** $-\frac{3}{2}\ln(x^2+3x+5)+\frac{19}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{2x+3}{\sqrt{11}}+C$. **13.12.** $\frac{5}{2}\ln(x^2+5x+9)-\frac{21}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{2x+5}{\sqrt{11}}+C$. **13.13.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x+\frac{x}{2(x^2+1)}+C$. **13.14.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x+2)+\frac{x+2}{2(x^2+4x+5)}+C$. **13.15.** $\frac{1}{8}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+\frac{x-2}{4(x^2+4)}+C$. **13.16.** $\frac{3}{8}\operatorname{arctg} x+\frac{x}{4(x^2+1)^2}+\frac{3x}{8(x^2+1)}+C$.

**13.17.** $\frac{1}{7}\ln\left|\frac{x-3}{x+4}\right|+C$. **13.18.** $-\frac{1}{6}\ln|x|-\frac{7}{2}\ln|x-2|+\frac{17}{3}\ln|x-3|+C$. **13.19.** $x-\frac{1}{2}\ln|x|-\frac{3}{4}\ln|x+2|+\frac{5}{4}\ln|x-2|+C$. **13.20.** $\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x+1}+\frac{2}{(x+1)^2}+C$. **13.21.** $-\frac{2}{(x-1)}+2\ln|x-1|+\ln|x+2|+C$. **13.22.** $\frac{1}{4}\ln\frac{x^2}{x^2+2}+C$. **13.23.** $\frac{3}{5}\ln|x-1|+\frac{7}{10}\ln(x^2+2x+2)-\frac{26}{5}\operatorname{arctg}(x+1)+C$. **13.24.** $-\frac{1}{2x}-\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+4)+C$. **13.25.** $\frac{3}{x-2}-\frac{2}{x-3}+\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+C$. **13.26.** $x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\operatorname{arctg}x+C$. **13.27.** $\ln|x|-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5)-\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C$. **13.28.** $\frac{1}{2}\ln\frac{x^2+1}{x^2+4}+2\operatorname{arctg}x-\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$.

## 14. Интегрирование тригонометрических функций

**14.1.** $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{5}-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right|+C$. **14.2.** $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right)+C$. **14.3.** $-\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2}+C$. **14.4.** $\frac{1}{4}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C$. **14.5.** $-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\cos x-1}{2}\right)+C$. **14.6.** $-\frac{1}{4}\ln(1+4\cos^2 x)+C$. **14.7.** $\frac{1}{4}\cos 2x-3\ln(2+\sin x)+2\sin x+C$. **14.8.** $\frac{1}{10}\operatorname{arctg}\frac{2}{\cos x}+\frac{1}{5}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C$. **14.9.** $\frac{1}{4\sqrt{7}}\ln\left|\frac{2\operatorname{tg}x-\sqrt{7}}{2\operatorname{tg}x+\sqrt{7}}\right|+C$. **14.10.** $\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}x}{\sqrt{3}}-\frac{1}{4}\ln|\cos x|+\frac{1}{8}\ln|\cos 2x-7|+C$. **14.11.** $\frac{1}{7\cos^7 x}-\frac{1}{5\cos^5 x}+C$. **14.12.** $\sin x-\sin^3 x+\frac{3}{5}\sin^5 x-\frac{1}{7}\sin^7 x+C$. **14.13.** $-2\sqrt{\cos x}+\frac{2}{5}\sqrt{\cos^5 x}+C$. **14.14.** $-\frac{1}{2\operatorname{tg}^2 x}+3\ln|\operatorname{tg}x|+\frac{3}{2}\operatorname{tg}^2 x+\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x+C$. **14.15.** $\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+C$. **14.16.** $-\frac{1}{3\operatorname{tg}^3 x}-\frac{2}{\operatorname{tg}x}+\operatorname{tg}x+C$. **14.17.** $\ln|\operatorname{tg}x|+C$. **14.18.** $-2\sqrt{\operatorname{ctg}x}+C$. **14.19.** $\operatorname{tg}x+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+C$. **14.20.** $\ln|\operatorname{tg}x|+\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x+C$. **14.21.** $\frac{x}{8}-\frac{\sin 4x}{32}+C$. **14.22.** $\frac{x}{16}-\frac{\sin 4x}{64}-\frac{\sin^3 2x}{48}+C$. **14.23.** $\frac{3}{8}x+\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{32}+C$.

**14.24.** $\frac{5}{16}x-\frac{1}{8}\sin 4x+\frac{1}{96}\sin^3 4x+\frac{3}{128}\sin 8x+C$. **14.25.** $\frac{\cos 2x}{4}-\frac{\cos 8x}{16}+C$. **14.26.** $\frac{1}{2}\cos(x-3)-\frac{1}{10}\cos(5x-1)+C$. **14.27.** $\frac{\sin 5x}{10}-\frac{\sin 25x}{50}+C$. **14.28.** $\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 10x}{20}+C$. **14.29.** $\frac{\cos 6x}{24}-\frac{\cos 4x}{16}-\frac{\cos 2x}{8}+C$. **14.30.** $\frac{\sin x}{2}+\frac{\sin 3x}{12}+\frac{\sin 5x}{20}+C$.

## 15. Интегрирование иррациональных функций

**15.1.** $2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+6\ln|\sqrt[6]{x}-1|+C$. **15.2.** $2\sqrt{x}+4\sqrt[4]{x}-\frac{8}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt{3}}+C$. **15.3.** $\frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2}+6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C$. **15.4.** $6\sqrt[6]{x}-12\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[6]{x}}{2}+C$. **15.5.** $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1+x}}{2}+C$. **15.6.** $\frac{3}{20}\sqrt[3]{(2x-3)^5}+\frac{9}{8}\sqrt[3]{(2x-3)^2}+C$. **15.7.** $6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x+2}-\ln|x+2|+3\ln|1+\sqrt[3]{x+2}|+C$. **15.8.** $3\ln\left|\frac{\sqrt[6]{2x-1}-1}{\sqrt[6]{2x-1}}\right|+C$. **15.9.** $4\sqrt[4]{x+3}+4\ln|\sqrt[4]{x+3}-1|+C$. **15.10.** $\frac{3}{16}\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^4}-\frac{3}{28}\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^7}+C$. **15.11.** $\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}\right|-2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+C$. **15.12.** $\frac{1}{3}\sqrt{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3}+C$. **15.13.** $\frac{12}{7}\sqrt[3]{(1+x^{\frac{1}{4}})^7}-3\sqrt[3]{(1+x^{\frac{1}{4}})^4}+C$. **15.14.** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt[4]{1+x^4}-1}{\sqrt[4]{1+x^4}+1}\right|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt[4]{1+x^4}+C$. **15.15.** $6\sqrt{1+x^{\frac{1}{3}}}+C$. **15.16.** $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}\right|+C$. **15.17.** $-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C$. **15.18.** $-\frac{\sqrt{(1+x^2)^5}}{5x^5}+\frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}+C$. **15.19.** $-\frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}+\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C$. **15.20.** $\frac{x^3}{12\sqrt{(4+x^2)^3}}+C$. **15.21.** $-\arcsin\frac{4-x}{4}+C$. **15.22.** $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln|\sqrt{3}(x-1)+\sqrt{3x^2-6x+4}|+C$. **15.23.** $\sqrt{x^2+6x+1}-6\ln|x+3+\sqrt{x^2+6x+1}|+C$. **15.24.** $-\sqrt{2-x-x^2}+\frac{7}{2}\arcsin\frac{2x+1}{3}+C$. **15.25.** $\ln|x|-\ln|4x+1+\sqrt{x^2+8x+1}|+C$. **15.26.** $-\frac{\sqrt{1-x+2x^2}}{x}+\frac{\ln|x|}{2}-\frac{1}{2}\ln|2-x+2\sqrt{1-x+2x^2}|+C$. **15.27.** $-\frac{\sqrt{6x-x^2-5}}{2(x-1)}+C$. **15.28.** $-\frac{\sqrt{x^2+5}}{9(x+2)}+\frac{2}{27}\ln|x+2|-\frac{2}{27}\ln|5-2x+$

$3\sqrt{x^2+5}|+C$. **15.29.** $\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\left(\ln\left|\dfrac{\sqrt{3}-x}{\sqrt{3}+x}\right|+\ln\left|\dfrac{4\sqrt{3}+3x+\sqrt{3}\sqrt{4-x^2}}{4\sqrt{3}-3x+\sqrt{3}\sqrt{4-x^2}}\right|\right)+C$. **15.30.** $\dfrac{1}{2}(x+1)\sqrt{1-2x-x^2}+\arcsin\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{2}}\right)+C$. **15.31.** $\dfrac{1}{2}(x-1)\sqrt{x^2-2x+10}+\dfrac{9}{4}\ln\left|\dfrac{\sqrt{x^2-2x+10}+x-1}{\sqrt{x^2-2x+10}+1-x}\right|+C$. **15.32.** $\dfrac{1}{2}(x+2)\sqrt{x^2+4x+5}+\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{\sqrt{x^2+4x+5}+x+2}{\sqrt{x^2+4x+5}-x-2}\right|+C$. **15.33.** $\sqrt{x^2-1}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}+C$. **15.34.** $\left(\dfrac{2x^3-5x}{8}\right)\sqrt{x^2-1}+\dfrac{3}{8}\ln|x+\sqrt{x^2-1}|+C$.

## 16. Функции нескольких переменных. Частные производные и полный дифференциал ф.н.п.

**16.1.** $-1\leqslant x^2+y\leqslant 1$. **16.2.** $x+y<0$. **16.3.** $4\leqslant x^2+y^2\leqslant 9$. **16.4.** $x^2+y^2\geqslant 1$. **16.5.** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y-\dfrac{y}{x^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=x+\dfrac{1}{x}$. **16.6.** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$. **16.7.** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=(1-xy)e^{-xy}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-x^2e^{-xy}$. **16.8.** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y^x\ln y$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=xy^{x-1}$. **16.9.** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{\cos y^2}{x^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{2y\sin y^2}{x}$. **16.10.** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2x}{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2y}{x^2+y^2}$. **16.11.** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{y\operatorname{sgn}x}{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{|x|}{x^2+y^2}$. **16.12.** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{y}{2x^2+2xy+y^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{x}{2x^2+2xy+y^2}$. **16.13.** $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}=-\dfrac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$. **16.14.** $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{z}{x}\left(\dfrac{y}{x}\right)^z$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{z}{y}\left(\dfrac{y}{x}\right)^z$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}=\left(\dfrac{y}{x}\right)^z\ln\dfrac{y}{x}$. **16.15.** $\dfrac{\partial u}{\partial x}=y^2z^3t^4+3$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=2xyz^3t^4-4$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}=3xy^2z^2t^4+2$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}=4xy^2z^3t^3-1$. **16.16.** $f'_x(3,2)=56$, $f'_y(3,2)=42$. **16.17.** $\Delta=r^2\cos\theta$. **16.18.** $\Delta z=0,33$, $dz=0,3$. **16.19.** $\Delta z=0,04305$, $dz=0,04$. **16.20.** $dz=\dfrac{x\,dx}{\sqrt{x^2+y^2}(y+\sqrt{x^2+y^2})}+\dfrac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$. **16.21.** $dz=\dfrac{y}{x^2\cos^2\dfrac{y^2}{x}}(2x\,dy-y\,dx)$. **16.22.** $dz=\dfrac{1}{y^2}\operatorname{tg}\dfrac{x}{y}(x\,dy-y\,dx)$. **16.23.** $du=(xy)^z\left(\dfrac{z}{x}\,dx+\dfrac{z}{y}\,dy+\ln(xy)\,dz\right)$. **16.24.** $du=(y+z)\,dx+(z+x)\,dy+(x+y)\,dz$. **16.25.** $du=e^{xyz}(yz\,dx+zx\,du+xy\,dz)$. **16.26.** $8,29$. **16.27.** $2,95$. **16.28.** $-0,016$.

## 17. Частные производные сложных функций и функций, заданных неявно

**17.1.** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{y\sqrt{u^2+v^3}}\Big(u+\dfrac{3}{2}v^2\Big)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{x}{y^2\sqrt{u^2+v^3}}\Big(u+\dfrac{3}{2}v^2\Big)$. **17.2.** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2u\Big(\dfrac{ux}{v}-\dfrac{y\ln v}{x^2}\Big)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=2u\Big(\dfrac{\ln v}{x}+\dfrac{uy}{v}\Big)$. **17.3.** $dz=\big((2uv-v^2)\sin y-(u^2-2uv)y\sin x\big)\,dx+\big((2uv-v^2)x\cos y+(u^2-2uv)\cos x\big)\,dy$. **17.4.** $\dfrac{dz}{dt}=e^{2x-3y}\Big(\dfrac{2}{\cos^2 t}-3(2t-1)\Big)$. **17.5.** $\dfrac{dz}{dt}=x^y\Big(\dfrac{y}{xt}+\ln x\cos t\Big)$. **17.6.** $\dfrac{dz}{dt}=\dfrac{2e^{2t}(x-y)}{x^2+y^2}$. **17.7.** $\dfrac{du}{dt}=\dfrac{x(z+2yt^2)-yzte^t}{tx^2}$. **17.8.** $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{y(1-2(x+1)^2)}{y^2+(x+1)^2}$. **17.9.** $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{xy^2}{t}\left(2y+\dfrac{3x^2}{\sqrt{x^2+1}}-\dfrac{xy}{t\sqrt{1-x^2}}\right)$. **17.10.** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{t^2+1}\left(vyx^{y-1}+(u+1)y^x\ln y-\dfrac{t(uv+v)}{t^2+1}\sqrt{\dfrac{y}{x}}\right)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{t^2+1}\left(vx^y\ln x+(u+1)xy^{x-1}-\dfrac{t(uv+v)}{t^2+1}\sqrt{\dfrac{x}{y}}\right)$. **17.11.** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{y}{\sqrt{u^2+v^3}}\left(\dfrac{u}{t}+3v^2xt^3\right)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x}{\sqrt{u^2+v^3}}\left(\dfrac{u}{t}+\dfrac{3}{2}v^2xt^3\right)$, $\dfrac{\partial z}{\partial t}=\dfrac{yx}{\sqrt{u^2+v^3}}\left(-\dfrac{u}{t^2}+\dfrac{9}{2}v^2xt^2\right)$. **17.12.** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2x}{x^2-y^2}f'_u(u,v)+y^2f'_v(u,v)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=2xyf'_v(u,v)-\dfrac{2y}{x^2-y^2}f'_u(u,v)$. **17.13.** $dz=\big(5x^4f'_v(u,v)-yf'_u(u,v)\sin(xy)\big)\,dx-\big(x\sin(xy)f'_u(u,v)+7f'_v(u,v)\big)\,dy$. **17.14.** $dz=\dfrac{1}{y^2}\left(\cos\dfrac{x}{y}f'_u(u,v)+\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{y}{x}}f'_v(u,v)\right)(y\,dx-x\,dy)$. **17.15.** $du=\big(2sf'_x(x,y,z)+2sf'_y(x,y,z)+2tf'_z(x,y,z)\big)\,ds+\big(2tf'_x(x,y,z)-2tf'_y(x,y,z)+2sf'_z(x,y,z)\big)\,dt$. **17.20.** $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y\cos x+\sin(x-y)}{\sin(x-y)-\sin x}$. **17.21.** $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+y-1}{x+y+1}$. **17.22.** $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1+y^2}{y^2}$. **17.23.** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{4z}{3z^2-4x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2y}{4x-3z^2}$. **17.24.** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{yz(x+z)-z^3}{z^3+2xy(x+z)}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{xz(x+z)}{z^3+2xy(x+z)}$. **17.25.** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F'_u(u,v)+2xF'_v(u,v)}{F'_u(u,v)+2zF'_v(u,v)}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F'_u(u,v)+2yF'_v(u,v)}{F'_u(u,v)+2zF'_v(u,v)}$, где $u=x+y+z$, $v=x^2+y^2+z^2$. **17.26.** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{ze^{xz}f'_v(u,v)}{yf'_u(u,v)+xe^{xz}f'_v(u,v)}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{zf'_u(u,v)}{yf'_u(u,v)+xe^{xz}f'_v(u,v)}$, где $u=yz$, $v=e^{xz}$. **17.27.** $dz=\dfrac{z\,dx-z(1+x^2z^2)\,dy}{y(1+x^2z^2)-x}$.

### 18. Частные производные и дифференциалы высших порядков

**18.1.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2y}{x^3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=1-\frac{1}{x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$. **18.2.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{3xy^3}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{3x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{3x^3y}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}$. **18.3.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y(xy-2)e^{-xy}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=x(xy-2)e^{-xy}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^3e^{-xy}$. **18.4.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^x\ln^2 y$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=y^{x-1}(x\ln y+1)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x(x-1)y^{x-2}$. **18.5.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2|x|y}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{(y^2-x^2)\operatorname{sgn} x}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{2|x|y}{(x^2+y^2)^2}$. **18.6.** $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{z(z+1)}{x^2}\left(\frac{y}{x}\right)^z$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{z(z-1)}{y^2}\left(\frac{y}{x}\right)^z$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\left(\frac{y}{x}\right)^z\ln^2\frac{y}{x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{z^2}{xy}\left(\frac{y}{x}\right)^z$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=-\frac{1}{x}\left(\frac{y}{x}\right)^z\left(1+z\ln\frac{y}{x}\right)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=\frac{1}{y}\left(\frac{y}{x}\right)^z\left(1+z\ln\frac{y}{x}\right)$. **18.9.** $f'''_{xxx}(0,1)=0$, $f'''_{xxy}(0,1)=2$, $f'''_{xyy}(0,1)=0$, $f'''_{yyy}(0,1)=0$. **18.10.** $\frac{\partial^4 u}{\partial x\partial y\partial\xi\partial\eta}=-\frac{6}{r^4}+\frac{48(x-\xi)^2(y-\eta)^2}{r^8}$, где $r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$. **18.11.** $\frac{\partial^6 u}{\partial x^3\partial y^3}=-6(\cos x+\cos y)$. **18.12.** $\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=-\frac{2x}{(z+1)^2}$. **18.13.** $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y\partial z}=\frac{12x\sin z}{\cos^3 z}$. **18.14.** $\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}=\frac{2z}{(x+1)^2}$. **18.17.** $d^2z=2\left(\frac{y}{x^3}\,dx^2+\left(\frac{1}{y^2}-\frac{1}{x^2}\right)dx\,dy-\frac{x}{y^3}\,dy^2\right)$. **18.18.** $d^2z=e^{xy}\big(y(y^2+xy+2)\,dx^2+2(x+y)(xy+2)\,dx\,dy+x(x^2+xy+2)\,dy^2\big)$. **18.19.** $d^2z=-\frac{1}{x}\,dx^2+\frac{2}{y}\,dx\,dy-\frac{x}{y^2}\,dy^2$. **18.20.** $d^2u=e^{xyz}\big((yz\,dx+zx\,dy+xy\,dz)^2+2(z\,dx\,dy+x\,dy\,dz+y\,dz\,dx)\big)$. **18.21.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2y^2}{x^4}\ln v-\frac{8y^2u}{xv}-\frac{4x^2y^2u}{v^2}+\frac{4yu}{x^3}\ln v+\frac{2yu}{v}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{2y}{x^3}\ln v+\frac{2yu}{v}-\frac{2x^3yu}{v^2}-\frac{2u}{x^2}\ln v+\frac{2xu}{v}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2}{x^2}\ln v+\frac{4xu}{v}-\frac{x^4u}{v^2}$. **18.22.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^2f''_{uu}(u,v)+2f''_{uv}(u,v)+\frac{1}{y^2}f''_{vv}(u,v)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=xyf''_{uu}(u,v)-\frac{x}{y^3}f''_{vv}(u,v)+f'_u(u,v)-\frac{1}{y^2}f'_v(u,v)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^2f''_{uu}(u,v)-\frac{2x^2}{y^2}f''_{uv}(u,v)+\frac{x^2}{y^4}f''_{vv}(u,v)+\frac{2x}{y^3}f'_v(u,v)$. **18.23.** $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=$

$f''_{xy} + f''_{xz}\varphi'_y + f''_{yz}\varphi'_z + f''_{zz}\varphi'_x\varphi'_z + f'_z\varphi''_{xy}$. **18.24.** $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''_{11} + y^2 f''_{22} + y^2 z^2 f''_{33} + 2y f''_{12} + 2yz f''_{13} + 2y^2 z f''_{23}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^2 f''_{22} + 2x^2 z f''_{23} + x^2 z^2 f''_{33}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = x^2 y^2 f''_{33}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = xy f''_{22} + xyz^2 f''_{33} + x f''_{12} + xz f''_{13} + 2xyz f''_{23} + f'_2 + z f'_3$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = xy f''_{13} + xy^2 f''_{23} + xy^2 z f''_{33} + y f'_3$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = x^2 y f''_{23} + x^2 yz f''_{33} + x f'_3$. **18.25.** $\dfrac{d^2 y}{dx^2} = \dfrac{4(x+y)}{(x+y+1)^3}$. **18.26.** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\dfrac{x+y+z}{(x+y+z-1)^3}$.

## 19. Градиент и производная по направлению. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

**19.1.** Линии уровня — параболы $y^2 = C - x$. **19.2.** Линии уровня — прямые $y = Cx$. **19.3.** Поверхности уровня — параллельные плоскости $x + y + z = C$. **19.4.** Поверхности уровня — однополостные и двуполостные гиперболоиды $x^2 + y^2 - z^2 = \pm C^2$ (при $C = 0$ — конус $x^2 + y^2 - z^2 = 0$). **19.5.** $\operatorname{grad} z(M_0) = \left(\dfrac{2x}{y+1}, \dfrac{1-x^2}{(y+1)^2}\right)(1,0) = (2,0)$. **19.6.** $\operatorname{grad} z(M_0) = \left(\dfrac{y^2(1-x)}{(x+1)^2}, \dfrac{2xy}{x+1}\right)(0,1) = (1,0)$. **19.7.** $\operatorname{grad} u(M_0) = \left(\dfrac{y}{z+1}, \dfrac{x+2y}{z+1}, -\dfrac{xy+y^2}{(z+1)^2}\right)(1,1,0) = (1,3,-2)$. **19.8.** $\operatorname{grad} u(M_0) = \left(-\dfrac{y^2+1}{x^2 z}, \dfrac{2y}{xz}, -\dfrac{y^2+1}{xz^2}\right)(1,0,1) = (-1,0,-1)$. **19.9.** $M(3,3,-3)$. **19.10.** $\bar{n}_e = \dfrac{1}{\sqrt{17}}(2,3,-2)$. **19.11.** $\dfrac{\partial u}{\partial \bar{n}} = 2\sqrt{6}$, $\bar{n} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(2,1,1)$. **19.12.** $\cos\varphi = -\dfrac{4}{\sqrt{41}}$. **19.13.** $\dfrac{13}{5}$. **19.14.** $\dfrac{4}{\sqrt{5}}$. **19.15.** $\dfrac{17}{\sqrt{13}}$. **19.16.** $\dfrac{5}{3}$. **19.17.** $x - y - 2z + 1 = 0$, $\dfrac{x - \frac{\pi}{4}}{1} = \dfrac{y - \frac{\pi}{4}}{-1} = \dfrac{z - \frac{1}{2}}{-2}$. **19.18.** $x + ez - 2 = 0$, $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-\pi}{0} = \dfrac{z - \frac{1}{e}}{e}$. **19.19.** $2x + 7y - 5z + 4 = 0$, $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-1}{7} = \dfrac{z-3}{-5}$. **19.20.** $x + y - 4z = 0$, $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-1}{-4}$. **19.21.** $z = 0$, $\dfrac{x}{0} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{z}{1}$ в точке $(0,0,0)$; $z = -4$, $\dfrac{x}{0} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{z+4}{1}$ в точке $(0,0,-4)$. **19.22.** $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$, $\cos\beta = -\dfrac{1}{\sqrt{6}}$,

$\cos\gamma = -\dfrac{2}{\sqrt{6}}$. **19.23.** $4x + y + 2z - 78 = 0$. **19.24.** $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y - \frac{10}{3}}{3} = \dfrac{z+4}{4}$. **19.25.** $x - 2y - 4z - 2 = 0$. **19.26.** $\dfrac{x-4}{-2} = \dfrac{y-5}{1} = \dfrac{z+3}{3}$. **19.27.** В точках $\left(0, \pm 2\sqrt{2}, \mp 2\sqrt{2}\right)$ касательные плоскости параллельны плоскости $Oxy$, в точках $(\pm 2, \mp 4, \pm 2)$ — плоскости $Oxz$, в точках $(\pm 4, \mp 2, 0)$ — плоскости $Oyz$.

## 20. Локальный экстремум функций нескольких переменных

**20.1.** $z_{\min} = -9$ при $x = 0$, $y = 3$. **20.2.** $z_{\max} = \dfrac{1}{64}$ при $x = \dfrac{1}{4}$, $y = \dfrac{1}{2}$. **20.3.** $z_{\min} = -\dfrac{4}{3}$ при $x = 0$, $y = -\dfrac{2}{3}$; в стационарной точке $\left(2, -\dfrac{2}{3}\right)$ экстремума нет. **20.4.** $z_{\min} = 30$ при $x = 5$, $y = 2$. **20.5.** $z_{\min} = 10 - 18\ln 3$ при $x = 1$, $y = 3$. **20.6.** $z_{\min} = -28$ при $x = 2$, $y = 1$; $z_{\max} = 28$ при $x = -2$, $y = -1$; в стационарных точках $(1, 2)$, $(-1, -2)$ экстремумов нет. **20.7.** $z_{\min} = 0$ при $x = y = 0$; в стационарных точках $\left(-\dfrac{5}{3}, 0\right)$, $(1, 4)$, $(1, -4)$ экстремумов нет. **20.8.** $z_{\min} = 0$ при $x = y = 0$; $z_{\max} = 2e^{-1}$ при $x = \pm 1$, $y = 0$; в стационарных точках $(0, \pm 1)$ экстремумов нет. **20.9.** $u_{\min} = -14$ при $x = 2$, $y = -3$, $z = 1$. **20.10.** $u_{\max} = \dfrac{1}{7^7}$ при $x = y = z = \dfrac{1}{7}$. **20.11.** $u_{\min} = 2^{\frac{9}{4}}$ при $x = 2^{\frac{1}{4}}$, $y = 2^{\frac{1}{2}}$, $z = 2^{\frac{3}{4}}$; $u_{\max} = -2^{\frac{9}{4}}$ при $x = -2^{\frac{1}{4}}$, $y = 2^{\frac{1}{2}}$, $z = -2^{\frac{3}{4}}$. **20.12.** Уравнение определяет две функции, из которых одна имеет максимум ($z_{\max} = 6$) при $x = -2$, $y = 1$, другая — минимум ($z_{\min} = -2$) при $x = -2$, $y = 1$. **20.13.** Уравнение определяет две функции, из которых одна имеет максимум $\left(z_{\max} = -\dfrac{8}{7}\right)$ при $x = 0$, $y = \dfrac{16}{7}$, другая — минимум ($z_{\min} = 1$) при $x = 0$, $y = -2$.

## 21. Условный экстремум функций нескольких переменных

**21.1.** $z_{\min} = -\dfrac{19}{4}$ при $x = y = -\dfrac{3}{2}$. **21.2.** $z_{\min} = 2$ при $x = y = 1$. **21.3.** $z_{\min} = -1 - 2\sqrt{2}$ при $x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $z_{\max} = 1 - 2\sqrt{2}$ при $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $y = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **21.4.** $z_{\min} = 0$ при $x = 1$, $y = 0$; $z_{\max} = \dfrac{1}{27}$ при $x = y = \dfrac{1}{3}$. **21.5.** $z_{\min} = -\dfrac{2}{3}$ при $x = 4$, $y = 10$; $z_{\max} = \dfrac{2}{3}$ при $x = 2$, $y = -2$. **21.6.** $z_{\min} = -\dfrac{5}{12}$ при $x = -1$, $y = 1$; $z_{\min} = -\dfrac{8}{3}$ при $x = 2$, $y = 4$; $z_{\max} = 0$ при $x = y = 0$. **21.7.** $z_{\min} = -\sqrt{5}$

при $x=-\dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $y=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$; $z_{\max}=\sqrt{5}$ при $x=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $y=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. **21.8.** $z_{\min}=-2\sqrt{2}$ при $x=-\sqrt{2}$, $y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $z_{\max}=2\sqrt{2}$ при $x=\sqrt{2}$, $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **21.9.** $u_{\min}=-18$ при $x=-4$, $y=-2$, $z=4$; $u_{\max}=18$ при $x=4$, $y=2$, $z=-4$. **21.10.** $u_{\min}=4$ при $x=y=0$, $z=\pm 2$; $u_{\max}=16$ при $x=\pm 4$, $y=z=0$; при $x=z=0$, $y=\pm 3$ экстремума нет. **21.11.** $u_{\max}=2^6$ при $x=y=z=2$. **21.12.** $u_{\max}=\dfrac{1}{2}$ при $x=1$, $y=1$, $z=0$; при $x=y=z=0$ экстремума нет. **21.13.** $u_{\max}=2$ в точках $(2,1,1)$, $(1,2,1)$, $(1,1,2)$; $u_{\min}=\dfrac{50}{27}$ в точках $\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{5}{3},\dfrac{5}{3}\right)$, $\left(\dfrac{5}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{5}{3}\right)$, $\left(\dfrac{5}{3},\dfrac{5}{3},\dfrac{2}{3}\right)$. **21.14.** Искать минимум функции $u=\dfrac{x^3+y^3+z^3}{3}$ при $x+y+z=s$.

## 22. Наибольшее и наименьшее значения функции

**22.1.** $z_{\text{наим}}=3$, при $x=0$, $y=1$; $z_{\text{наиб}}=5$ при $x=y=0$. **22.2.** $z_{\text{наим}}=-1$ при $x=1$, $y=0$; $z_{\text{наиб}}=1$ при $x=y=1$. **22.3.** $z_{\text{наим}}=-1$ при $x=y=1$; $z_{\text{наиб}}=6$ при $x=3$, $y=0$ и при $x=0$, $y=3$. **22.4.** $z_{\text{наим}}=-\dfrac{1}{4}$ при $x=0$, $y=\dfrac{1}{2}$; $z_{\text{наиб}}=17$ при $x=3$, $y=-1$. **22.5.** $z_{\text{наим}}=-1$ при $x=2$, $y=0$; $z_{\text{наиб}}=4$ при $x=y=1$. **22.6.** $z_{\text{наим}}=-1$ при $x=1$, $y=0$; $z_{\text{наиб}}=2$ при $x=2$, $y=3$. **22.7.** $z_{\text{наим}}=-9$ при $x=-1$, $y=2$; $z_{\text{наиб}}=-\dfrac{3}{4}$ при $x=1$, $y=\dfrac{1}{2}$. **22.8.** $z_{\text{наим}}=-6$ при $x=y=-1$; $z_{\text{наиб}}=27$ при $x=-1$, $y=2$. **22.9.** $z_{\text{наим}}=-\dfrac{1}{2}$ при $x=-y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $z_{\text{наиб}}=\dfrac{1}{2}$ при $x=y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **22.10.** $z_{\text{наим}}=-\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$ при $x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $y=\pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}$; $z_{\text{наиб}}=\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$ при $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $y=\pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}$. **22.11.** Куб с длиной ребра $a$. **22.12.** Куб с длиной ребра $\dfrac{d}{\sqrt{3}}$. **22.13.** Координаты искомой точки равны средним арифметическим координат вершин. **22.14.** Длины сторон параллелепипеда: $\dfrac{2R}{\sqrt{3}}$, $\dfrac{2R}{\sqrt{3}}$, $\dfrac{R}{\sqrt{3}}$. **22.15.** Длины сторон параллелепипеда: $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}R$, $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}R$, $\dfrac{H}{3}$. **22.16.** Равнобедренный треугольник с длиной боковой стороны $\dfrac{a}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}$.

## 23. Определенный интеграл

**23.1.** $\frac{45}{4}$. **23.2.** $\frac{7}{\ln 2}$. **23.3.** $\frac{\ln 3}{2}$. **23.4.** $\frac{\pi}{12}$. **23.5.** $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{4}{7}$. **23.6.** $\ln\frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}$. **23.7.** $\frac{11}{2}+7\ln 2$. **23.8.** $\sin 1$. **23.9.** $\frac{\pi}{4}$. **23.10.** $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$. **23.11.** $2-\ln 5$. **23.12.** $\frac{\pi}{4}$. **23.13.** $\ln\frac{3}{2}$. **23.14.** $\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}$. **23.15.** $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$. **23.16.** $\pi$. **23.17.** $\frac{\pi}{6}$. **23.18.** $\frac{1}{3}(2\sqrt{3}-\pi)$. **23.19.** $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. **23.20.** $2\ln 2-\frac{1}{2}$. **23.21.** $\ln\frac{\sqrt{5}+3}{2}$. **23.22.** $\frac{1}{6}$. **23.23.** $4-\pi$. **23.24.** $\frac{81}{16}\pi$. **23.27.** $\pi\sqrt{2}-4$. **23.28.** $e-2$. **23.29.** $\frac{4}{25}(e^{\frac{3\pi}{4}}+1)$. **23.30.** $\frac{e^2+1}{4}$. **23.31.** $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$. **23.32.** $\frac{\pi^2-8}{32}$. **23.33.** $2\sqrt{7}<I<6$. **23.34.** $\frac{2\pi}{\sqrt{7}}<I<\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$. **23.35.** $\frac{\pi}{4}$; $\left(\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\int\limits_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg}x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}\right)$. **23.36.** $1$. **23.37.** $\frac{2}{3}(2^{\frac{3}{2}}-1)$. **23.38.** $x=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k=0,1,2,\ldots$. **23.39.** $\Phi'(x)=\frac{\sin x}{x}$. **23.40.** $\Phi'(x)=\frac{\sin x}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x^2}$. **23.41.** $\Phi'(x)=-\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}$. **23.42.** $\Phi'(x)=\frac{x^2-x}{\ln x}$.

## 24. Геометрические приложения определенного интеграла

**24.1.** $e^2$. **24.2.** $\frac{16}{3}$. **24.3.** $\frac{9}{2}$. **24.4.** $\frac{3}{2}(3\pi-2)$. **24.5.** $\frac{56}{15}p^2$. **24.6.** $a^2$. **24.7.** $\frac{a^2}{4}(\pi-2\ln 2)$. **24.8.** $2\ln 2-\frac{1}{2}$. **24.9.** $\frac{32}{3}$. **24.10.** $1$. **24.11.** $\frac{e}{2}-1$. **24.12.** $4\ln 2-1$. **24.13.** $\frac{3}{8}\pi a^2$. **24.14.** $\frac{8\sqrt{3}}{5}$. **24.15.** $12\pi$. **24.16.** $\frac{8}{15}$. **24.17.** $\frac{3}{2}\pi a^2$. **24.18.** $\frac{\pi a^2}{8}$. **24.19.** $\frac{\pi a^2}{4}$. **24.20.** $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$. **24.21.** $\frac{\pi a^2}{4}$. **24.22.** $\frac{3}{4}\sqrt{3}$. **24.23.** $6\sqrt{3}-2$. **24.24.** $8\ln\bigl(2+\sqrt{3}\bigr)-2\sqrt{3}$. **24.25.** $\frac{4}{\pi}\ln\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}=\frac{4}{\pi}\ln(1+\sqrt{2})$. **24.26.** $\frac{134}{27}p$. **24.27.** $6a$. **24.28.** $\sqrt{2}(e-1)$. **24.29.** $\frac{13}{3}$. **24.30.** $4a\sqrt{3}$. **24.31.** $8(2-\sqrt{3})$. **24.32.** $\frac{3}{2}\pi a$, $0\leqslant\varphi\leqslant 3\pi$. **24.33.** $5\pi\sqrt{1+4\pi^2}+$

$\frac{5}{2}\ln\left(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2}\right)$. **24.34.** $\frac{16}{3}a$. **24.35.** $\frac{272}{15}\pi$. **24.36.** $\frac{11}{4}\pi$. **24.37.** $\frac{\pi^3}{2}$. **24.38.** $\frac{64}{3}\pi$. **24.39.** $\frac{8}{15}\pi a^3$.

### 25. Несобственные интегралы

**25.1.** $\frac{1}{2}$. **25.2.** Расходится. **25.3.** $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. **25.4.** $\frac{\pi}{8}$. **25.5.** 0. **25.6.** $\ln 2$. **25.7.** Расходится. **25.8.** $1+\ln 2$. **25.9.** $\frac{1}{3}$. **25.10.** Расходится. **25.11.** 1. **25.12.** $\frac{1}{2}$. **25.13.** $\frac{1}{2}$. **25.14.** $\frac{2}{5}$. **25.15.** Расходится. **25.16.** $\frac{1}{4}\ln 2$. **25.17.** Сходится. **25.18.** Сходится. **25.19.** Расходится. **25.20.** Сходится. **25.21.** Сходится. **25.22.** Расходится. **25.23.** Расходится. **25.24.** $\frac{5}{2}(\sqrt[5]{3}+1)$. **25.25.** Расходится. **25.26.** $\pi$. **25.27.** $\frac{\pi}{3}$. **25.28.** $\frac{16}{3}$. **25.29.** $2\sqrt{2}$. **25.30.** $\pi$. **25.31.** Сходится. **23.32.** Сходится. **25.33.** Сходится. **25.34.** Расходится.

### 26. Двойной интеграл, его вычисление в декартовой системе координат

**26.1.** $y=x,\ y=x+3,\ x=1,\ x=2$. **26.2.** $y=x^2,\ y=2-x^2,\ x\pm 1$. **26.3.** $x+y=2,\ x\sqrt{4-y^2},\ y=0,\ y=2$. **26.4.** $y=\sqrt{x},\ y=\sqrt{2-x^2},\ x=0,\ x=1$. **26.5.** $\int\limits_2^4 dx\int\limits_2^x f(x,y)\,dy+\int\limits_4^5 dx\int\limits_2^4 f(x,y)\,dy+\int\limits_5^7 dx\int\limits_{x-3}^4 f(x,y)\,dy=\int\limits_2^4 dy\int\limits_y^{y+3} f(x,y)\,dx$. **26.6.** $\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{\sqrt{2x}} f(x,y)\,dy+\int\limits_2^4 dx\int\limits_0^{\sqrt{4x-x^2}} f(x,y)\,dy=\int\limits_0^2 dy\int\limits_{\frac{y^2}{2}}^{2+\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dx$. **26.7.** $\int\limits_{-1}^0 dx\int\limits_{-\sqrt{x+1}}^{\sqrt{x+1}} f(x,y)\,dy+\int\limits_0^1 dx\int\limits_{-\sqrt{1-x}}^{\sqrt{1-x}} f(x,y)\,dy$. **26.8.** $\int\limits_0^2 dy\int\limits_0^{2-\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dx\ +$

$\int\limits_0^2 dy \int\limits_{2+\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{16-y^2}} f(x,y)\,dx + \int\limits_2^4 dy \int\limits_0^{\sqrt{16-y^2}} f(x,y)\,dx$. **26.9.** $\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{3\sqrt{x}} f(x,y)\,dy$.

**26.10.** $\int\limits_0^{\frac{8}{3}} dy \int\limits_{2y-2}^{\sqrt{4+y^2}} f(x,y)\,dx$. **26.11.** $\int\limits_0^a dy \int\limits_0^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\,dx +$ $\int\limits_a^{2a} dy \int\limits_0^{\sqrt{2ay-y^2}} f(x,y)\,dx$. **26.12.** $\int\limits_{-1}^0 dx \int\limits_{-\sqrt{x+1}}^{\sqrt{x+1}} f(x,y)\,dy +$ $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{x+1}}^{-\sqrt{2x}} f(x,y)\,dy + \int\limits_0^1 dx \int\limits_{\sqrt{2x}}^{\sqrt{x+1}} f(x,y)\,dy$. **26.13.** $\dfrac{8}{3}$. **26.14.** $\dfrac{\pi}{6}$.
**26.15.** $\dfrac{a^2}{4}(\pi+4)$. **26.16.** $\dfrac{3\pi}{2}$. **26.17.** $\dfrac{1}{4}$. **26.18.** $\dfrac{4}{3}$. **26.19.** $\dfrac{1}{3}$. **26.20.** $\dfrac{9}{20}$.
**26.21.** $\dfrac{68}{15}$. **26.22.** $\dfrac{\pi^2}{32}$. **26.23.** $\dfrac{4}{3}a^3$. **26.24.** $e$.

## 27. Замена переменных в двойном интеграле. Двойной интеграл в полярной системе координат

**27.1.** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{3}\,\sin\varphi} f(r)r\,dr + \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{a\cos\varphi} f(r)r\,dr$.

**27.2.** $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{\frac{a\cos\varphi}{\sin^2\varphi}}^{2a\sin\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)r\,dr$. **27.3.** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)r\,dr +$ $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{1}{\sin\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)r\,dr + \int\limits_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)r\,dr$.
**27.4.** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} f(\operatorname{tg}\varphi)\,d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{6}\,\cos\varphi} r\,dr + \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} f(\operatorname{tg}\varphi)\,d\varphi \int\limits_0^{3\sqrt{\cos 2\varphi}} r\,dr$. **27.5.** $\dfrac{\pi}{4}\big(e^{a^2}-1\big)$.
**27.6.** $a$. **27.7.** $\dfrac{128}{3}\pi$. **27.8.** $\dfrac{\pi a}{2}$. **27.9.** $\dfrac{45}{64}\pi a^4$. **27.10.** $\dfrac{a}{2}(2-$

$\ln 2)$. **27.11.** $\dfrac{2\sqrt{2}}{15}a^4$. **27.12.** $\dfrac{1}{a}\int\limits_0^a dv\int\limits_0^a f\Big(\dfrac{u(a-v)}{a}, \dfrac{uv}{a}\Big)u\,du$.
**27.13.** $\dfrac{1}{3}\int\limits_a^b du\int\limits_p^q f\big(\sqrt[3]{u^2v}, \sqrt[3]{uv^2}\big)\,dv$. **27.14.** $\dfrac{1}{2}\int\limits_1^3 du\int\limits_{-u}^{6-u} f\Big(\dfrac{u+v}{2}, \dfrac{u-v}{2}\Big)\,dv$.
**27.15.** $2\pi ab\big(c-\sqrt{c^2-1}\big)$. **27.16.** $\dfrac{e-1}{2}$.

### 28. Вычисление площадей плоских фигур

**28.1.** $\dfrac{64}{3}a^2$. **28.2.** $\dfrac{1}{2}(15-16\ln 2)$. **28.3.** $a^2(\pi-1)$. **28.4.** $1,5-2\ln 2$.
**28.5.** $\dfrac{a^2}{4}(\pi-2\ln 2)$. **28.6.** $\dfrac{c^3}{6p}$. **28.7.** $\dfrac{1}{4}(b^2-a^2)(\pi+2)$ (перейти к полярным координатам). **28.8.** $(\pi-1)a^2$ (перейти к полярным координатам).
**28.9.** $\dfrac{a^2}{210}$ (сделать замену переменных: $x=r\cos^2\varphi$, $y=r\sin^2\varphi$, $0\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{2}$).
**28.10.** $\dfrac{a^2\pi}{16}$ (перейти к полярным координатам). **28.11.** $\dfrac{a^2}{2}$ (перейти к полярным координатам). **28.12.** $\dfrac{5}{2}a^2\pi$ (перейти к полярным координатам).
**28.13.** $\dfrac{1}{4}a^2(8-\pi)$. **28.14.** $\dfrac{\pi a^2}{4}$. **28.15.** $a^2$. **28.16.** $\dfrac{3}{4}\sqrt{3}$.

### 29. Вычисление объемов тел

**29.1.** $\dfrac{16}{15}$. **29.2.** $\dfrac{2}{3}$. **29.3.** $\dfrac{128}{21}$. **29.4.** $\dfrac{43}{120}$. **29.5.** $\dfrac{1}{2}$. **29.6.** $\dfrac{4}{3}a^3(2-\sqrt{2})$ (интегрировать в плоскости $Oyz$). **29.7.** $\dfrac{a^3}{4}$. **29.8.** $\dfrac{3}{35}$. **29.9.** $\dfrac{3\pi a^3}{32}$.
**29.10.** $\dfrac{19}{6}\pi a^3$. **29.11.** $\dfrac{20}{3}\pi$.

### 30. Дифференциальные уравнения 1-го порядка. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

**30.3.** $f(x,y)=0$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}<0$ — max, $\dfrac{\partial f}{\partial x}>0$ — min. **30.4.** $\dfrac{\partial f}{\partial x}+f(x,y)\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$. **30.5.** $xy'=x^2+y$. **30.6.** $2xyy'=x^2+y^2$. **30.7.** $y'+y\operatorname{tg}x=\dfrac{1}{\cos x}$.
**30.8.** $yy'=x$. **30.9.** $\operatorname{arctg}y-\arcsin x=C$. **30.10.** $y\sin y+\cos y-x\cos x+\sin x=C$. **30.11.** $\operatorname{arctg}y+\ln(1+x^2)=C$. **30.12.** $y=Ce^{\sqrt{1-x^2}}$; $x=\pm 1$.

**30.13.** $y=C\sqrt{1+e^{2x}}$. **30.14.** $e^x-\frac{1}{2}e^{2y}-2\ln|1+y|-\frac{(y-1)^2}{2}=C$; $y=-1$. **30.15.** $y=C(x^2+1)$. **30.16.** $y=\frac{\sin x+C}{\sin x}$. **30.17.** $4x+2y+1=Ce^{2y}$. **30.18.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}(4x+y+1)-x=C$. **30.19.** $x^2-y^2=1$. **30.20.** $\frac{1}{2}(x^2+y^2)+\ln\left|\frac{y}{x}\right|=1$. **30.21.** $y=\sin x$. **30.22.** $y=e^x$.

### 31. Однородные дифференциальные уравнения

**31.1.** Однородная, нулевого порядка. **31.2.** Однородная, первого порядка. **31.3.** Неоднородная. **31.4.** Неоднородная. **31.5.** Однородная, нулевого порядка. **31.6.** Однородная, нулевого порядка. **31.7.** $y=\pm x\sqrt{2\ln|x|+C}$. **31.8.** $y=2x\operatorname{arctg}Cx$. **31.9.** $y=x(\ln|x|+C)$, $x=0$. **31.10.** $y^2-2xy-x^2=C$. **31.11.** $x^2-2xy-y^2=C$. **31.12.** $xe^{\frac{y}{x}}=C$. **31.13.** $\arcsin\frac{y}{x}-\frac{1}{x}\sqrt{x^2-y^2}-\ln|x|=C$. **31.14.** $x^2-xy+y^2+x-y=C$. **31.15.** $C(x+y-1)=(y+2)^2$. **31.16.** $x+2y+3\ln|x+y-2|=C$. **31.17.** $(y-3)^2+2(x+1)(y-3)-(x+1)^2=C$. **31.18.** $y=xe^{x+1}$. **31.19.** $\ln|y|+2\sqrt{\frac{x}{y}}=2$. **31.20.** $y=\frac{1}{2}(x^2-1)$.

### 32. Линейные дифференциальные уравнения и уравнения Бернулли

**32.1.** $y=e^{-x^2}\left(C+\frac{x^2}{2}\right)$. **32.2.** $y=Ce^{-2x}+\frac{1}{5}e^{3x}$. **32.3.** $y=\frac{1}{x+1}\cdot\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+C\right)$. **32.4.** $y=x\ln x+\frac{C}{x}$. **32.5.** $y=(x+C)(1+x^2)$. **32.6.** $y=(x+1)^2(e^x+C)$. **32.7.** $y=\sin x+C\cos x$. **32.8.** $x=Cy+\frac{1}{2}y^3$, $y=0$. **32.9.** $x=\operatorname{arctg}y-1+Ce^{-\operatorname{arctg}y}$. **32.10.** $x=\frac{1}{2}(\sin y-\cos y)+Ce^{-y}$. **32.11.** $y=\sin x$. **32.12.** $y=e^{2x}-e^x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$. **32.13.** $x=y\ln y+\frac{1}{y}$. **32.14.** $y=e^{-\sin x}+\sin x-1$. **32.15.** $y=e^{-2x^2}\left(C+\frac{1}{2}x^2\right)^2$, $y=0$. **32.16.** $y=\frac{\sin x}{\sqrt{2\cos x+C}}$, $y=0$. **32.17.** $x^2=Ce^{\sin y}-2(\sin y+1)$. **32.18.** $x=\frac{y}{C-2y^2}$, $y=0$. **32.19.** $y^3=\frac{1}{3-2e^{\cos x}}$. **32.20.** $x^2=\frac{1}{y+3y^2}$. **32.21.** $y=\frac{2d^2}{x}+Cx^2$.

## 33. Уравнения в полных дифференциалах. Приложения дифференциальных уравнений 1-ого порядка

**33.1.** $x^2+xy+y^2=C$. **33.2.** $5x^2y-8xy+x+3y=C$. **33.3.** $x^2+ye^{\frac{x}{y}}=C$. **33.4.** $x^2\cos^2 y+y^2=C$. **33.5.** $xe^{-y}-y^2=C$. **33.6.** $e^{xy^2}+3x^2-4y^2-8x=C$. **33.7.** $y^2=4x$; $xy^2=4$. **33.8.** $y=\dfrac{x}{x-1}$, $y=-\dfrac{3x}{x+1}$. **33.9.** $(x+C)^2+y^2=a^2$. **33.10.** $y^2=4(x-1)$; $\dfrac{(x+1)^2}{4}+\dfrac{y^2}{8}=1$. **33.11.** $x=y(3\pm\ln y)$. **33.12.** 16.900 руб.

## 34. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка

**34.1.** $y=(C_1+\operatorname{arctg} x)x-\ln\sqrt{1+x^2}+C_2$. **34.2.** $y=\dfrac{x^3}{6}-\sin x+C_1x+C_2$. **34.3.** $y=\dfrac{x^6}{120}+\dfrac{x^4}{8}+C_1x^2+C_2x+C_3$. **34.4.** $y=\dfrac{1}{2}(x+3)\ln(x+3)-\dfrac{1}{2}x+C_1x^3+C_2x^2+C_3x+C_4$. **34.5.** $y=\dfrac{1}{C_1}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{C_1}+C_2$, $y=\dfrac{1}{2C_1}\ln\left|\dfrac{x-C_1}{x+C_1}\right|+C_2$, $y=C-\dfrac{1}{x}$. **34.6.** $C_1^2y=(C_1^2x^2+1)\operatorname{arctg} C_1x-C_1x+C_2$, $2y=k\pi x^2+C$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$. **34.7.** $y=\dfrac{1}{C_1}e^{C_1x+1}\left(x-\dfrac{1}{C_1}\right)+C_2$, $y=\dfrac{ex^2}{2}+C$. **34.8.** $y=\dfrac{1}{x}+C_1\ln x+C_2$. **34.9.** $2y=C_1\cos 2x+(1+2C_1)x^2+C_2x+C_3$. **34.10.** $2y=C_1x^2-2C_1^2(x+C_1)\ln|x+C_1|+C_2x+C_3$, $y=\dfrac{x^3}{6}+C_4x+C_5$. **34.11.** $y=\dfrac{1}{12}(x^3+6x^2)+C_1x\ln|x|+C_2x+C_3$. **34.12.** $y=\pm\left(\dfrac{2}{5}\sqrt{(x+C_1)^5}-\dfrac{2}{3}C_1\sqrt{(x+C_1)^3}+C_2\right)$. **34.13.** $x=y+C_1\ln|y-C_1|+C_2$, $y=C$. **34.14.** $\sqrt{C_1y^2+1}=C_2\pm C_1x$, $y^2=2x+C$. **34.15.** $\ln\left|C_1^2y+1+C_1\sqrt{C_1^2y^2+2y}\right|=\pm C_1x+C_2$, $\arcsin(C_1^2y-1)=C_1x+C_2$, $2y=(x+C)^2$, $y=0$. **34.16.** $\ln y=C_1\operatorname{tg}(C_1x+C_2)$, $\ln\left|\dfrac{\ln y-C_1}{\ln y+C_1}\right|=2C_1x+C_2$, $(C-x)\ln y=1$, $y=C$. **34.17.** $\operatorname{ctg} y=C_2+C_1x$, $y=C$. **34.18.** $y=1+\dfrac{1}{C_1x+C_2}$. **34.19.** $y=x^3+3x+1$. **34.20.** $y=\dfrac{2}{5}x^2\sqrt{2x}-\dfrac{16}{5}$. **34.21.** $y=2\ln|x+1|-x+1$. **34.22.** $y=\operatorname{tg} x$, $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$. **34.23.** $y=e^{\frac{x^2}{2}}$. **34.24.** $y=1+\sin x$. **34.25.** $y=1-x$.

## 35. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

**35.1.** $y^{IV} - 6y''' + 14y'' - 16y' + 5y = 0,\ y = (C_1x + C_2)e^x + e^{2x}(C_3\cos x + C_4\sin x)$. **35.2.** $y^{IV} + 4y''' + 6y'' + 4y' + y = 0,\ y = (C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4)e^{-x}$. **35.3.** $y^{VII} + 2y^V + y''' = 0,\ y = C_1x^2 + C_2x + C_3 + (C_4x + C_5)\cos x + (C_6x + C_7)\sin x$. **35.4.** $y^{IV} - 2y'' + y = 0,\ y = (C_1x + C_2)e^x + (C_3x + C_4)e^{-x}$. **35.5.** $y = C_1x + C_2 + (C_3x^2 + C_4x + C_5)e^{2x} + e^{2x}(C_6\cos 3x + C_7\sin 3x) + (C_8x + C_9)\cos x + (C_{10}x + C_{11})\sin x$. **35.6.** $y = (C_1x^2 + C_2x + C_3)e^x + C_4e^{-3x} + e^x\big[(C_5x + C_6)\cos 2x + (C_7x + C_8)\sin 2x\big] + e^{-3x}(C_9\cos x + C_{10}\sin x)$. **35.7.** $y = C_1e^{2x} + (C_2x^3 + C_3x^2 + C_4x + C_5)e^{-2x} + e^{2x}\big[(C_6x^2 + C_7x + C_8)\cos 3x + (C_9x^2 + C_{10}x + C_{11})\sin 3x\big]$. **35.8.** $y = C_1x + C_2 + (C_3x^4 + C_4x^3 + C_5x^2 + C_6x + C_7)e^{-x} + e^{-2x}(C_8\cos 4x + C_9\sin 4x)$. **35.9.** $y = C_1e^{3x} + C_2e^x$. **35.10.** $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-x}$. **35.11.** $y = (C_1x + C_2)e^{2x}$. **35.12.** $y = (C_1x + C_2)e^{-3x}$. **35.13.** $y = e^{-3x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$. **35.14.** $y = e^{2x}(C_1\cos x + C_2\sin x)$. **35.15.** $y = C_1 + C_2e^{-3x}$. **35.16.** $y = e^{-x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x)$. **35.17.** $y = C_1e^x + e^{2x}(C_2\cos 3x + C_3\sin 3x)$. **35.18.** $y = C_1x + C_2 + (C_3x + C_4)e^{-x}$. **35.19.** $y = (C_1x + C_2)e^{2x} + (C_3x + C_4)e^{-2x}$. **35.20.** $y = C_1x^2 + C_2x + C_3 + (C_4x + C_5)e^{3x}$. **35.21.** $y = (C_1x + C_2)e^x + (C_3x + C_4)\cos x + (C_5x + C_6)\sin x$. **35.22.** $y = e^x$. **35.23.** $y = (7 - 3x)e^{x-2}$. **35.24.** $y = 2 + e^{-x}$. **35.25.** $y = \sin x$. **35.26.** $y = \frac{5}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{3x}$.

### 36. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

**36.1.** $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + (e^{-x} + e^{-2x})\ln(e^x + 1) - e^{-x}$. **36.2.** $y = (C_1 - \ln|\sin x|)\cos 2x + \left(C_2 - x - \frac{1}{2}\operatorname{ctg} x\right)\sin 2x$. **36.3.** $y = \left(C_1 + C_2x + \sqrt{4 - x^2} + x\arcsin\frac{x}{2}\right)e^x$. **36.4.** $y = \left(C_1 + C_2x + \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{3}{4}x^2\right)e^{-2x}$. **36.5.** $y = \left(x - \frac{1}{2}\ln(e^{2x} + 1) + C_1\right)e^{2x} + \left(C_2 - \operatorname{arctg} e^x\right)e^x$. **36.6.** $y = \left(\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}\ln\left|\frac{\sin 2x - 1}{\sin 2x + 1}\right| + C_1\right)\cos 2x + \left(C_2 - \frac{1}{4}\cos 2x\right)\sin 2x$. **36.7.** $y = e^x\big((C_1 - x)\cos x + (\ln|\sin x| + C_2)\sin x\big)$. **36.8.** $y = e^x\left(C_1x + C_2 + \frac{1}{2x}\right)$. **36.9.** $y = e^x\left(\frac{1}{2}\ln(e^x + 2) + C_1\right) + e^{-x}\left(-\frac{1}{4}e^{2x} + e^x - 2\ln(e^x + 2) + C_2\right)$. **36.10.** $y = e^x\left(\left(\frac{x^2}{2} + 3x + \frac{9}{2}\right)\ln(x + 3) - \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + C_1x + C_2\right)$. **36.11.** $y = \left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{2}\ln(e^x + 1) + 1\right)e^x + \frac{1}{2}\left(1 - \ln(e^x + 1)\right)e^{-x}$. **36.12.** $y = \left(\arcsin\frac{x}{2} + 4\right)xe^x + (\sqrt{4 - x^2} - 1)e^x$. **36.13.** $y^* = (Ax^4 +$

$Bx^3+Cx^2)e^{4x}$. **36.14.** $y^*=Ax^2+Bx+(Cx+D)\cos 8x+(Ex+F)\sin 8x$. **36.15.** $y^*=(Ax^3+Bx^2)\cos x+(Cx^3+Dx^2)\sin x$. **36.16.** $y^*=xe^{2x}\big((Ax^2+Bx+C)\cos 3x+(Dx^2+Ex+F)\sin 3x\big)$. **36.17.** $y=C_1e^x+C_2e^{-x}-x^2e^{-x}$. **36.18.** $y=(C_1x^2+C_2x+C_3)e^x+2x^3e^x$. **36.19.** $y=C_1e^x+C_2e^{2x}-(x^2+2x)e^x$. **36.20.** $y=C_1+C_2e^{2x}-(x^2+4)e^x$. **36.21.** $y=(C_1x+C_2)e^{2x}+(x^3+2x^2)e^{2x}$. **36.22.** $y=C_1x+C_2+C_3e^{3x}+x^5+2x^4+2x^3+2x^2$. **36.23.** $y=C_1e^x+C_2e^{-x}-x\cos x+\sin x$. **36.24.** $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+2\cos 2x-\sin 2x$. **36.25.** $y=C_1\cos x+C_2\sin x+e^{-x}\cos x-2e^{-x}\sin x$. **36.26.** $y=C_1+C_2e^{-x}+(x+1)\cos 2x+(2x-1)\sin 2x$. **36.27.** $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x-2x\cos 2x$. **36.28.** $y=C_1\cos x+C_2\sin x+2x\cos x+2x^2\sin x$. **36.29.** $y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)+xe^x(2\sin x-\cos x)$. **36.30.** $y=C_1x+C_2+C_3\cos x+C_4\sin x+x^2(x^2+2x-12)$. **36.31.** $y=e^{2x-1}-2e^x+e-1$. **36.32.** $y=e^x-e^{-x}+x^2$. **36.33.** $y=\dfrac{x}{4}+\cos 2x+\dfrac{7}{16}\pi\sin 2x$. **36.34.** $y=2\cos x-5\sin x+2e^x$.

### 37. Системы дифференциальных уравнений

**37.1.** $y=C_1e^x+C_2e^{2x}$, $z=C_1e^x+2C_2e^{2x}$. **37.2.** $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$, $z=2C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$. **37.3.** $y=e^{3x}(-2C_1-2C_2x+C_2)$, $z=e^{3x}(C_1+C_2x)$. **37.4.** $y=e^{4x}(C_1+C_2x+C_2)$, $z=e^{4x}(C_1+C_2x)$. **37.5.** $y=e^{-2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)$, $z=\dfrac{1}{5}e^{-2x}\big((4C_1-3C_2)\cos 3x+(3C_1+4C_2)\sin 3x\big)$. **37.6.** $y=e^{-x}\big((2C_1+C_2)\cos x+(2C_2-C_1)\sin x\big)$, $z=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$. **37.7.** $y=e^x(C_1\sin 2x-C_2\cos 2x)$, $z=e^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$. **37.8.** $x=C_1e^t-C_2\sin t+C_3\cos t$, $y=C_1e^t+C_2\cos t+C_3\sin t$, $z=(C_2+C_3)\cos t+(C_3-C_2)\sin t$. **37.9.** $y=3e^{2x}$, $z=e^{2x}$. **37.10.** $y=2xe^{-3x}$, $z=(1-2x)e^{-3x}$. **37.11.** $y=e^x(2\cos 3x-\sin 3x)$, $z=e^x(2\sin 3x+\cos 3x)$. **37.12.** $x=e^{2t}+e^{-t}$, $y=e^{2t}+e^{-t}$, $z=e^{2t}-2e^{-t}$. **37.13.** $y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x-1)$, $z=e^x(C_1\sin x-C_2\cos x)$. **37.14.** $y=e^{2x}\left(C_1+C_2x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{2}-3e^x\right)$, $z=e^{2x}\left(C_1-\dfrac{C_2}{3}+C_2x+\dfrac{x^3}{2}-2e^x\right)$.

### 38. Числовые ряды с положительными членами

**38.1.** $\dfrac{1}{4}$. **38.2.** $\dfrac{1}{2}$. **38.7.** Расходится. **38.8.** Сходится. **38.9.** Расходится. **38.10.** Сходится. **38.11.** Сходится. **38.12.** Расходится. **38.13.** Сходится. **38.14.** Расходится. **38.15.** Сходится. **38.16.** Сходится. **38.17.** Сходится. **38.18.** Сходится. **38.19.** Сходится. **38.20.** Расходится. **38.21.** Расходится. **38.22.** Сходится. **38.23.** Сходится. **38.24.** Расходится. **38.25.** Расходится. **38.26.** Сходится. **38.27.** Сходится. **38.28.** Сходится. **38.29.** Расходится. **38.30.** Сходится.

**38.31.** Сходится. **38.32.** Сходится. **38.33.** Расходится. **38.34.** Расходится $\left(\text{Использовать формулу Стирлинга} \quad n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta}{12n}}, \quad 0<\theta<1\right)$. **38.35.** Расходится. **38.36.** Расходится. **38.37.** Сходится. **38.38.** Сходится. **38.39.** Расходится.

### 39. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница

**39.1.** Сходится условно. **39.2.** Сходится абсолютно. **39.3.** Расходится. **39.4.** Сходится условно. **39.5.** Сходится абсолютно. **39.6.** Расходится. **39.7.** Сходится условно. **39.8.** Сходится условно. **39.9.** Сходится условно. **39.10.** Сходится абсолютно. **39.11.** Расходится. **39.12.** Абсолютно сходится. **39.13.** Расходится. **39.14.** Сходится условно. **39.15.** Сходится абсолютно.

### 40. Функциональные ряды

**40.1.** $(0,+\infty)$; абсолютно сходится при $x\in(1,+\infty)$. **40.2.** $(-\infty,+\infty)$; сходимость всюду абсолютная. **40.3.** $(-\infty,-3)\cup(-3,+\infty)$; сходимость всюду абсолютная. **40.4.** $(-\infty,-1)$; сходимость всюду абсолютная. **40.5.** $(0,+\infty)$; сходимость всюду абсолютная. **40.6.** $\left[\frac{1}{e},e\right)$; сходится абсолютно при $x\in\left(\frac{1}{e},e\right)$. **40.7.** $(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$. **40.8.** $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$. **40.9.** $(-\infty,3-\sqrt{2})\cup(3+\sqrt{2},+\infty)$. **40.10.** $(-\infty,0)$. **40.11.** $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$. **40.12.** $(0,+\infty)$. **40.13.** Сходится при $x\in(-\infty,-3)\cup[-1,+\infty)$; равномерно сходится при $x\in(-\infty,-3-\delta]\cup[-1,+\infty)$. **40.14.** Сходится при $x\in(-\infty,-2]\cup(0,+\infty)$; равномерно сходится при $(-\infty,-2]\cup[\delta,+\infty)$. **40.15.** Равномерно сходится при $x\in[0,2]$. **40.16.** Равномерно сходится при $x\in(-\infty,-2]\cup[0,+\infty)$. **40.17.** Равномерно сходится при $x\in(-\infty,0]$. **40.18.** Равномерно сходится при $(-\infty,+\infty)$.

### 41. Степенные ряды

**41.1.** Сходится абсолютно и равномерно при $x\in[-1,3]$. **41.2.** Сходится абсолютно и равномерно при $x\in[-3,1]$. **41.3.** Сходится абсолютно при $x\in(-3,-1)$; сходится равномерно при $x\in[-3,-1]$; в точках $x=-3$ и $x=-1$ сходится условно. **41.4.** Сходится абсолютно при $x\in\left(\frac{7}{2},\frac{9}{2}\right)$; сходится равномерно при $x\in\left[\frac{7}{2}+\delta,\frac{9}{2}\right]$; в точке $x=\frac{9}{2}$ сходится условно, в точке $x=\frac{7}{2}$ расходится. **41.5.** Сходится абсолютно при $x\in(3-\sqrt{3},3+\sqrt{3})$;

сходится равномерно при $x\in[3-\sqrt{3},3+\sqrt{3}]$; в точках $x=3\pm\sqrt{3}$ сходится условно. **41.6.** Сходится абсолютно при $x\in(-1,1)$; сходится равномерно при $x\in[-1+\delta,1-\delta]$; в точках $x=\pm1$ расходится. **41.7.** Сходится абсолютно при $x\in(-7,9)$; сходится равномерно при $x\in[-7+\delta,9-\delta]$; в точках $x=-7$ и $x=9$ расходится. **41.8.** Сходится абсолютно при $(-\infty,+\infty)$; сходится равномерно при $x\in[-R,+R]$ $\forall R>0$. **41.9.** Сходится абсолютно при $x\in(0,2)$; сходится равномерно при $x\in[\delta,2-\delta]$; в точках $x=0$ и $x=2$ расходится. **41.10.** Сходится абсолютно при $x\in(3-\sqrt{3},3+\sqrt{3})$; сходится равномерно при $x\in[3-\sqrt{3}+\delta,3+\sqrt{3}-\delta]$; в точках $x=3\pm\sqrt{3}$ расходится. **41.11.** Сходится абсолютно при $x\in(-1,7)$; сходится равномерно при $x\in[-1+\delta,7]$; в точке $x=7$ сходится условно, в точке $x=-1$ расходится. **41.12.** Сходится абсолютно и равномерно при $x\in[-2,2]$. **41.13.** Сходится абсолютно при $x\in(-2,2)$; сходится равномерно при $x\in[-2+\delta,2]$; в точке $x=-2$ расходится, в точке $x=2$ сходится условно. **41.14.** Сходится абсолютно при $x\in\left(-\dfrac{5}{4},\dfrac{13}{4}\right)$; сходится равномерно при $x\in\left[-\dfrac{5}{4}+\delta,\dfrac{13}{4}-\delta\right]$; в точках $x=-\dfrac{5}{4}$ и $x=\dfrac{13}{4}$ расходится. **41.15.** Сходится абсолютно и равномерно при $x\in\left[3-\dfrac{1}{\sqrt{2}},3+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$. **41.16.** Сходится абсолютно и равномерно при $x\in[-4,-2]$. **41.17.** Сходится абсолютно и равномерно при $x\in[3-\sqrt{2},3+\sqrt{2}]$. **41.18.** Сходится абсолютно и равномерно при $x\in[-1,1]$.

## 42. Разложение функций в ряд Тейлора и Маклорена

**42.1.** $f(x)=x+\dfrac{2}{3!}x^3+\dfrac{16}{5!}x^5+\ldots$. **42.2.** $f(x)=1+\dfrac{1}{2!}x^2+\dfrac{5}{4!}x^4+\ldots$. **42.3.** $f(x)=x-\dfrac{2}{3!}x^3+\dfrac{16}{5!}x^5+\ldots$. **42.4.** $f(x)=1+x-\dfrac{2}{3!}x^3-\dfrac{4}{4!}x^4+\ldots$. **42.5.** $f(x)=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{(2x)^{2n}}{(2n)!}$. **42.6.** $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{4^{n+1}}$. **42.7.** $f(x)=5\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^n}{2^{n+1}}$. **42.8.** $f(x)=2\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$. **42.9.** $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{7n+1}{2^{n+2}}x^n$. **42.10.** $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{4^nx^{n+1}}{3^{n+1}}$. **42.11.** $f(x)=\dfrac{1}{3}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!3^{2n+1}}x^{2n}$. **42.12.** $f(x)=\sqrt{2}\left(1-\dfrac{x}{4}-\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(2n-3)!!}{(2n)!!2^n}x^n\right)$. **42.13.** $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{5}{2^{n+1}}-\dfrac{7}{3^{n+1}}\right)x^n$. **42.14.** $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\big(1+$

$(-1)^n 2^{n+1}\big)x^n$. **42.15.** $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{n-1}(n+2)}{n!}x^n$. **42.16.** $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{4n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1}$. **42.17.** $f(x)=\ln\frac{2}{3}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)\frac{x^n}{n}$. **42.18.** $f(x)=\ln 2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\frac{x^n}{n}$. **42.19.** $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. **42.20.** $f(x)=x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. **42.21.** $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2^n n!(2n+1)}$. **42.22.** $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n+2}}{2(2n+1)!(2n+1)}$. **42.23.** $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(x-2)^n$. **42.24.** $f(x)=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(x-3)^{2n}}{4^{n+1}}$. **42.25.** $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)(x+4)^n$. **42.26.** $f(x)=\frac{1}{2}\left(1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{(x-2)^n}{4^n}\right)$. **42.27.** $f(x)=3\ln 2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{5^n(x-1)^n}{8^n n}$. **42.28.** $f(x)=\ln 4+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x+3)^{2n}}{4^n n}$. **42.29.** $|x|<1$; $\frac{2}{(1-x)^3}$. **42.30.** $|x+1|<1$; $\frac{x+1}{x^2}$. **42.31.** $|x|<2$; $\frac{1}{4+x^2}$. **42.32.** $|x-3|<1$; $-\frac{\ln(4-x)}{x-3}$ при $x\neq 3$, 0 при $x=3$. **42.33.** $|x|<1$; $\frac{1}{(1+x^2)^2}$. **42.34.** $|x|<\infty$; $(1+x)e^x$.

### 43. Применение степенных рядов

**43.1.** 10000 при $x=1$ или 10 при $x=-0,5$. **43.2.** 2 члена, предельная абсолютная погрешность $\varepsilon<\frac{1}{24}\left(\frac{\pi}{18}\right)^4=0,0000386<0,0001$. **43.3.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{2n^2}$. **43.4.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!(4n+3)}$. **43.5.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n+1}}{(2n)!(4n+1)}$. **43.6.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n+1)!!x^{3n+1}}{2^n n!(3n+1)}$. **43.7.** $0,2800$. **43.8.** $0,1991$. **43.13.** $\ln 2$. **43.14.** $e-1$. **43.15.** $\frac{1}{2}\ln 2$. **43.16.** $\sin 1$. **43.17.** $\cos\frac{\sqrt{3}}{3}$. **43.18.** $e^2$. **43.19.** $y(x)=1+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2\cdot 3\cdot 6\cdot 7\ldots(4n+2)(4n+3)}{(4n+5)!}x^{4n+5}$. **43.20.** $y(x)=1+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1\cdot 2\cdot 5\cdot 6\ldots(4n+1)(4n+2)}{(4n+4)!}x^{4n+4}+\frac{2\cdot 3\cdot 6\cdot 7\ldots(4n+2)(4n+3)}{(4n+5)!}x^{4n+5}\right)$.

**43.21.** $y(x) = 1 + 2x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{5x^3}{3} - \dfrac{3x^4}{4} + \ldots$. **43.22.** $y(x) = 1 + x - \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{6} + \dfrac{x^6}{45} + \ldots$. **43.23.** $y(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{2^n n!} x^{2n} = 1 - e^{-\frac{x^2}{2}}$. **43.24.** $y(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^{n-1}(n-1)!}{(2n+1)!} x^{2n+1}$.