Министерство образования и науки Российской Федерации
Сибирский федеральный университет

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Методические указания по выполнению самостоятельной работы

Красноярск
СФУ
2012

УДК 517.91
ББК 22.161.61(Я73)
Ш68

Рецензенты: д-р.физ.-мат. наук, профессор А.М. Кытманов, СФУ
д-р.физ.-мат. наук, профессор А.К. Цих, СФУ

Составители: А.А. Шлапунов, Д.П. Федченко, В.М. Трутнев

Ш68 Функциональный анализ и интегральные уравнения : метод. указания по выполнению самостоятельной работы / сост. А.А. Шлапунов, Д.П. Федченко, В.М. Трутнев. – Красноярск : Сиб. федер. ун-т, 2012. — 35 с.

Издание обеспечивает самостоятельную работу студентов по дисциплине "Функциональный анализ и интегральные уравнения" для студентов направления подготовки 010100.62 "Математика", а также специальности 010101.65 "Математика". В частности, оно определяет состав, объем, задания, а также содержит методические указания по выполнению всех видов самостоятельной работы, предусмотренных по данной дисциплине.

УДК 517.91
ББК 22.161.61(Я73)

Содержание

1 Общие сведения

Согласно программе [1], самостоятельное изучение дисциплины "Функциональный анализ и интегральные уравнения" для студентов направлений подготовки 010100.62 "Математика", и специальности 010101.65 "Математика" составляет 68 часов из общего числа (204 часов), выделенных на дисциплину в учебном плане.

Самостоятельное изучение теоретического курса составляет 34 часа, в том числе, 16 часов в семестре 5 и 18 часов в семестре 6.

Самостоятельному решению задач посвящено 34 часа в том числе, 18 часов в семестре 5 и 16 часов в семестре 6.

Таблица 1.

Вид учебной работы	часов	семестр 5	семестр 6
Общая трудоемкость дисциплины	**204**	**102**	**102**
Аудиторная работа:	136	68	68
Лекции	68	34	34
Семинарские занятия	68	34	34
Самостоятельная работа:	**68**	**34**	**34**
Изучение теоретического курса	34	16	18
Решение задач	34	18	16

2 Задания по самостоятельному изучению теоретического курса

Для самостоятельного изучения теоретического курса рекомендуется использовать учебное пособие [2] и книги [4], [5].

Сдача заданий по самостоятельному изучению теоретического курса происходит во время промежуточного контроля после окончания каждого модуля.

Для модулей 1 и 2 предусмотрено по по 8 часов на каждый, а для модулей 3 и 4 – по 9 часов на каждый.

Кроме того, согласно программе дисциплины, следующие темы теоретического полностью вынесены на самостоятельное изучение.

Модуль 1.

1.5. Сходимость (в метрическом пространстве) на языке окрестностей. Эквивалентность сходимости и сходимости на языке окрестностей (0,5 часа).

1.6. Непрерывность (в метрическом пространстве) по Гейне (секвенциальная непрерывность). Эквивалентность непрерывности и непрерывности по Гейне (0,5 часа).

1.17. Применение принципа сжимающих отображений к доказательству теоремы о существовании и единственности решения обыкновенных дифференциальных уравнений (1 час).

Модуль 2.

2.1. Линейные пространства. Линейная зависимость, размерность, базис, подпространства. Примеры линейных пространств и их подпространств (0,5 часа).

2.3. Теорема о пополнении нормированных пространств (0,5 часа).

2.5. Теорема о пополнении евклидовых пространств (0,5 часа).

2.11. Свойство параллелограмма (1 час).

2.12. Комплексные евклидовы пространств. Скалярное произведение над полем $\mathbb{C}$ (0,5 часа).

2.15. Компактные множества в пространстве непрерывных функций. Теорема Арцела (1 час).

2.18. Теорема Хана-Банаха в комплексных пространствах (0,5 часа).

2.23. $*$-слабая сходимость в сопряженном пространстве. Ограниченность $*$-слабо сходящейся последовательности (0,5 часа).

3 Задачи для самостоятельного решения задач и методические указания по их решению

Задачи даны из учебного пособия [3], для их решения можно также использовать задачник [6].

Для самостоятельного решения задач в рамках модулей 1 и 2 предусмотрено по 9 часов на каждый, а для модулей 3 и 4 – по 8 часов на каждый.

Сдача задач в течении теоретического обучения в соответствующем модуле происходит во время, выделенное деканатом для контроля самостоятельной работы студента; принимает их преподаватель, отвечающий за практические (семинарские) занятия.

3.1 Раздел I. Метрические пространства

Задачи по теме 1.2. Метрические пространства.

Задачи: N 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 17, 19, 20, 21, 22, 33, 34.

Приведем решение одной из задач по данной теме.

Пример 1. Доказать, что функция $\rho(x, y) = |x^3 - y^3|$ задает метрику на действительной оси.

Решение задачи.

Функция $\rho(x, y)$ является метрикой, если она определена и неотрицательна на $\mathbb{R}^2$ и:

1. $\rho(x, y) = 0$ $x = y$ тогда и только тогда, когда
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$для всех x, y
3. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ для всех x, y, z.

Ясно, что $\rho(x,y) = |x^3 - y^3| \geq 0$ для любых $x, y \in \mathbb{R}$ в силу свойств функции модуль. Пусть $\rho(x,y) = |x^3 - y^3| = 0$, получаем, что $x = y$ в силу свойств функции модуль и строгого возрастания кубической параболы.

Обратно, если $x = y$, то $\rho(x,y) = |x^3 - y^3| = 0$. Далее

$$\rho(x,y) = |x^3 - y^3| = |y^3 - x^3| = \rho(y,x)$$

в силу свойств функции модуль. Легко видеть, что

$$|x^3 - y^3| = |(x^3 - z^3) + (z^3 - y^3)| \leq |x^3 - z^3| + |z^3 - y^3|,$$

откуда сразу же получаем правило треугольника $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$. В результате, имеем, что функция $\rho(x,y) = |x^3 - y^3|$ является метрикой на $\mathbb{R}$, т.к. для нее выполнены все аксиомы метрики.

Задачи по теме 1.4. Сходимость в метрических пространствах.
Задачи: N 43–48, 50–62, 64–67, 69–72.

Приведем решение двух задач по данной теме.

Пример 2. Показать, что сходимость в $\mathbb{R}^m_\infty$ покоординатная.

Решение задачи.

Рассмотрим метрическое пространство $\mathbb{R}^m_\infty$. Метрика в нем вводится следующим образом:

$$\rho(x,y) = \max_{1 \leq i \leq m} |x_i - y_i|.$$

Пусть $x^{(n)}n = (x_1^{(n)}, \dots x_1^{(n)})$ и $x^{(n)} \to x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots x_1^{(0)}$ при $n \to \infty$. Тогда

$$\rho(x^{(n)}, x^{(0)}) = \max_i |x_i^{(n)} - x_i^{(0)}| \to 0, \;\; n \to \infty;$$

значит, $x_i^{(n)} \to x_i^{(0)}$ $(n \to \infty, \; i = 1, 2, \dots, m)$. Это означает, что каждая координата вектора $x^{(n)}$ сходится к соответствующей координате вектора $x^{(0)}$.

Пример 3. Показать, что в конечномерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ слабая сходимость совпадает с сильной.

Действительно, пусть $e_1, \ldots, e_n$ – какой либо ортогональный нормированный базис в $\mathbb{R}^n$ и $\{x^{(k)}\}$ – последовательность в $\mathbb{R}^n$, слабо сходящаяся к элементу x. Пусть

$$x^{(k)} = x_1^{(k)} e_1 + \ldots + x_n^{(k)} e_n$$

и

$$x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n.$$

Тогда

$$\begin{gathered} x_1^{(k)} = (x^{(k)}, e_1) \to (x, e_1) = x_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^{(k)} = (x^{(k)}, e_n) \to (x, e_n) = x_n, \end{gathered}$$

т.е. последовательность $\{x^{(k)}\}$ покоординатно сходится к x. Но тогда

$$\rho(x^{(k)}, x) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i^{(k)} - x_i)^2 \right)^{1/2} \to 0,$$

т.е. $\{x^{(k)}\}$ сильно сходится к x. Поскольку из сильной сходимости всегда вытекает слабая, равносильность этих сходимостей в $\mathbb{R}^n$ доказана.

Задачи по темам 1.7-1.8. Открытые и замкнутые множества.

Задачи: N 73–81, 85–93.

Приведем решение одной из задач по данной теме.

Пример 4. Пусть X – произвольное множество. Доказать, что

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x = y, \\ \alpha & \text{при} \quad x \neq y, \quad \alpha > 0, \end{cases}$$

определяет метрику на X. Доказать, что любое подмножество X является одновременно и открытым и замкнутым множеством.

Решение задачи.

Функция $\rho(x, y)$ принимает всего два значения: 0 и $\alpha > 0$, откуда сразу же получаем, что $\rho(x, y) \geq 0$ для любых x и y из X. Легко видеть, что $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$. Симметрия функции $\rho(x, y)$ относительно переменных x и y тоже очевидна. Осталось только проверить выполнение аксиомы треугольника, т.е. выполнение неравенства $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ для любых $x, y, z \in X$. Как уже отмечалось выше функция $\rho(x, y)$ может принимать всего два значения, а следовательно возможно лишь несколько вариантов для неравенства. Заметим, что аксиома треугольника не выполняется в одном единственном случае, когда $\rho(x, y) = \alpha,\ \rho(x, z) = 0,\ \rho(z, y) = 0$, но давайте увидим, что этот случай невозможен. Действительно, т.к. $\rho(x, y) = \alpha$ получаем, что $x \neq y$, но с другой стороны $x = z = y$, получили противоречие.

Пусть множество $K \subset X$. Возьмем произвольную точку $k \in K$ и рассмотрим шар $B(k, \alpha/2)$. $B(k, \alpha/2) \subset K$, т.к. он состоит из одной точки k. Получаем, что вместе с каждой точкой k в множестве K лежит и открытый шар $B(k, \alpha/2)$, т.е. множество K открыто, а следовательно $X \setminus K$ – замкнуто. Далее стоит рассмотреть множество $X \setminus K \subset X$. Из тех же самых соображений, что и ранее получим открытость множества $X \setminus K$ и замкнутость множества K.

Задачи по темам 1.10, 1.11. Полнота.

Задачи: N 97–99, 101-105, 107, 109, 111-114.

Полнота пространств $\mathbb{R}^n_\infty$, $\mathcal{M}_0$ и $\mathcal{M}$.

Задачи по теме 1.15. Принцип сжимающих отображений.

Задачи: N 116, 118, 124, 125, 127, 129–142.

Пример 5. Рассмотрим метрическое пространство (X, ρ), где $X = \mathbb{R} \setminus$

$\{0\}$, а $\rho(x,y) = |x-y|$. Выяснить является ли отображение $f(x) = \frac{1}{2}x$ сжимающим. Найти неподвижные точки, если они есть.

Решение задачи.

Отображение $f(x)$ является сжимающим, если оно отображает пространство X в себя и $\rho(f(x), f(y)) \leq \alpha|x-y|$, $0 < \alpha < 1$. Легко видеть, что отображение $f(x) = \frac{1}{2}x$ отображает пространство X в себя, т.е. $f(x) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и выполнено равенство:

$$\rho(f(x), f(y)) = \left|\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y\right| = \frac{1}{2}\,|x-y|,\ \ 0 < \alpha = \frac{1}{2} < 1.$$

Значит $f(x)$ является сжимающим отображением.

Напомним, что x_0 – неподвижная точка отображения $f(x)$, если $f(x_0) = x_0$. Отображение $f(x)$ не имеет неподвижных точек, т.к. при $x > 0$ $f(x) = \frac{1}{2}x < x$, а при $x < 0$ $f(x) = \frac{1}{2}x > x$. Легко видеть, что равенство не достигается ни в одной точке множества $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Отображение $f(x)$ не имеет неподвижных точек в X.

Ясно, что причиной этого является неполнота пространства.

Пример 6. Найти отрезок на котором находится корень уравнения $f(x) = x^7 + 4x^5 + 2x - 1$ и решить его приближенно с точностью до 0,01.

Решение задачи.

Так как $f'(x) = 7x^6 + 20x^4 + 2 > 0$ для всех x получаем, что уравнение имеет не более одного решения. Кроме того, $f(0) = -1$ и $f(1) = 6$ откуда следует, что корень $x^* \in [0;1]$.

Запишем уравнение $x^7 + 4x^5 + 2x - 1 = 0$ в виде $\Phi(x) = x$, где отображение Φ удовлетворяет всем условиям теоремы о сжимающем отображении.

$$p = \max_{x\in[0;1]}|f'(x)| = \max_{x\in[0;1]}|7x^6 + 20x^4 + 2| = 29.$$

Уравнение $f(x) = 0$ запишем в виде $x - \frac{1}{p}f(x) = x$.

$$x - \frac{1}{29}(x^7 + 4x^5 + 2x - 1) = x,$$

$$-\frac{1}{29}x^7 - \frac{4}{29}x^5 + \frac{27}{29}x + \frac{1}{29} = x.$$

В итоге получаем равенство для отображения $\Phi(x)$:

$$\Phi(x) = -\frac{1}{29}x^7 - \frac{4}{29}x^5 + \frac{27}{29}x + \frac{1}{29},$$

которое удовлетворяет всем условиям теоремы о сжимающем отображении:

1. $\Phi(x)$ определено на полном метрическом пространстве – отрезке $[0;1]$.
2. $\Phi(x)$ сжимающее, так как

$$\max_{x\in[0;1]}|\Phi'(x)| = \max_{x\in[0;1]}\left|-\frac{7}{29}x^6 - \frac{20}{29}x^4 + \frac{27}{29}\right| = \frac{27}{29} < 1,$$

причем коэффициент сжатия $q = \frac{27}{29}$.

3. $\Phi(x)$ переводит отрезок $[0;1]$ в себя. Действительно

$$\Phi : [0;1] \to \left[\frac{1}{29}; \frac{25}{29}\right] \subset [0;1].$$

Найдем количество итераций n, которое необходимо сделать для того, чтобы получить приближенное решение x_n уравнения, отличающееся от точного x^* не более чем на 0,01. В качестве x_0 можем взять любое число из $[0;1]$. Пусть, например, $x_0 = 0$. Тогда

$$x_1 = \Phi(x_0) = \frac{1}{29};\ \ \rho(x_0, x_1) = \frac{1}{29};\ \ q = \frac{27}{29}.$$

Найдем теперь такое n при котором

$$\frac{q^n}{1-q}\,\rho(x_0,x_1) < 0,01.$$

$$\frac{\left(\frac{27}{29}\right)^n}{\frac{2}{29}}\frac{1}{29} < 0,01,$$

$$\left(\frac{29}{27}\right)^n > 100,$$

$$\left(\frac{29}{27}\right)^{65} \approx 104.$$

Таким образом получаем, что для нахождения решения с заданной точностью достаточно сделать 65 итераций.
$\Phi(x) = -\frac{1}{29}x^7 - \frac{4}{29}x^5 + \frac{27}{29}x + \frac{1}{29},\ x_0 = 0,\ n = 65.$

3.2 Раздел II. Линейные метрические пространства и функционалы

Задачи по темам 2.1, 2.2. Линейные пространства. Нормированные пространства.

Задачи: 160, 161, 163–169, 171–175, 176–179.

Пример 7. Можно ли в линейном пространстве дважды непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций принять за норму элемента $x(t)$ следующий функционал: $|x(a)| + |x'(a)| + \| x'' \|_{C[a,b]}$.

Решение задачи.

Проверим выполнение аксиом нормы в пространстве $C^2[a,b]$. Легко видеть, что $\| x \| \geq 0$. Если $\| x \| = 0$, то $x(a) = 0$, $x'(a) = 0$, $\| x'' \|_{C[a,b]} = 0$. Из последнего равенства видно, что $x'' = 0$, откуда получаем, что $x = Ct + C_1$, $x' = C$. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} Ca + C_1 = 0, \\ C = 0. \end{cases}$$

В итоге, т.к. $C_1 = C = 0$ получаем, что $x = 0$. Обратно, если $x = 0$, то сразу же получаем, что $\| x \| = 0$.

Нетрудно показать, что $\| \lambda x \| = |\lambda x(a)| + |\lambda x'(a)| + \| \lambda x'' \|_{C[a,b]}$. Это следует из того, что $(\lambda x)' = \lambda x'$ и $(\lambda x')' = \lambda x''$. Теперь легко увидеть, что

$$\| \lambda x \| = |\lambda x(a)| + |\lambda x'(a)| + \| \lambda x'' \|_{C[a,b]} = \\ = |\lambda||x(a)| + |\lambda||x'(a)| + |\lambda| \| x'' \|_{C[a,b]} = |\lambda| \| x \| .$$

Осталось только проверить неравенство треугольника, которое немедленно следует из свойств модуля функции и того факта, что для нормы $\| x'' \|_{C[a,b]}$ неравенство треугольника выполнено.

Пример 8. Задает ли выражение

$$\| x \| = \max_{t \in [a,b]} |x(t)|.$$

норму на пространстве всех непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций? Если да, то дайте описание сходимости и геометрическую нитерпретацию шара в этом пространстве.

Решение задачи.

Аксиомы нормы 1) и 2) нормы тривиально следуют из свойств функции модуль числа. Проверим аксиому 3). По свойству модуля для любого $t \in [a, b]$ имеем

$$|x(t) + y(t)| \leq |x(t)| + |y(t)| \leq \max_{t \in [a,b]} |x(t)| + \max_{t \in [a,b]} |y(t)|.$$

Получаем, что $|x(t) + y(t)| \leq \| x \| + \| y \|$. Неравенство сохранится, если взять $\max\limits_{t \in [a,b]}$ в левой его части. В результате имеем неравенство треугольника для нормы в $C[a, b]$.

Покажем теперь, что сходимость по норме в $C[a, b]$ есть равномерная сходимость. Пусть дана последовательность $\{x_n(t)\} \subset C[a, b]$, и пусть она сходится к $x_0(t) \in C[a, b]$, т.е. $\| x - x_0 \| \to 0$ при $n \to \infty$.

Это означает следующее: для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N \in \mathbb{N}$ такой, что при любых $n > N$ справедливо неравенство

$$\max_{t\in[a,b]} |x_n(t) - x_0(t)| < \varepsilon$$

и тем более $|x_n(t) - x_0(t)| < \varepsilon$ для всех $t \in [a, b]$. Итак, сходимость но норме в $C[a, b]$ – равномерная.

Посмотрим, как выглядит в $C[a, b]$ (в вещественном случае) окрестность $B_\varepsilon(x_0) = \{x \in C[a, b] : \| x - x_0 \| < \varepsilon\}$. Для этого построим графики функций $x = x_0(t) + \varepsilon,\ x = x_0(t) - \varepsilon$. Эти два графика и отрезки прямых $t = a$ и $t = b$ ограничивают ε-полоску (полоску ширины 2ε вокруг графика $x = x_0(t)$), которая и служит ε-окрестностью точки x_0 (Изобразите графически !).

В $B_\varepsilon(x_0)$ лежат те элементы $x \in C[a, b]$, графики которых находятся строго между графиками элементов $x_0 - \varepsilon$ и $x_0 + \varepsilon$.

Пример 9. Пример неполного нормированного пространства. Доказать, что пространство $\widetilde{L}_p[-1, 1]$ не является полным.

Решение задачи.

Рассмотрим последовательность непрерывных на $[-1, 1]$ функций $\{x_n(t)\}$, которая имеет следующий вид:

$$x_n(t) = \begin{cases} -1 & \text{при} \quad t \in [-1, -1/n], \\ nt & \text{при} \quad t \in [-1/n, 1/n], \\ 1 & \text{при} \quad t \in [1/n, 1]. \end{cases}$$

Легко видеть, что $|x_n(t)| \le 1$ для любых n, но тогда $|x_{n+p}(t) - x_n(t)| \le 2$ и, следовательно,

$$\| x_{n+p} - x_n \|^p = \int_{-1}^{1} |x_{n+p}(t) - x_n(t)|^p \, dt =$$

$$= \int_{-1/n}^{1/n} |x_{n+p}(t) - x_n(t)|^p \, dt \le$$

$$\le 2^p \int_{-1/n}^{1/n} dt = \frac{2^{p+1}}{n} \to 0 \ \text{ при } \ n \to \infty.$$

Итак, $\{x_n(t)\}$ фундаментальна в смысле сходимости в среднем.

Заметим теперь, что в каждой точке $t \in [-1, 1]$ при $n \to \infty$ последовательность $x_n(t)$ имеет предел:

$$x_n(t) \to x(t) = \begin{cases} -1 & \text{при} \quad t \in [-1, 0), \\ 0 & \text{при} \quad t = 0, \\ 1 & \text{при} \quad t \in (0, 1]. \end{cases}$$

При этом $|x(t)| \leq 1$ и $|x_n(t) - x(t)| \leq 2$. Но тогда, как и выше,

$$\| \, x_n(t) - x(t) \, \|^p \leq 2^{p+1}/n \to 0, \ \ n \to \infty.$$

Итак, при $n \to \infty$ $x_n(t) \to x(t)$ в среднем на $[-1, 1]$, причем $x(t)$ – разрывная на $[-1, 1]$ функция, т.е. $x(t) \notin \widetilde{L}_p[-1, 1]$, так как это нормированное пространство состоит из функций, непрерывных на $[-1, 1]$.

Задачи по темам 2.4, 2.6. Евклидовы пространства. Свойства скалярного произведения.

Задачи: 195–197, 199–201, 205, 206, 210.

Пример 10. Показать, что в n-мерном нормированном пространстве $\mathbb{R}_p^n$ с нормой

$$\| \, x \, \|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p}$$

можно ввести скалярное произведение, согласованное с нормой только при $p = 2$.

Решение задачи.

Действительно, для этого воспользуемся свойством параллелограмма: в нормированном пространстве можно ввести скалярное произведение, согласованное с нормой тогда и только тогда, когда справедливо тождество параллелограмма:

$$\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2(\|f\|^2 + \|g\|^2).$$

Рассмотрим в $\mathbb{R}_p^n$ два вектора:

$$f = (1, 1, 0, 0, \dots, 0),$$
$$g = (1, -1, 0, 0, \dots, 0);$$

имеем

$$f + g = (2, 0, 0, 0, \dots, 0),$$
$$f - g = (0, 2, 0, 0, \dots, 0);$$

откуда

$$\| f \|_p = \| g \|_p = 2^{1/p}, \quad \| f + g \|_p = \| f - g \|_p = 2.$$

Теперь нетрудно увидеть, что тождество параллелограмма выполняется только при $p = 2$.

Пример 11. Доказать, что в пространстве $C[a, b]$ нельзя ввести скалярное произведение, согласованное с нормой этого пространства.

Решение задачи.

Рассмотрим нормированное пространство $C[a, b]$ – пространство всех непрерывных функций на отрезке $[a, b]$. Норма в этом пространстве вводится следующим способом:

$$\| x \|_{C[a,b]} = \max_{t \in [a,b]} |x(t)|.$$

Известно, что в вещественном нормированном пространстве X можно ввести скалярное произведение согласованное с нормой тогда и только тогда, когда для любых $x, y \in X$ справедливо тождество параллелограмма:

$$\| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 = 2(\| x \|^2 + \| y \|^2).$$

Рассмотрим следующие функции в пространстве $C[a, b]$:

$$x(t) = \cos\left(\frac{t-a}{b-a}\frac{\pi}{2}\right), \qquad y(t) = \sin\left(\frac{t-a}{b-a}\frac{\pi}{2}\right).$$

Легко вычислить, что $\| x \| = \| y \| = 1$. $\| x + y \| = \sqrt{2}$, а $\| x - y \| = 1$. А теперь из того, что $2(1 + 1) \neq 2 + 1$ получаем невозможность введения скалярного произведения, согласованного с нормой пространства $C[a, b]$.

Задачи по темам 2.7, 2.8, 2.9 Полные евклидовы пространства.

Задачи: N 221–225, 232, 233.

Задачи по теме 2.14. Компактные множества.

Задачи: N 282–286, 288.

Пример 12. Давайте проверим, что единичная сфера S в пространстве ℓ_2 дает пример ограниченного, но не компактного множества. Действительно, рассмотрим в S точки вида

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \ldots, 0, 0, \ldots), \\ e_2 &= (0, 1, 0, \ldots, 0, 0, \ldots), \\ e_3 &= (0, 0, 1, \ldots, 0, 0, \ldots), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_n &= (0, 0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Расстояние между любыми двумя такими точками e_n и e_m, где $n \neq m$ равно $\sqrt{2}$. Отсюда видно, что в S не может быть конечной ε-сети ни при каком $\varepsilon < \sqrt{2}/2$. Таким образом, по теореме об ε-сети, множество S не может быть предкомпактным, а значит, и компактным.

Задачи по темам 2.16, 2.17. Непрерывные линейные функционалы на нормированных пространствах. Теорема Хана Банаха.

Задачи: N 245–260, 295–302.

Пример 13. Найти норму функционала $f(x) = 2[x(1) - x(0)]$, где $x(t) \in C[0,1]$.

Решение задачи.

Оценим сверху величину $|f(x)|$:

$$|f(x)| = 2\,|x(1) - x(0)| \leq 4 \max_{t\in[0,1]} |x(t)| = 4 \parallel x \parallel_{C[0,1]} .$$

Таким образом, $\|f\| \leq 4$. Покажем, что норма функционала равняется константе участвующей в нашей оценке величины $|f(x)|$, т.е. $\parallel f \parallel = 4$ (другими словами, полученная нами оценка является наилучшей). В самом деле, среди непрерывных функций на отрезке $[0,1]$ есть и функция

$$x_0(t) = (2t-1)^3.$$

Она, очевидно, строго возрастает на отрезке $[0,1]$, при этом $x(0) = -1$, $x(1) = 1$, а значит, $\|x_0\| = 1$. Кроме того, по определению,

$$f(x_0) = 4 = 4\|x_0\|.$$

Поэтому, $\|f\| \geq 4$, и $\|f\| = 4$.

Пример 14. Продолжить функционал f с подпространства L на все пространство X с сохранением нормы. $X = \mathbb{R}^2, L = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 - 2x_2 = 0\}, f : (x_1, x_2) \to 3x_1 - 4x_2$.

Решение задачи.

Пусть F – продолжение функционала f. Из курса линейной алгебры (или теоремы об общем виде непрерывного линейного фугнкционала на еавклидовых пространствах, доказанного в нашем курсе лекций!) F имеет вид: $F(x_1, x_2) = a_1x_1 + a_2x_2$. Требуется найти a_1, a_2. Так как F продолжение f, то $f(x_1, x_2) = F(x_1, x_2)$ на L, т.е. получаем, что $3x_1 - 4x_2 = a_1x_1 + a_2x_2$, если $x_1 - 2x_2 = 0$.

$$6x_2 - 4x_2 = 2a_1x_2 + a_2x_2,$$
$$2x_2 = (2a_1 + a_2)x_2.$$

Составим систему:
$$\begin{cases} 2a_1 + a_2 = 2, \\ \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \| f \| . \end{cases}$$
Пусть далее $\| f \| = \sup\limits_{x_1^2+x_2^2=1, x_1-2x_2=0} |3x_1 - 4x_2|$,

$$x_1 = 2x_2,$$
$$4x_2^2 + x_2^2 = 1,$$
$$x_2^2 = \frac{1}{5},$$
$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Получили, что $x_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Вычислим норму функционала f: $\| f \| = |\frac{6}{\sqrt{5}} - \frac{4}{\sqrt{5}}| = \frac{2}{\sqrt{5}}$.
Получили следующую систему уравнений:
$$\begin{cases} 2a_1 + a_2 = 2, \\ a_1^2 + a_2^2 = \frac{4}{5} \end{cases}$$

Решим полученную систему:
$$a_1^2 + (2 - 2a_1)^2 = \frac{4}{5},$$
$$5a_1^2 - 8a_1 + \frac{16}{5} = 0,$$
$$25a_1^2 - 40a_1 + 16 = 0,$$
$$(5a_1 - 4)^2 = 0,$$
$$a_1 = \frac{4}{5}, \quad a_2 = \frac{2}{5}.$$

Подставляя эти значения в F, получаем, что $F(x_1, x_2) = \frac{4}{5}x_1 + \frac{2}{5}x_2$.

Задачи по теме 2.22. Слабая сходимость в нормированном пространстве.

Задачи: N 312, 313 б, в.

Задачи по темам 2.24, 2.25, 2.26. Обобщенные функции

Задачи: N 318, 326–331, 336-342, 344, 350.

Приведем решение двух типичных для этой темы задач.

Пример 15. Показать, что последовательность функций

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < 0; \\ n, & \text{если} \quad 0 \le x < \frac{1}{n}; \\ 0, & \text{если} \quad x \ge \frac{1}{n}, \end{cases}$$

сходится к δ-функции в пространстве основных функций $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Решение задачи.

Каждая функция $f_n(x)$ является локально интегрируемой на $\mathbb{R}$ и поэтому ее действие на пробные функции из $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ задается формулой:

$$(f_n, \varphi) = \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\varphi(x)\,dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Нужно показать, что $(f_n, \varphi) \to \varphi(0)$ при $n \to \infty$ для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. А это следует из того, что

$$(f_n, \varphi) = \int_0^{1/n} n\varphi(x)\,dx = \varphi(0) + n\int_0^{1/n} (\varphi(x) - \varphi(0))\,dx,$$

где последнее слагаемое стремится к нулю при $n \to \infty$, так как

$$n\int_0^{1/n} |\varphi(x) - \varphi(0)|\,dx \le \max_x |\varphi'(x)| n \int_0^{1/n} x\,dx =$$
$$= \frac{1}{2n}\max_x |\varphi'(x)| \to 0$$

при $n \to \infty$.

Таким образом, $f_n(x) \to \delta(x)$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ при $n \to \infty$.

Пример 16. Найдем производную функции Хевисайда

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < 0; \\ 1, & \text{если} \quad x \ge 0. \end{cases}$$

Решение задачи.

Согласно определению производной,

$$(\theta', \varphi) = -(\theta, \varphi'), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

А так как функция $\theta(x)$ локально интегрируема, то

$$(\theta, \varphi') = \int_0^{+\infty} \varphi'(x)\, dx = -\varphi(0).$$

Для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Следовательно, $(\theta', \varphi) = \varphi(0)$, и поэтому

$$\theta'(x) = \delta(x).$$

3.3 Раздел III. Линейные операторы в нормированных пространствах.

Задачи по теме 3.1. Линейные операторы. Непрерывность и ограниченность.

Задачи: N 372, 373, 375, 376, 377.

Задачи по теме 3.2. Линейные операторы. Норма оператора.

Задачи: N 410 – 414, 416–434.

Пример 17. Показать, что любой линейный оператор A, действующий из пространства $\mathbb{R}^m_\infty$ в пространство $\mathbb{R}^n_\infty$ ограничен. Зафиксируем какие-нибудь базисы, скажем, $\{e_j\}$ в $\mathbb{R}^m$ и $\{f_i\}$ в $\mathbb{R}^n$.

Решение задачи.

Нетрудно проверить (мы это уже делали в курсе линейной алгебры!), что оператор A, в координатах, записывается в следующем виде:

$$(Ax)_i = y_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j, \quad i = 1, \dots, n,$$

где $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, $y = (y_1, \ldots, y_n)\mathbb{R}^n$.

Имеем оценку

$$|y_i| \leq \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}||x_j| \leq \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}| \sup_j |x_j| \leq \gamma \parallel x \parallel_\infty,$$

где

$$\gamma = \sup_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|.$$

Следовательно,

$$\parallel y \parallel_\infty \leq \gamma \parallel x \parallel_\infty .$$

Тогда $\parallel Ax \parallel_\infty \leq \gamma \parallel x \parallel_\infty$, т.е. оператор A ограничен.

Пример 18. Показать, что оператор $A : C[0,1] \to C[0,1]$,

$$Ax(t) = \int\limits_0^t x(\tau)\, d\tau,$$

является линейным ограниченным и найти его норму.

Решение задачи.

Линейность оператора A следует из линейности интеграла:

$$A(\alpha x + \beta y) = \int_0^t (\alpha x(\tau) + \beta y(\tau))\, d\tau =$$

$$= \alpha \int_0^t x(\tau)\, d\tau + \beta \int_0^t y(\tau)\, d\tau = \alpha Ax + \beta Ay.$$

Оценим величину $\parallel Ax \parallel_{C[0,1]}$ и найдем норму оператора A:

$$\parallel Ax \parallel = \max_{t \in [0,1]} |Ax| = \max_{t \in [0,1]} \left| \int_0^t x(\tau)\, d\tau \right| \leq$$

$$\leq \max_{t \in [0,1]} \int_0^t |x(\tau)|\, d\tau \leq \parallel x \parallel \max_{t \in [0,1]} \int_0^t d\tau = \parallel x \parallel .$$

Итак, $\|A\| \leq 1$. Теперь легко видеть, что норма оператора A равна единице. В самом деле, норма функции $x_0 \equiv 1$ равна единице, и

$$Ax_0 = \int\limits_0^t x(\tau)_0\, d\tau = t.$$

Таким образом, $\|Ax_0\| = 1$, а значит, $\|A\| \geq 1$.

С учетом вышеизложенного, заключаем, что $\|Ax\| = 1$.

Пример 19. Показать, что оператор $A : C[-1,1] \to C[0,1]$,

$$Ax(t) = x(t),$$

является линейным ограниченным и найти его норму.

Решение задачи.

Очевидно,

$$A(\alpha x + \beta y) = (\alpha x + \beta y)(t) = \alpha x(t) + \beta y(t) = \alpha Ax + \beta Ay.$$

Поэтому оператор линнеен.

Оценим величину $\| Ax \|_{C[0,1]}$ и найдем норму оператора A:

$$\| Ax \|_{C[0,1]} = \max_{t\in[0,1]} |Ax| = \max_{t\in[0,1]} |x(t)| \leq \max_{t\in[-1,1]} |x(t)| = \| x \|_{C[-1,1]} .$$

Итак, $\|A\| \leq 1$. Легко видеть, что норма оператора A равна единице. В самом деле, Для любой непрерывной функции $x_0 \in C[-1,1]C[-1,1]$, модуль которой достигает максимума на отрезке $[0,1]$, мы имеем

$$\|Ax_0\|_{C[0,1]} = \|x_0\|_{C[0,1]} = \|x_0\|_{C[-1,1]},$$

т.е. $\|A\| \geq 1$.

С учетом вышеизложенного, заключаем, что $\|Ax\| = 1$.

<u>Задачи по теме 3.4.</u> Компактные операторы.

Задачи: N 382–386, 399.

<u>Задачи по теме 3.7.</u> Замкнутые операторы.

Задачи: N 453, 454.

<u>Задачи по теме 3.9.</u> Сопряженный оператор.

Задачи: N 461–462.

Пример 20. Описать сопряженный к линейному оператору в конечномерном евклидовом пространстве.

Решение задачи.

Как мы знаем из курса линейной алгебры, без ограничения общности можно считать, что $X = Y = \mathbb{R}^n$ – n-мерное евклидово пространство. Тогда каждый линейный оператор $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ задается матрицей:

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j,\ i = 1, \ldots, n.$$

$x = (x_1, \ldots x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$.

По теореме Рисса, $(\mathbb{R}^n)^* = \mathbb{R}^n$. Пусть $z = (\zeta_1, \ldots \zeta_n) \in (\mathbb{R}^n)^*$. Тогда поскольку (снова по теореме Рисса!) в полном евклидовом пространстве действие функционала z на элемент Ax выражается их скалярным произведением, имеем

$$< Ax, z >= (Ax, z) = \sum_{i=1}^{n} y_i \zeta_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) \zeta_j =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \zeta_i \right) x_j = (x, A^* z) =< x, A^* z >,$$

где оператор $A^* z$ определяется равенствами

$$(A^* z)_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \zeta_i,\ j = 1, \ldots, n,$$

т.е. A^* задается матрицей транспонированной к матрице A.

Задачи по темам 3.11, 3.12. Обратные операторы. Непрерывная обратимость.

Задачи: 468, 469.

Задачи по теме 3.14. Спектр оператора. Резольвента.

Задачи: N 472, 473, 485–490, 495–500, 503.

3.4 Раздел IV. Линейные операторы в пространствах Гильберта

Задачи по темам 4.1, 4.2. Интеграл Лебега.

Задачи: N 514–519, 523–525, 529–530, 538, 539.

Задачи по темам 4.3. Сопряженный оператор в пространствах Гильберта.

Задачи: N 457, 458.

Пример 21. Пусть $X = Y = L_2[a, b]$. Построить сопряженныцй к интегральному оператору K:

$$Kx(t) = \int_a^b K(t, s)x(s)\, ds,$$

с непрерывным на квадрате $[a, b] \times [a, b]$ ядром $K(t, s)$.

Решение задачи.

Ограничимся вещественным случаем. Имеем равенство

$$< Kx, z >= \int_a^b \left(\int_a^b K(t, s)\, x(s)\, ds \right) z(t)\, dt =$$

$$= \int_a^b \left(\int_a^b K(t, s)\, z(t)\, dt \right) x(s)\, ds =< x, K^* z > .$$

Следовательно, сопряженный оператор $K^* z$ также является интегральным оператором:

$$K^* z(t) = \int_a^b K(s, t) z(s)\, ds,$$

и его ядро транспонировано к ядру оператора $K(t, s)$.

Задачи по теме 4.6. Спектр самосопряженного оператора. Теорема Гильберта-Шмидта.

Задачи: N 613, 614.

Задачи по теме 4.10. Теоремы Фредгольма.

Задачи: N 590–595.

Задачи по теме 4.16. Интегральные уравнения второго рода с операторами Гильберта-Шмидта.

Задачи: N 590–595.

Следующий пример иллюстрирует одновременно три темы: 4.6, 4.10, 4.16.

Пример 22. В пространстве Лебега $L^2[0,\pi]$ выяснить условия разрешимости интегрального уравнения

$$x(s) - Kx(s) = y(s), \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

$$Kx(s) = \lambda \int\limits_0^{\pi} (\sin t + t\cos s) x(t) dt.$$

Что можно сказать о рарешимости уравнения и его решениях для $y(s) = 1 - \frac{2s}{\pi}$?

Решение задачи.

Ядром интегрального оператора в этом уравнении служит функция

$$K(s,t) = \lambda(\sin t + t\cos s).$$

Она непрерывна на квадрате $[0, b\pi] \times [0,\pi]$, и поэтому принадлежит $L^2([0,\pi]\times[0,\pi])$, т.е. данный интегральный оператор является оператором Гильберта-Шмидта. Поскольку операторы Гильберта-Шмидта компактны, то рассматриваемое интегральное уравнение есть уравнение Фредгольма второго рода. Применим теорему Фредгольма для изучения его разрешимости.

Для этого нам необходимо изучить свойства решений однородного сопряженного уравнения.

$$x(s) - K^* x(s) = 0 \tag{2}$$

Так как K есть оператор Гильберта-Шмидта, то ядром интегрального оператора K^* служит функция

$$K(t,s) = \lambda(\sin s + s\cos t).$$

Итак, однородное сопряженное уравнение имеет вид:

$$z(s) - \lambda\int\limits_0^\pi (\sin s + s\cos t)z(t)dt = 0.$$

Обозначим:

$$C_1 = \int\limits_0^\pi z(t)dt, \quad C_2 = \int\limits_0^\pi \cos z(t)dt.$$

Пусть далее $\alpha = \lambda C_1$, $\beta = \lambda C_2$. Тогда

$$z(s) = \alpha\sin s + \beta s. \tag{3}$$

Найдем чему равны α и β. Для этого подставим в исходное уравнение выражение (3) получим:

$$\alpha\sin s + \beta s = \lambda\left(\int\limits_0^\pi (\sin s + s\cos t)(\alpha\sin t + \beta t)dt\right). \tag{4}$$

Далее, преобразуем (4), воспользовавшись тождествами:

$$\int\limits_0^\pi \sin t\cos t dt = 0,$$

$$\int\limits_0^\pi t dt = \frac{\pi^2}{2},$$

$$\int\limits_0^\pi \cos t dt = 2,$$

$$\int\limits_0^\pi t\cos t dt = -2.$$

Получим

$$\alpha \sin s + \beta s = \lambda \sin s \left(2\alpha + \frac{\beta\pi^2}{2}\right) - \lambda s 2\beta \qquad (5)$$

Теперь, учитывая линейную независимость системы $\{1, \sin s\}$, мы получаем систему линейных алгебраических уравнений, эквивалентную однородному сопряженному уравнению:

$$\begin{cases} \beta(1+2\lambda) = 0, \\ \alpha(1-2\lambda) - \beta\lambda\frac{\pi^2}{2} = 0. \end{cases} \qquad (6)$$

Решая систему (6), видим, что

1) при $\lambda = 1/2$ постоянная α произвольна, а $\beta = 0$;

2) при $\lambda = -1/2$ постоянная β произвольна, а $\alpha = \beta\frac{\pi^2}{8}$;

3) $\alpha = \beta = 0$ при $\lambda \neq \pm 1/2$.

Итак, пространство решений однородного сопряженного уравнения (2) состоит из

1) функций вида $\alpha \sin s$ при $\lambda = 1/2$;

2) функций вида $\beta s + \beta\frac{\pi^2}{8} \sin s$ при $\lambda = -1/2$;

3) только из нуля при $\lambda \neq \pm 1/2$.

Согласно теоремам Фредгольма, интегральное уравнение (1) имеет

1) при $\lambda = 1/2$: бесконечно много решений для любой правой части $y \in L^2[0, \pi]$, для которой

$$\int_0^\pi y(t) \sin t \, dt = 0, \qquad (7)$$

и ни одного решения для тех правых частей, для которых равенство (7) не выполнено.

2) при $\lambda = -1/2$: бесконечно много решений для любой правой части $y \in L^2[0, \pi]$, для которой

$$\int_0^\pi y(t) \left(t + \frac{\pi^2}{8} \sin t\right) \, dt = 0, \qquad (8)$$

и ни одного решения для тех правых частей, для которых равенство (8) не выполнено.

3) при $\lambda \neq \pm 1/2$: одно и только одно решение для любой правой части $y \in L^2[0,\pi]$.

Наконец, применительно к конкретной правой части $y(s) = 1 - \frac{2s}{\pi}$ можно сказать, что:

1) при $\lambda = 1/2$ уравнение имеет бесконечно много решений, так как

$$\int_0^\pi \left(1 - \frac{2t}{\pi}\right) \sin t \, dt = 2 - 2 = 0$$

(здесь мы воспользовались тем, что $\int\limits_0^\pi t \sin t dt = \pi$);

2) при $\lambda = -1/2$ уравнение не имеет решений, так как

$$\int_0^\pi \left(1 - \frac{2t}{\pi}\right) \left(t + \frac{\pi^2}{8} \sin t\right) \, dt = \int_0^\pi \left(1 - \frac{2t}{\pi}\right) t \, dt = -\frac{\pi^2}{6} \neq 0,$$

(здесь мы воспользовались тем, что функция $(1 - \frac{2t}{\pi})$ ортогональна функции $\sin t$ в пространстве $L^2[0,\pi]$, см. случай $\lambda = 1/2$);

3) при $\lambda \neq \pm 1/2$ уравнение имеет одно и только одно решение.

Задачи по теме 4.17. Интегральные уравнения с вырожденными ядрами.

Задачи: N 560–565.

Пример 23. В пространстве $C[0,\pi]$ непрерывных функций найти решение интегрального уравнения

$$x(s) - \lambda \int\limits_0^\pi (\sin t + t \cos s) x(t) dt = 1 - \frac{2s}{\pi}.$$

Решение задачи.

Поскольку ядро данного интегрального оператора вырождено, можем воспользуемся методом неопределенных коэффициентов. С этой целью преобразуем уравнение к следующему виду:

$$x(s) - \lambda\int\limits_0^\pi \sin t x(t)dt - \lambda\cos s\int\limits_0^\pi tx(t)dt = 1 - \frac{2s}{\pi}.$$

Обозначим:

$$C_1 = \int\limits_0^\pi \sin t x(t)dt, \quad C_2 = \int\limits_0^\pi tx(t)dt.$$

Пусть далее $\alpha = \lambda C_1$, $\beta = \lambda C_2$. Тогда

$$x(s) = \alpha\cos s + \beta - \frac{2s}{\pi}. \tag{9}$$

Найдем чему равны α и β. Для этого подставим в исходное уравнение выражение (9):

$$\alpha\cos s + \beta - \frac{2s}{\pi} - \lambda\int\limits_0^\pi \sin t(\alpha\cos s + \beta - \frac{2s}{\pi})dt -$$

$$- \lambda\cos s\int\limits_0^\pi t(\alpha\cos s + \beta - \frac{2s}{\pi})dt = 1 - \frac{2s}{\pi}$$

Далее, воспользуемся тождествами:

$$\int\limits_0^\pi \sin t\cos t dt = 0,$$

$$\int\limits_0^\pi t\sin t dt = \pi,$$

$$\int\limits_0^\pi t\cos t dt = -2.$$

Подставляя их в (9), получаем, что

$$\alpha\cos s + \beta - \lambda(2\beta - 2) - \lambda\cos s(-2\alpha + \frac{\pi^2}{2}\beta - \frac{2}{3}\pi^2) = 1.$$

Теперь тот факт, что система функций $\{1, \cos t\}$ линейно независима, позволяет нам записать равносильную исходному интегральному уравнению систему:

$$\begin{cases} \alpha + 2\alpha\lambda - \lambda\dfrac{\pi^2}{2}\beta + \lambda\dfrac{2}{3}\pi^2 = 0, \\ \beta - 2\lambda\beta + 2\lambda = 1. \end{cases} \tag{10}$$

Для того, чтобы решить эту систему рассмотрим несколько случаев:

1) Положим $\lambda = \dfrac{1}{2}$. Тогда второе уравнение в (10) превращается в тождество $1 = 1$. Что же касается первого уравнения, то в данном случае

$$\alpha = \frac{\beta\lambda\frac{\pi^2}{2} - \lambda\frac{2}{3}\pi^2}{1 + 2\lambda} = \frac{\beta\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{3}}{2} = \beta\frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{6}$$

для любого β.

2) Положим $\lambda = -\dfrac{1}{2}$. В этом случае система (10) становится несовместной:

$$\begin{cases} \dfrac{\pi^2}{4}\beta - \lambda\dfrac{1}{3}\pi^2 = 0, \\ 2\beta = 2. \end{cases}$$

3) Пусть $|\lambda| \neq \dfrac{1}{2}$. Тогда, из второго уравнения системы (10) вытекает, что $\beta = 1$. Теперь, используя из второе уравнение системы (10), мы получаем:

$$\alpha = -\frac{\lambda\pi^2}{6(1 + 2\lambda)}.$$

Ответ:

1) если $\lambda = \dfrac{1}{2}$, то решений бесконечно много. Именно, для любого β функция

$$x(s) = (\beta\frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{6})\cos s + \beta - \frac{2s}{\pi},$$

является решением данного интегрального уравнения;

2) При $\lambda = -\dfrac{1}{2}$ – решений нет;

3) при $\lambda \neq \pm\frac{1}{2}$ решение уравнения единственно:

$$x(s) = -\frac{\lambda\pi^2}{6(1+2\lambda)}\cos s + 1 - \frac{2s}{\pi}.$$

Сравните с результатами задачи задачи по теме 4.16! Ясно, что мы могли решить данное интегральное уравнение методом неопределенных коэффициентов также и в $L^2[0,\pi]$, и получить тот же самый ответ.

Список литературы

[1] Шлапунов А.А. *Функциональный анализ* [электронный ресурс]. *Учебная программа дисциплины и график учебного процесса и самостоятельной работы по дисциплине*/А.А. Шлапунов, В.В. Работин. – Красноярск, СФУ, 2011.

[2] Шлапунов А.А. *Функциональный анализ* [электронный ресурс]. *Конспект лекций*/А.А. Шлапунов, В.В. Работин, Т.М. Садыков. – Красноярск, СФУ, 2011.

[3] Ермилов И.В. *Функциональный анализ* [электронный ресурс]. *Сборник задач и упражнений по функциональному анализу*/И.В. Ермилов, А.А. Шлапунов, В.М. Трутнев, Д.П. Федченко, И.В. Шестаков, Е.И. Яковлев, Е.Н. Михалкин. – Красноярск, СФУ, 2011.

[4] Колмогоров А.Н. *Элементы теории функций и функционального анализа*/А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Физматлит, 2006.

[5] Треногин В.А. *Функциональный анализ*/ В.А. Треногин. – М.: Наука, 1980.

[6] Треногин В.А. *Задачи и упражнения по функциональному анализу*/ В.А. Треногин, Б.М. Писаревский, Т.С. Соболева. – М.: Физматлит, 2002.

[7] Владимиров В.С. *Сборник задач по уравнениям математической физики*/ В.С. Владимиров, А.А. Вашарин. – М.: Физматлит, 2001.

[8] Пуляев В.Ф. *Задачи по функциональному анализу*/ В.Ф. Пуляев, З.Б. Цалюк. – Краснодар: изд-во КубГУ, 1983.

Учебное издание

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ
И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

А.А. Шлапунов, Д.П. Федченко, В.М. Трутнев

Подготовлено к изданию РИО БИК СФУ
Компьютерная верстка: А.А. Шлапунова

Подписано в печать 11.01.2012 г. Формат 60x84/16.
Бумага офсетная. Печать плоская.
Усл. печ. л. 2,2. Уч.-изд. л. 1,5
Тираж 50 экз. Заказ № 5881.

Редакционно-издательский отдел
Библиотечно-издательского комплекса
Сибирского федерального университета
660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79
Тел/факс (391) 201-21-49. E-mail rio@sfu-kras.ru
http://rio.sfu-kras.ru

Отпечатано Полиграфическим центром
Библиотечно-издательского комплекса
Сибирского федерального университета
660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 82а