Программа курса «Нелинейный функциональный анализ и его приложения»
Магистранты ИМФИ СФУ 2014 год

Введение. Основные понятия из линейного функционального анализа. Обозначения. Цели и задачи курса.

Предварительные сведения. Теоремы о неподвижных точках. Примеры, принцип сжимающих отображений, его следствие. Устойчивость неподвижных точек. Примеры: перестройка уравнения, использование эквивалентных норм, теорема Каччиполи, теорема Пикара.

Дифференцирование в нормированных пространствах. Сильная производная (Фреше) и ее свойства. Примеры. Дифференциал Гато, формула конечных приращений. Теорема о неявной функции и ее следствие.

Метод Ньютона для нелинейных операторов. Последовательность, Ньютона, теоремы о сходимости. Модифицированный метод Ньютона и его сходимость.

Принцип Шаудера. Вспомогательные утверждения: выпуклые множества, тела, оболочки, симплексы. Принцип Брауэра. Случай бесконечномерных пространств. Принцип Шаудера. Примеры.

Теорема Какутани и ее приложения. Многозначные отображения. Полунепрерывные сверху отображения. Теорема Какутани. Игра двух лиц с нулевой суммой. Функция выигрыша, теорема о минимаксе.

Монотонные операторы. Монотонные операторы в частично упорядоченных банаховых пространствах. Примеры. Монотонные операторы в гильбертовом пространстве.

Введение в теорию ветвления (бифрукации). Общие соображения. Примеры, бифрукационные диаграммы. Потеря устойчивости упругого стержня.

Ветвление решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Постановка задачи и вывод уравнения разветвления. Линеаризованная задача. Ветвление для уравнения 2-го порядка. Примеры, задачи.

Теория степени в конечномерном случае. Теорема Сарда и ее следствия. Предварительные соображения: примеры, степень, гомотопия, явное определение степени, случай двумерного пространства, угловая функция, вращения поля, формула Пуанкаре. Построение степени в конечномерном случае: лемма 2-6. Основное определение степени и ее свойства. Теорема Дугунджи. Некоторые приложения степени: 5 примеров.

Степень Лерэ-Шаудера. Предварительные соображения. Вспомогательные леммы. Основное определение степени и ее свойства. Теорема Лерэ-Шаудера. Примеры.

Теория бифрукаций, в бесконечномерном пространстве. Локальная теория бифрукаций. Глобальная теория собственных функций. Примеры.

Список литературы

1. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М: «Наука», 1977.
2. Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения./ под редакцией Келлера Дж., Б., и Антмана С. – М.: Изд. «Мир», 1974.
3. Никайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика. М: Из-во «Мир», 1972.
4. Хатсон В.Ю. Пим Д. Приложения функционального анализа и операторов. М: Из-во «Мир», 1983.
5. Ниренберг Л. Лекции по нелинейному функциональному анализу. М: «Мир», 1977.
6. Левин В.Л. Выпуклый анализ. М: Из-во «Наука», 1985.
7. Андреев В.К. Элементы функционального анализа . Из-во КГУ, 2002.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 2

По дисциплине <u>Нелинейный функциональный анализ и его приложения</u>

Специальность / направление 010400.68 «Прикладная математика и информатика»

ВОПРОСЫ

1. Теорема о неподвижной точке для нерастягивающих операторов в гильбертовом пространстве.
2. Существование решения у монотонного оператора уравнения в гильбертовом пространстве.

Составил Андреев В.К. Утверждаю

« 24 » мая 2014 г. Зав.кафедрой Андреев В.К.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 10

По дисциплине <u>Нелинейный функциональный анализ и его приложения</u>

Специальность / направление 010400.68 «Прикладная математика и информатика»

ВОПРОСЫ

1. Доказать теорему о бифрукациях.
2. Многозначные отображения. Полунепрерывные сверху отображения.

Теорема Какутани.

Составил Андреев В.К. Утверждаю

« 24 » мая 2014 г. Зав.кафедрой Андреев В.К.

Задачи к экзамену

1. Пусть K - конус в вещественном B-пространстве. Докажите, что если $g \in B$, $t \in R^+$ и $g \le tf$ для некоторого $f \in K$, то существует наименьшее $s \in R^+$ для которого $g \le sf$.

2. Показать, что задача

$$u_{xx} + \lambda[u + \vartheta(u^2+\vartheta^2)] = 0, \quad \vartheta_{xx} + \lambda[\vartheta - u(u^2+\vartheta^2)] = 0$$

$$u(0) = u(1) = 0, \quad \vartheta(0) = \vartheta(1) = 0$$

не имеет точек бифуркации, несмотря на то, что линеаризованная задача имеет счётное число двукратных собственных значений $\lambda = \lambda_n$.

3. Пусть H - гильбертово пространство и $A: H \to H$ - оператор со свойствами $(Ax - Ay, x - y) \ge m\|x-y\|^2$, $\|Ax - Ay\| \le M\|x - y\|$ $\forall x, y \in H$ (m, M - положительные постоянные). Тогда оператор $A_t = I - tA$ является сжатием при $t \in (0, \frac{2m}{M^2})$ и $\|A_t x - A_t y\| \le K(t)\|x - y\|$, где $K(t) = (1 - 2mt + M^2t^2)^{1/2} < 1$.

4. Найти точки бифуркации краевой задачи $-x'' + \lambda x = x^3$, $t \in (0, \pi)$, $x(0) = x(\pi) = 0$.

5. Установить границы для решения уравнения $x'' = -t - \sqrt{x}$, $x(0) = 0$, $x(1) = 1$, используя понятие верхнего и нижнего решения.

6. Пусть Ω - ограниченное открытое подмножество вещественного B-пространства и $A, D: \overline{\Omega} \to B$ - компактные операторы. Докажите, что если $\|Af - Df\| < \|f - Df - p\|$ $\forall f \in \partial\Omega$, то $d(I - A, p, \Omega) = d(I - D, p, \Omega)$.

7. Пусть Ω — открытый единичный шар в вещественном B-пространстве и $A: \overline{\Omega} \to B$ — вполне непрерывный оператор. Покажите, что A имеет неподвижную точку в $\overline{\Omega}$, если выполнено какое-нибудь из условий:

1) $\|f - Af\|^2 \geqslant \|Af\|^2 - \|f\|^2 \quad \forall f \in \partial\Omega$;

2) $B = H$ — вещественное гильбертово пространство и $(Af, f) \leq \|f\|^2 \quad \forall f \in \partial\Omega$.

8. Вычислить вращение векторного поля $\vec{f}(x,y) = (x^2 - y^2, 10xy)$ на половине единичной окружности, где $y \geqslant 0$.

9. Постройте бифуркационную диаграмму для оператора A_μ в вещественном пространстве $C[0,1]$, задаваемого формулой

$$A_\mu f = \int_0^1 f^2(x)\,dx + \frac{1}{\mu}.$$

10. Пусть $E \subset B$ — нормальный конус и $A: E \to B$ — вполне непрерывный монотонный оператор. Предположим, что операторы $L, M \in \mathcal{L}(B)$, $h \in E$ и $\delta > 0$, причём 1) оператор L является минорантой для A на $\overline{S}(0,\delta) \cap E$ и обладает собственной функцией $u \in E$ с собственным значением $\lambda \geqslant 1$; 2) оператор M положителен, $r_\sigma(M) < 1$ и оператор $\mathcal{D}$, задаваемый равенством $\mathcal{D}f = Mf + h$, является мажорантой для A. Докажите, что A имеет нетривиальную неподвижную точку в E, и укажите монотонные последовательности, сходящиеся к его неподвижным точкам.

11. стр 88 ; стр 84 пример 8