Некоторые сведения из общей теории решения систем линейных дифференциальных уравнений.

(из предыдущей лекции**)**

Система уравнений вида

$$Y' = A(t)Y + F(t), \qquad (*)$$

где $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$, $F(t) = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_n \end{pmatrix}$ - n мерные вектор-столбцы, а

$A(t) - \ (n \times n) -$ матрица:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

называется системой линейных дифференциальных уравнений.

1.Если $F(t) \equiv 0$, то система (*) называется линейной однородной, иначе – линейной неоднородной.

2. Если $Y(t)$- является решением однородной системы

$$Y' = A(t)Y, \qquad (**)$$

то $CY(t)$ является решением той же системы ($C -$ произвольная постоянная).

3. Сумма $Y_1 + Y_2$ двух решений Y_1 и Y_2 однородной линейной системы уравнений является решением той же системы.

Следствие из 2 и 3:

Если $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ – решения однородной системы, то $\sum_{i=1}^{n} C_i Y_i$ – является решением той же системы.

Определение. Фундаментальной системой решений $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ уравнения (**) называют n линейно независимых решений.

Определение. Матрица $W(t)$, столбцами которой являются координаты векторов, образующих ФСР, называется фундаментальной матрицей уравнения (**).

Определитель фундаментальной системы – это определитель Вронского системы n линейно – независимых решений уравнения (**), и он отличен от 0.

20.03.2020г. Лекция.

Теорема. Линейная однородная система уравнений имеет фундаментальную матрицу.

По заданной системе n линейно – независимых векторов можно найти единственную систему (**), для которой эти векторы образуют фундаментальную систему решений. Так как фундаментальная матрица уравнения (**) является решением матричного уравнения

$$W'(t) = A(t)W(t),$$

То матрица $A(t)$ искомой системы находится следующим образом:

$$A(t) = W'(t)W^{-1}(t).$$

Обратная матрица $W^{-1}(t)$ существует, так как определитель матрицы $W(t)$ отличен от 0.

Пример 1. Доказать линейную независимость функций

$$Y_1 = \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix}, Y_2 = \begin{pmatrix} e^{5t} \\ 3e^{5t} \end{pmatrix}$$

И найти однородную систему уравнений, для которой эти функции образуют ФСР.

Решение. Из заданных функций составим определитель Вронского

$$W(t) = \begin{vmatrix} e^t & e^{5t} \\ -e^t & 3e^{5t} \end{vmatrix} = 4e^{6t} \neq 0,$$

следовательно функции Y_1 и Y_2 линейно независимы для любого t.

Так как эти функции линейно независимы, то они образуют ФСР некоторой линейной однородной системы дифференциальных уравнений второго порядка. Матрицу $A(t)$ этой системы найдем по формуле

$$A(t) = W'(t)W^{-1}(t).$$

Вычислим

$$W'(t) = \begin{pmatrix} e^t & 5e^{5t} \\ -e^t & 15e^{5t} \end{pmatrix},$$

тогда (**проверить самостоятельно!!!!!**)

$$W^{-1}(t) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3e^{-t} & -e^{-t} \\ e^{-5t} & e^{-5t} \end{pmatrix}.$$

Следовательно

$$A(t) = W'(t) \cdot W^{-1}(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, искомая линейная система дифференциальных уравнений имеет вид

$$\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$$

Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$Y' = AY + F(t) \qquad (1)$$

или

$$y_i' = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, y_k + f_i(t), \qquad (1')$$

в которой коэффициенты $a_{ik},\ i,k = 1,2,\dots,n$ - постоянные, т.е. A - постоянная матрица.

Систему (1') можно проинтегрировать путем сведения ее к уравнению n -го порядка с постоянными коэффициентами (методом исключения), которое будет также будет линейным уравнением   с постоянными коэффициентами.

Однако такой метод удобно применять для систем второго порядка ($n = 2$). Процесс получения дифференциального уравнения n –го порядка довольно трудоемкий и требует аккуратности. Другой способ построения решения системы уравнений (1) - найти фундаментальную систему решений (ФСР) соответствующего однородного уравнения

$$Y' = AY, \qquad (2)$$

а затем найти общее решений неоднородной системы (1') методом вариации постоянной. Этот путь, как правило, менее трудоемкий.

ФСР линейной однородной системы с постоянными коэффициентами связана с собственными векторами ее матрицы.

П.1 Вспомогательные утверждения (из линейной алгебры)

Пусть дана матрица $A = (a_{ij})$. Если для некоторого числа λ и вектора $\boldsymbol{h}$ выполняется $A\boldsymbol{h} = \lambda\boldsymbol{h}$, то число λ называется собственным числом матрицы A, а вектор $\boldsymbol{h}$- собственным вектором матрицы $\boldsymbol{h}$, относящимся к собственному значению λ.

Свойства собственных векторов:

1. Каждый собственный вектор $\boldsymbol{h}$ относится к единственному собственному значению (обратное неверно!).

2. Если $\boldsymbol{h_1}$ и $\boldsymbol{h_2}$ - собственные векторы матрицы A, относящиеся к одному и тому же собственному значению λ, то их линейная комбинация $\alpha\boldsymbol{h_1} + \beta\boldsymbol{h_2}$- собственный вектор матрицы A , относящийся к тому же собственному значению λ .

3. Собственные векторы $\boldsymbol{h_1}, \boldsymbol{h_2}, \dots, \boldsymbol{h_k}$ матрицы A, относящиеся к различным собственным значениям $\lambda_1\lambda_2, \dots, \lambda_k$, линейно независимы.

П.2 Метод Эйлера.

Рассмотрим систему

$$y_i' = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, y_k. \qquad (2')$$

Очевидно, система (2) имеет нулевое решение $Y \equiv 0$. Будем искать нетривиальное решение системы.

Вид уравнений системы позволяет предположить, что решения следует искать среди таких функций, производные которых «похожи» на сами функции. Среди элементарных функций таким свойством обладает показательная функция. Поэтому частные решения будем искать в виде

$$y_1 = d_1 e^{\lambda x}, y_2 = d_2 e^{\lambda x}, \dots, y_n = d_n e^{\lambda x}, \qquad (3)$$

где $\lambda, d_1, d_2, \dots, d_n$ - неизвестные действительные числа, которые нужно подобрать так, чтобы функции (3) удовлетворяли системе (2').

Запишем систему (2') в матричном виде, т.е. в виде (2)

$$Y' = AY,$$

где

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots. & .\dots & .\dots & \dots. \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

По предположению,

$$Y = \begin{pmatrix} d_1 e^{\lambda x} \\ d_2 e^{\lambda x} \\ \cdots \\ d_n e^{\lambda x} \end{pmatrix} = e^{\lambda x}\boldsymbol{h}, \text{ где } \boldsymbol{h} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \cdots \\ d_n \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$Y' = \begin{pmatrix} d_1 \lambda e^{\lambda x} \\ d_2 \lambda e^{\lambda x} \\ \cdots \\ d_n \lambda e^{\lambda x} \end{pmatrix} = e^{\lambda x}\boldsymbol{h}.$$

Подставим Y и Y' в (2) и получим

$$\lambda e^{\lambda x}\boldsymbol{h} = A \cdot (e^{\lambda x}\boldsymbol{h}).$$

Разделим обе части последнего уравнения на $e^{\lambda x}$

$$\lambda \boldsymbol{h} = A \cdot \boldsymbol{h},$$

т.е.

$$\lambda \boldsymbol{h} - A \cdot \boldsymbol{h} = \boldsymbol{0},$$

или

$$(A - \lambda E) \cdot \boldsymbol{h} = \boldsymbol{0}, \qquad (4)$$

где E- единичная матрица порядка n.

Уравнение (4) представляет собой матричную запись системы n уравнений с n неизвестными. Чтобы такая система имела нетривиальное решение необходимо, чтобы определитель матрицы $(A - \lambda E)$ равнялся нулю, т.е.

$$|A - \lambda E| = 0. \qquad (5)$$

Определение. Уравнение n- ой степени (5) называется характеристическим уравнением системы (2).

Это означает, что λ должно являться собственным значением (корнем характеристического многочлена) матрицы A, а $\boldsymbol{h}$ – ее собственным вектором, относящимся к λ.

Матрица A имеет n характеристических корней, но среди них могут быть комплексные и кратные. Структура ФСР зависит от вида корней характеристического уравнения (характеристических чисел). Для построения ФСР необходимо знать

- все различные корни λ_i характеристического уравнения (5);

- кратность m_i этих корней;

- собственные векторы h_i матрицы A, соответствующие λ_i.

Рассмотрим все возможные случаи отдельно.

П.2.1 **Характеристические корни матрицы *A* действительны и различны**

Если матрица A имеет n действительных и различных корней, то для каждого характеристического корня λ_i $(i = \overline{1, n})$ найдем собственный вектор $\boldsymbol{h_i} = \left(d_{ij}\right)$ и запишем решение $Y_i = e^{\lambda_i x} \boldsymbol{h_i}$:

$$Y_1 = \begin{pmatrix} d_{11} e^{\lambda_1 x} \\ d_{21} e^{\lambda_1 x} \\ \cdots \\ d_{n1} e^{\lambda_1 x} \end{pmatrix}, Y_2 = \begin{pmatrix} d_{12} e^{\lambda_2 x} \\ d_{22} e^{\lambda_2 x} \\ \cdots \\ d_{n2} e^{\lambda_2 x} \end{pmatrix}, \dots, Y_n = \begin{pmatrix} d_{1n} e^{\lambda_n x} \\ d_{2n} e^{\lambda_n x} \\ \cdots \\ d_{nn} e^{\lambda_n x} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим определитель Вронского этих решений:

$$W[Y_1, Y_2, \dots, Y_n] = \begin{vmatrix} d_{11}e^{\lambda_1 x} & d_{12}e^{\lambda_2 x} & \cdots & d_{1n}e^{\lambda_n x} \\ d_{21}e^{\lambda_1 x} & d_{22}e^{\lambda_2 x} & \cdots & d_{2n}e^{\lambda_n x} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{n1}e^{\lambda_1 x} & d_{n2}e^{\lambda_2 x} & \cdots & d_{nn}e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{\lambda_1 x} \cdot e^{\lambda_2 x} \cdot \dots \cdot e^{\lambda_n x} \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Определитель Вронского не равен нулю, так как все собственные векторы $\boldsymbol{h_i}$ относятся к различным собственным значениям, следовательно они линейно независимы (3 свойство собственных векторов). Т.е. $W[Y_1, Y_2, \dots, Y_n] \neq 0$, решения $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ линейно независимы и образуют ФСР. Общее решение системы в этом случае имеет вид

$$Y = C_1 Y_1 + C_2 Y_2 + \cdots + C_n Y_n,$$

или

$$\begin{cases} y_1 = C_1 d_{11} e^{\lambda_1 x} + C_2 d_{12} e^{\lambda_2 x} + \cdots + C_n d_{1n} e^{\lambda_n x} \\ y_2 = C_1 d_{21} e^{\lambda_1 x} + C_2 d_{22} e^{\lambda_2 x} + \cdots + C_n d_{2n} e^{\lambda_n x} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_{2n} = C_1 d_{n1} e^{\lambda_1 x} + C_2 d_{n2} e^{\lambda_2 x} + \cdots + C_n d_{nn} e^{\lambda_n x} \end{cases}.$$

Пример2. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} x' = -3x + 4y - 2z \\ y' = x + z \\ z' = 6x - 6y + 5z \end{cases}$$

Решение: Для матрицы системы составим характеристическое уравнение

$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 4 & -2 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 6 & -6 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 2)(\lambda^2 - 1) = 0$.Оно имеет три различных действительных корня $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$. Найдем соответствующие им собственные векторы.

Собственный вектор $\overline{h_1} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, отвечающий $\lambda_1 = 2$, удовлетворяет системе

$$(A-\lambda_1 E)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 6 & -6 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} -5a+4b-2c=0 \\ a-2b+c=0 \\ 6a-6b+3c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-2b+c=0 \\ 2b-c=0. \end{cases}$$

Пусть $b=1$, тогда $c=2$ и $a=0$. Следовательно, $\lambda_1=2$ отвечает собственный вектор $\overline{h_1}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Значению $\lambda_2=1$ отвечает вектор $\overline{h_2}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, а $\lambda_3=-1$ – вектор $\overline{h_3}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Проверить Самостоятельно!!!!

Так как собственные векторы $\overline{h_1}, \overline{h_2}, \overline{h_3}$ матрицы A относятся к различным собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, то они линейно независимы. (свйство 3 для собственных векторов матрицы).

Таким образом получили ФСР

$$X_1=h_1 e^{2t},\ X_2=h_2 e^{t},\ X_3=h_3 e^{-t}.$$

Тогда, в соответствии с определением общего решения однородной системы

$$X(t)=\sum_{i=1}^{n} C_i X_i,$$

Общее решение заданной системы имеет вид:

$$X(t)=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot e^{t} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^{-t},$$

где C_1, C_2, C_3- произвольные постоянные.

Ответ: $x=C_2 e^{t}+C_3 e^{-t}, y=C_1 e^{2t}+C_2 e^{t}, z=2C_1 e^{2t}-C_3 e^{-t}$.

П.2.2 **Характеристические корни матрицы *A* различны, но среди них есть комплексные**

Если коэффициенты матрицы A вещественные, , то комплексные корни будут появляться сопряженными парами. А комплексно сопряженным собственным числам λ и $\overline{\lambda}$ соответствуют комплексно – сопряженные собственные векторы h и $\overline{h}$. В этом случае корням λ и $\overline{\lambda}$ соответствует пара вещественных решений, входящих в ФСР, определяемая следующим образом

$$Y_1 = \frac{he^{\lambda t} + \overline{h}e^{\overline{\lambda} t}}{2}, \qquad Y_2 = \frac{he^{\lambda t} - \overline{h}e^{\overline{\lambda} t}}{2i}.$$

Действительно, пусть

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta$$

являются характеристическими корнями.

Для этих корней запишем системы линейных однородных уравнений с n неизвестными:

$$(A - \lambda_1 E) \cdot \boldsymbol{h} = 0 \qquad \text{и} \qquad (A - \lambda_2 E) \cdot \boldsymbol{h} = 0.$$

Из курса алгебры известно, что если при решении этих двух систем выбирать одни и те же переменные свободными и придать им сопряженные значения, то и для зависимых переменных тоже получатся сопряженные значения.

Пусть $\boldsymbol{h_1}$ –решение системы $(A - \lambda_1 E) \cdot \boldsymbol{h} = 0$, тогда $\overline{\boldsymbol{h_1}}$ -решение системы $(A - \lambda_2 E) \cdot \boldsymbol{h} = 0$. Рассмотри вектор-столбцы

$$X_1 = e^{\lambda_1 x}\boldsymbol{h_1} = e^{(\alpha + i\beta)x}\boldsymbol{h_1} = e^{\alpha x}e^{i\beta x}\boldsymbol{h_1} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)\boldsymbol{h_1},$$

$$X_2 = e^{\lambda_2 x}\overline{\boldsymbol{h_1}} = e^{(\alpha - i\beta)x}\overline{\boldsymbol{h_1}} = e^{\alpha x}e^{-i\beta x}\,\overline{\boldsymbol{h_1}} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x)\overline{\boldsymbol{h_1}}.$$

Так как $\boldsymbol{h_1}$ и $\overline{\boldsymbol{h_1}}$ собственные векторы матрицы системы, то X_1 и X_2 являются частными решениями уравнения (2). Положим далее

$$Y_1 = \frac{1}{2}(X_1 + X_2), \; Y_2 = \frac{1}{2i}(X_1 - X_2).$$

Функции Y_1 и Y_2 действительные функции и являются решением уравнения (2) (**показать самостоятельно!**). Более того, Y_1 и Y_2 линейно независимы (**доказать самостоятельно!**) и, следовательно, могут быть включены в ФСР.

Пример3. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} x' = x - 2y, \\ y' = x - y. \end{cases}$$

Решение. Составим характеристическое уравнение системы

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2+1=0.$$

Его корни $\lambda = \pm i$. Найдем соответствующие им собственные векторы.

Вектор, соответствующий $\lambda = i$, удовлетворяет системе

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} a(1-i)-2b=0, \\ a-(1+i)b=0. \end{cases}$$

Т.е. $a(1-i)-2b=0$. Пусть, например, $b=1$, тогда $a=1+i$.

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix} e^{it} = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix} (\cos t + i \sin t) = \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Вектор, соответствующий $\lambda = -i$, удовлетворяет системе

$$\begin{pmatrix} 1+\lambda & -2 \\ 1 & -1+\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} a(1+i)-2b=0, \\ a-(1-i)b=0. \end{cases}$$

Т.е. $a+(1-i)b=0$. Пусть, например, $b=1$, тогда $a=1-i$.

Тогда

$$X_2 = \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix} e^{-it} = \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix} (\cos t - i \sin t) =$$
$$= \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -\cos t - \sin t \\ -\sin t \end{pmatrix}.$$

Фундаментальную систему вещественных решений образуют векторы

Y_1и Y_2, определяемые как линейные комбинации векторов X_1и X_2 :

$$Y_1 = \frac{1}{2}(X_1+X_2) = \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

$$Y_2 = \frac{1}{2i}(X_1-X_2) = \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Общее решение системы

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 Y_1 + C_2 Y_2 = C_1 \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Ответ: $x = (C_1 + C_2)\cos t + (C_2 - C_1)\sin t, \quad y = C_1 \cos t + C_2 \sin t.$