Федеральное агентство по образованию
Федеральное государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Факультет математики и информатики

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Конспект лекций

Учебно-методический комплекс дисциплин по проекту "Создание научно-образовательного комплекса для подготовки элитных специалистов в области математики, механики и информатики в Сибирском федеральном университете", рег. N 16

Красноярск 2007

Выполнено на кафедре теории функций
Авторы-составители:
А.А. Шлапунов, В.В. Работин, Т.М. Садыков

Содержание

Конспект лекций по курсу "Функциональный анализ" для студентов 3 курса математического факультета, обучающихся по направлениям 010100 "Математика", 010200 "Математика и компьютерные науки", 010600 "Механика и математическое моделирование"

Семестры: V,VI

Трудоемкость: 6,7 зачетных единиц или 240 общих часов.

Аудиторная работа: 68 часов лекций, 68 часов практических занятий.

Самостоятельная работа: 96 часов.

Промежуточные формы контроля: промежуточные экзамены по окончании каждого модуля,

итоговые формы контроля – зачет в V семестре, итоговый экзамен в VI семестре).

Количество модулей – 4:

Модуль I – "Метрические пространства", лекции 1–7;

Модуль II – "Линейные метрические пространства и функционалы", лекции 8–17;

Модуль III – "Линейные операторы в пространствах Банаха", лекции 18–24;

Модуль IV – "Операторные уравнения в пространствах Гильберта", лекции 25–34.

Замечание. Основным учебником является книга [1]. В тех случаях, когда предпочтительнее использовать другой источник, это отмечено особо. Все задачи даны из сборника задач [9]. Материал, отмеченный знаком * предназначен для самостоятельной работы студента.

Глава 1

Раздел I: Метрические пространства

1.1 Лекция 1

1.1.1 Введение

Функциональный анализ начал формироваться как отдельное направление в современной математике в начале XX столетия. Одна из главных причин тому острая необходимость решения (систем) дифференциальных и интегральных уравнений, возникших в рамках основных моделей естествознания (прежде всего в физике). У истоков этого направления стояли такие выдающиеся математики, как С. Банах и Д. Гильберт.

С самого начала новому направлению были присущи высокая степень абстракции и тесное переплетение анализа, алгебры и геометрии.

Мы проследим развитие функционального анализа начиная с формализации понятий *близко-далеко*, которые позволяют ввести базовую операцию анализа – предельный переход. Возникающие на этом пути новые объекты – *метрические пространства* – позволяют решить целый ряд задач теории *обыкновенных* дифференциальных уравнений и теории интегральных уравнений второго рода с помощью *принципа сжимающих отображений.* Возникшее естественно понятие полноты оказалось здесь ключевым и дало возможность по-новому взглянуть на теорию действительных чисел и классический анализ.

Дальнейшее привлечение алгебры и геометрии в *линейный* функциональный анализ привело сначала к развитию теории бесконечномерных *топологических векторных пространств* (в том числе, пространств Банаха и Гильберта), а затем, в 60-х годах XX столетия, к прорыву в исследовании основных (линейных) краевых задач математической физики и, более общо, теории дифференциальных уравнений в частных производных. В первую очередь этот прорыв связан с именами С.Л. Соболева и Л. Шварца. Уместно отметить, что стандартный курс "Уравнения математической физики" в значительной мере знакомит с основами данного подхода, хотя и расставляет иные акценты, чем в настоящем пособии.

Усложнение моделей современного естествознания вынуждает нас решать нелинейные системы уравнений, а значит, развивать *нелинейный* функциональный анализ. Пока его основу составляют теоремы о неподвижных точках отображений Лере-Шаудера, основанные на понятии *компактности*, абстрактная теорема о *неявной функции* и геометрический подход, использующий понятие *степени отображения.* Нелинейный функциональный анализ сейчас переживает период бурного роста и его вершины еще впереди. Эта тематика, к сожалению, останется вне данного курса.

1.1.2 Метрические пространства. Определения и примеры

Пусть $\boldsymbol{X}$ – некоторое множество произвольной природы. Его элементы мы часто будем называть "точками". Сейчас мы постараемся выделить (формализовать) наиболее существенные свойства, присущие понятию "расстояние".

Определение 1.1.1. *Метрикой* (расстоянием) на X будем называть функцию $\rho(x, y)$, определенную для любых $x, y \in X$, и обладающую следующими тремя свойствами:

1) $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$ (разделение точек);

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ для всех $x, y \in X$ (симметричность);

3) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ для всех $x, y \in X$ (неравенство треугольника).

Пару $\mathbb{X} = (X, \rho)$ будем называть в этом случае *метрическим пространством.*

Конечно, интуитивно ясно, что "расстояние" от точки x до точки y должно быть всегда неотрицательным. Однако это немедленно вытекает из свойств метрики:

$$0 = \rho(x, x) \leq \rho(x, y) + \rho(y, x) = 2\rho(x, y) \text{ для всех } x, y \in X.$$

Приведем теперь примеры метрических пространств.

Пример 1.1.1. Пусть $X = \mathbb{Q}$ – множество рациональных чисел, а $\rho(x, y) = |x - y|$. Тогда свойства 1)–3) сразу следуют из свойств рациональных дробей и определения модуля числа, изученных в рамках школьной программы.

Пример 1.1.2. Пусть $X = \mathbb{R}$ есть множество действительных чисел, а $\rho(x, y) = |x - y|$. Тогда свойства 1)–3) сразу следуют из определения действительных чисел и определения модуля числа, изученных в рамках школьной программы.

Для того чтобы привести другие примеры, нам потребуется простая лемма. Обозначим через $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ множество упорядоченных наборов (n-ок) действительных чисел $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$.

Лемма 1.1.1. (Неравенство Коши-Буняковского) *Для любых векторов $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^n$ выполняется неравенство:*

$$\sum_{j=1}^{n} x_j y_j \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \sum_{k=1}^{n} y_k^2}. \tag{1.1.1}$$

Доказательство. В самом деле, легко заметить, что

$$\left(\sum_{j=1}^{n} x_j y_j\right)^2 = \sum_{j=1}^{n} x_j^2 \sum_{j=1}^{n} y_j^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (x_k y_j - x_j y_k)^2,$$

откуда и следует требуемое неравенство. □

Пример 1.1.3. Положим $X = \mathbb{R}^n$, $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2}$. Это евклидово n-мерное пространство. Справедливость аксиом 1), 2) немедленно следует из определения функции $\tau = \sqrt{t}$. Проверим аксиому треугольника 3). Обозначая $a_j = y_j - x_j$, $b_j = z_j - y_j$, получаем $z_j - x_j = a_j + b_j$. Тогда из неравенства Коши-Буняковского (1.1.1) следует, что

$$\rho(x, z) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (a_j + b_j)^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j^2 + \sum_{j=1}^{n} b_j^2 + 2 \sum_{j=1}^{n} a_j b_j} \leq$$

$$\sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j^2 + \sum_{j=1}^{n} b_j^2 + 2\sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2}} =$$

$$\sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j^2} + \sqrt{\sum_{j=1}^{n} b_j^2} = \rho(x, y) + \rho(y, z).$$

Данную пару (X,ρ) будем обозначать $\mathbb{R}^n_2$ или просто $\mathbb{R}^n$. При $n=2$ получаем обычную "евклидову" плоскость.

Пример 1.1.4. Пусть $X=\mathbb{R}^n$, $\rho_1(x,y)=\sum_{j=1}^n |x_j-y_j|$. Пару (X,ρ_1) будем обозначать $\mathbb{R}^n_1$. При $n=2$ данное расстояние имеет смысл в условиях прямоугольной городской уличной сети.

Пример 1.1.5. Положим $X=\mathbb{R}^n$, $\rho_\infty(x,y)=\max_{1\le j\le n}|x_j-y_j|$. Данную пару (X,ρ_∞) будем обозначать $\mathbb{R}^n_\infty$.

Пример 1.1.6. Пусть $X=\mathbb{R}^n$, $\rho_p(x,y)=\left(\sum_{j=1}^n |y_j-x_j|^p\right)^{1/p}$ $(p>1)$. Справедливость аксиом метрики будет проверена на практических занятиях. Данную пару (X,ρ_p) будем обозначать $\mathbb{R}^n_p$.

Все рассмотренные выше примеры так или иначе уже встречались вам в курсах математического анализа или алгебры. Перейдем к рассмотрению более сложных и содержательных примеров, примеров *бесконечномерных* и *функциональных* пространств.

Пример 1.1.7. Пусть X – множество всевозможных последовательностей $x=(x_1,x_2,\dots,x_n,\dots)$ таких, что $\sum_{j=1}^\infty |x_j|^p<\infty$ $(1\le p<\infty)$. Положим $\rho(x,y)=\left(\sum_{j=1}^\infty |x_j-y_j|^p\right)^{1/p}$.

Ясно, что для любого $N\in\mathbb{N}$

$$\left(\sum_{j=1}^N |x_j-y_j|^p\right)^{1/p}\le \sum_{j=1}^N |x_j|^p+\sum_{j=1}^N |y_j|^p,\quad p=1,2$$

(это просто неравенство треугольника для метрики из пространства $\mathbb{R}^N_p$). Значит, переходя к пределу относительно $N\to\infty$ и используя признак сравнения сходимости числовых рядов, мы заключаем, что функция $\rho(x, y)$ определена для всех x и y из X. Справедливость аксиом 1), 2) очевидна. Проверим аксиому треугольника 3).

Из неравенства треугольника для метрики из пространства $\mathbb{R}_p^N$ следует, что

$$\begin{aligned}\rho(x, z) &= \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{j=1}^{N}|x_j - z_j|^p\right)^{1/p} \leq \\ &\leq \lim_{N\to\infty}\left(\left(\sum_{j=1}^{N}|x_j - y_j|\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^{N}|y_j - z_j|^p\right)^{1/p}\right) = \\ &= \rho(x, y) + \rho(y, z).\end{aligned}$$

Данную пару (X, ρ) будем обозначать l_p.

Пример 1.1.8. Пусть X – множество всевозможных ограниченных последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, а

$$\rho(x, y) = \sup_{j\in\mathbb{N}}|x_j - y_j|.$$

Справедливость аксиом 1)–3) очевидна. Данное метрическое пространство (X, ρ) будем обозначать $\mathcal{M}$.

Пусть X – множество всевозможных сходящихся к нулю последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, с той же нормой, что и в $\mathcal{M}$ будем обозначать $\mathcal{M}_0$. Ясно, что $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}$.

Пример 1.1.9. Пусть X – множество всевозможных последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, а

$$\rho(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{|x_j - y_j|}{2^j(1 + |x_j - y_j|)}.$$

Справедливость аксиом 1), 2) очевидна. Для того чтобы проверить аксиому треугольника 3), достаточно доказать, что для всех действительных чисел a, b и c выполняется неравенство

$$\frac{|a-b|}{1+|a-b|} \leq \frac{|a-c|}{1+|a-c|} + \frac{|c-b|}{1+|c-b|}.$$

Последнее проверяется непосредственно с использованием неравенства треугольника для действительных чисел. Данное метрическое пространство будем обозначать $\mathcal{S}$.

Перейдем от пространств последовательностей к пространствам функций.

Пример 1.1.10. Пусть X – множество всех непрерывных функций на отрезке $[a, b]$. Положим $\rho(x, y) = \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)|$. Из теоремы Кантора следует, что функция ρ определена для всех $x, y \in X$. Аксиомы 1) и 2) очевидны, а справедливость аксиомы 3) немедленно вытекает из неравенства треугольника для метрического пространства $\mathbb{R}$. Это метрическое пространство обозначим через $C[a, b]$.

Пример 1.1.11. Пусть X – множество всех непрерывных функций на отрезке $[a, b]$. Положим $\rho_p(x, y) = \left(\int_a^b |x(t) - y(t)|^p \, dt\right)^{1/p}$, $1 \leq p < \infty$.

Поскольку всякая непрерывная функция на отрезке является интегрируемой, то функция ρ определена для всех $x, y \in X$. Проверим аксиому 1). Ясно, что $\rho(x, x) = 0$. Обратно, пусть $(x-y) \not\equiv 0$. Поскольку $(x - y)$ – непрерывная функция, то она отлична от нуля не только в некоторой точке $t_0 \in [a, b]$, но и в некоторой окрестности $(\alpha, \beta) \subset [a, b]$ этой точки. Тогда

$$\rho_p(x, y) \geq \left(\int_\alpha^\beta |x(t) - y(t)|^p \, dt \right)^{1/p} > 0,$$

т.е. аксиома 1) выполнена.

Аксиома 2) очевидна. Наконец, применяя неравенство треугольника для $\mathbb{R}_p^n$ к соответствующим интегральным суммам, мы заключаем, что

$$\left(\int_a^b |x(t) - z(t)|^p \, dt \right)^{1/p} \leq$$

$$\left(\int_a^b |x(t) - y(t)|^p \, dt \right)^{1/p} + \left(\int_a^b |y(t) - z(t)|^p \, dt \right)^{1/p}$$

для всех непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций x, y, z. Таким образом, справедливость аксиомы 3) доказана.

Это метрическое пространство обозначим через $C_p[a, b]$.

И завершим нашу "галерею" примером, показывающим, что среди метрических пространств есть достаточно экзотичные экземпляры.

Пример 1.1.12. Пусть X – произвольное множество, а

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y; \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

Это так называемое "дискретное пространство" или пространство изолированных точек. Свойства 1) и 2) метрики немедленно следуют из определения. Что касается неравенства треугольника, то

$$\rho(x, z) = 1 \leq \rho(x, y) + \rho(y, z), \quad x \neq z,$$

$$\rho(x, z) = 0 \leq \rho(x, y) + \rho(y, z), \quad x = z.$$

1.2 Лекция 2

1.2.1 Непрерывные отображения метрических пространств

Пусть $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$ – два метрических пространства с метриками ρ_X и ρ_Y соответственно, а f – отображение пространства $\mathbb{X}$ в $\mathbb{Y}$, т.е. каждому $x \in X$ ставится в соответствие некоторый элемент $f(x) = y \in Y$. Часто отображения пространств называются *операторами*, *функционалами* или *функциями*, что отражает их природу – действие, переводящее элемент из одного пространства в другое.

Одной из центральных тем анализа является поиск условий разрешимости уравнения

$$f(x) = y \tag{1.2.1}$$

(здесь элемент $y \in Y$ задан, а элемент $x \in X$ неизвестен), а также построение его (точных и приближенных) решений. Уравнение (1.2.1) называется *операторным уравнением первого рода.*

Конечно, без дополнительных предположений о свойствах отображения f такая задача необозрима. В нашем курсе мы ограничимся *непрерывными* отображениями.

Определение 1.2.1. Отображение $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ называется *непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $x \in X$, удовлетворяющих $\rho_X(x, x_0) < \delta$, выполняется неравенство

$$\rho_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Отображение $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ называется непрерывным на $\mathbb{X}$, если оно непрерывно в каждой точке X.

Конечно, из курса математического анализа вы уже знаете, что даже непрерывных отображений из пространства $\mathbb{R}^n$ в пространство $\mathbb{R}$ очень много, а их поведение может быть непредсказуемым. Для того чтобы эффективно получать информацию о наличии решений уравнения (1.2.1), нам придется сузить классы изучаемых непрерывных отображений и пространств. Например, ограничиться *сжимающими*, *непрерывными линейными*, *компактными* и т.д. отображениями *нормированных*, *евклидовых пространств* или других пространств.

Определение 1.2.2. Отображение $f : X \to Y$ будем называть *инъективным* на X, если $f(x_1) \neq f(x_2)$ при $x_1 \neq x_2$. Отображение $f : X \to Y$ называется *сюръективным* на X, если $f(X) = Y$, т.е. для всякого $y \in Y$ найдется такой элемент $x \in X$, что $y = f(x)$. Отображение $f : X \to Y$ называется *биективным,* если оно инъективно и сюрьективно.

Если отображение биективно, то каждому $y \in Y$ поставим в соответствие $x \in X$, такой, что $f(x) = y$. Определенное таким образом отображение называется обратным к $f : X \to Y$ и обозначается f^{-1} (при этом $f^{-1} : Y \to X$).

Определение 1.2.3. Отображение $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ называется *гомеоморфизмом,* а пространства $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$ называются *гомеоморфными,* если f является биективным и взаимно непрерывным (т.е. отображения f и f^{-1} являются непрерывными).

Определение 1.2.4. Отображение $f : X \to Y$ называется *изометрией,* а пространства (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) называются *изо-*

метричными, если f является гомеоморфизмом и

$$\rho_X(x_1, x_2) = \rho_Y(f(x_1), f(x_2)).$$

Изометрия пространств $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$ означает, что как метрические пространства эти объекты не различимы; различной может быть лишь природа их элементов, что с точки зрения теории метрических пространств несущественно.

Пример 1.2.1. Пусть $X = [-1, 1]$, $Y = [-2, 2]$,

$$\rho_X(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|, \quad \rho_Y(y_1, y_2) = |y_1 - y_2|.$$

Тогда отображение $f(x) = 2x$ является гомеоморфизмом, но не будет изометрией.

Пример 1.2.2. Пусть $X = [-1, 1]$, $Y = [-2, 2]$,

$$\rho_X(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|, \quad \rho_Y(y_1, y_2) = \frac{1}{2}|y_1 - y_2|.$$

Тогда отображение $f(x) = 2x$ является и гомеоморфизмом, и изометрией.

Пример 1.2.3. Пусть $X = (-\infty, \infty)$, $Y = (-1, 1)$,

$$\rho_X(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|, \quad \rho_Y(y_1, y_2) = |y_1 - y_2|.$$

Тогда отображение $f(x) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x$ является гомеоморфизмом, но не будет изометрией.

1.2.2 Сходимость

Перейдем теперь к одному из базовых понятий анализа – предельному переходу. Для этого нам понадобятся несколько определений.

Определение 1.2.5. Последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ точек метрического пространства $\mathbb{X} = (X, \rho)$ называется *сходящейся,* если найдется такая точка $x \in X$, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует номер $N \in \mathbb{N}$, такой, что для всех $n \geq N$ мы имеем $\rho(x_n, x) < \varepsilon$. Точка x называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$: $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Предложение 1.2.1. *Никакая последовательность метрического пространства не может иметь двух различных пределов.*

Доказательство. Пусть имеется два различных предела последовательности $\{x_n\}$, скажем, x и y. Тогда по неравенству треугольника имеем:

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, x_n) + \rho(x_n, y).$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, заключаем, что $\rho(x, y) = 0$. Следовательно, $x = y$ (см. аксиому 1) метрики ρ). □

Предложение 1.2.2. *Если последовательность точек метрического пространства сходится, то любая ее подпоследовательность сходится к тому же самому пределу.*

Доказательство. Пусть имеется подпоследовательность сходящейся последовательности $\{x_n\}$, скажем, $\{x_{n_j}\}$, причем $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Тогда $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0$. Поскольку $\{\rho(x_{n_j}, x)\}$ является подпоследовательностью числовой последовательности $\{\rho(x_n, x)\}$, то по известной теореме из математического анализа $\lim_{n_j\to\infty} \rho(x_{n_j}, x) = 0$. Следовательно, $\lim_{n_j\to\infty} x_{n_j} = x$. Применяя предложение 1.2.1, получаем требуемое утверждение. □

В курсе математического анализа сходимость описывалась также на языке окрестностей.

Определение 1.2.6. *Открытым шаром* $B(x_0, r)$ с центром в точке x_0 радиуса $0 < r < \infty$ в метрическом пространстве $\mathbb{X}$ называется множество точек $x \in X$ таких, что $\rho(x, x_0) < r$. Соответственно, *замкнутым шаром* $\overline{B}(x_0, r)$ с центром в точке x_0 радиуса $0 \le r < \infty$ в метрическом пространстве $\mathbb{X}$ называется множество точек $x \in X$, таких, что $\rho(x, x_0) \le r$.

Определение 1.2.7. *Окрестностью* точки $x_0 \in X$ будем называть любой открытый шар с центром в точке x_0.

Опыт евклидова пространства говорит нам, что шар меньшего радиуса строго вложен в шар большего радиуса, если их центры совпадают. В произвольном метрическом пространстве это, вообще говоря, не так.

Пример 1.2.4. В дискретном пространстве $\mathbb{X}$ рассмотрим шары

$$B(x_0, r) = \begin{cases} x_0, & 0 \le r \le 1; \\ X, & r > 1; \end{cases} \qquad \overline{B}(x_0, r) = \begin{cases} x_0, & 0 \le r < 1; \\ X, & r \ge 1. \end{cases}$$

Для таких шаров имеет место включение $B(x_0, 3) \subset B(x_0, 2)$, точнее $B(x_0, 3) = B(x_0, 2) = X$.

На самом деле, возможно и строгое включение, когда $B(x, R) \subset B(y, r)$, $B(x, R) \ne B(y, r)$, $R > r$. Соответствующий пример будет рассмотрен на практических занятиях.

1.2.3 Сходимость на языке окрестностей*

Упражнение 1.2.1. *Сами сформулируйте определение сходящейся последовательности на языке окрестностей. Докажите эквивалентность этого определения определению сходимости, сформулированному выше.*

1.2.4 Непрерывность по Гейне*

Упражнение 1.2.2. *Убедитесь в том, что непрерывные отображения метрических пространств – это те и только те отображения, для которых*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right),$$

для всякой сходящейся последовательности $\{x_n\}$ *из метрического пространства* $\mathbb{X}$ *(секвенциальная непрерывность или непрерывность по Гейне).*

Таким образом, определенная нами операция предельного перехода дает возможность развивать анализ в более общей ситуации, чем в классическом курсе математического анализа – исследовать (непрерывные) отображения произвольных метрических пространств, а не только функций на подмножествах $\mathbb{R}^n$. Однако для этого нам необходимо сначала изучить свойства самих метрических пространств, которые могут существенно отличаться от свойств евклидова пространства $\mathbb{R}^n$.

1.3 Лекция 3

1.3.1 Замыкание

Рассмотрим теперь важнейшие типы множеств в метрическом пространстве.

Определение 1.3.1. Множество $M \subset X$ называется *ограниченным,* если оно содержится целиком в некотором шаре.

Определение 1.3.2. Точка $x \in X$ называется *точкой прикосновения* множества $M \subset X$, если любая ее окрестность содержит хотя бы одну точку из M.

Определение 1.3.3. Совокупность всех точек прикосновения множества M из X называется *замыканием* множества M в $\mathbb{X}$ и обозначается $\overline{M}$.

Теорема 1.3.1. *Множества M и $\overline{M}$ связаны следующими соотношениями:*

1) $M \subset \overline{M}$;

2) $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$;

3) если $M_1 \subset M_2$, то $\overline{M}_1 \subset \overline{M}_2$;

4) $\overline{M_1 \cup M_2} = \overline{M}_1 \cup \overline{M}_2$.

Доказательство. 1) Если $x_0 \in M$, то для любого $r > 0$ имеем $x_0 \in B(x_0, r)$, т. е. всякая точка множества является точкой прикосновения для M. Следовательно, $M \subset \overline{M}$.

2) Пусть $x \in \overline{\overline{M}}$. Тогда, согласно определению замыкания, в любом шаре $B(x, r)$ найдется точка $x_1 \in \overline{M}$. Положим $r_1 = r -$

$\rho(x, x_1)$. Шар $B(x_1, r_1)$ лежит в шаре $B(x, r)$, поскольку

$$\rho(x, y) \le \rho(x, x_1) + \rho(x_1, y) \le \rho(x, x_1) + r - \rho(x, x_1) = r,$$

если $y \in B(x_1, r_1)$. Так как $x_1 \in \overline{M}$, то в $B(x_1, r_1)$ найдется точка $x_2 \in M$. Тогда $x_2 \in B(x, r)$, а значит, $x \in \overline{M}$. Мы заключаем, что $\overline{\overline{M}} \subset \overline{M}$ и, в силу 1), $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$.

3) Если $x_0 \in \overline{M}_1$, то для всякого $r > 0$ найдется точка $x_1 \in M_1 \cap B(x_0, r)$. С другой стороны, $M_1 \subset M_2$, т.е. $x_1 \in M_2 \cap B(x_0, r)$. Следовательно, $x_0 \in \overline{M}_2$.

4) Предположим, что $\overline{M_1 \cup M_2}$ не содержится в $\overline{M_1} \cup \overline{M_2}$. Тогда найдется $x \in \overline{M_1 \cup M_2}$ такой, что $x \notin \overline{M_1} \cup \overline{M_2}$. Это в точности означает, что

а) для всякого $r > 0$ найдется $x_1 \in B(x, r) \cap (M_1 \cup M_2) \subset B(x, r) \cap (M_1 \cup M_2)$;

б) $x \notin \overline{M_1}$, $x \notin \overline{M_2}$, т.е. найдется $r_0 > 0$ такое, что для всех $y \in B(x, r_0)$ имеем $y \notin M_1$ и $y \notin M_2$. Таким образом, а) противоречит б).

Обратное включение следует из 3). В самом деле, $M_1 \subset M_1 \cup M_2$, $M_2 \subset M_1 \cup M_2$. Значит, $\overline{M}_1 \subset \overline{M_1 \cup M_2}$, $\overline{M}_2 \subset \overline{M_1 \cup M_2}$ и, очевидно, $\overline{M}_1 \cup \overline{M}_2 \subset \overline{M_1 \cup M_2}$. □

Определение 1.3.4. Точка $x \in X$ называется *предельной точкой множества* $M \subset X$, если любая ее окрестность содержит бесконечно много точек из M.

Пример 1.3.1. Предельная точка x может как принадлежать множеству ($X = \mathbb{R}$, $M = [0, 1]$, $x = 1/2$), так и не принадлежать множеству ($X = \mathbb{R}$, $M = [0, 1)$, $x = 1$).

Определение 1.3.5. Точка $x \in M$ называется *изолированной* *точкой* этого множества, если найдется такая ее окрестность, в которой нет точек из M, отличных от x.

Предложение 1.3.1. *Всякая точка прикосновения множества M есть либо предельная точка, либо изолированная точка этого множества.*

Доказательство. Пусть x_0 – точка прикосновения множества M. Тогда либо для всякого $r > 0$ в шаре $B(x_0, r)$ содержится бесконечное число точек из M, либо существует $r > 0$ такое, что в шаре $B(x_0, r)$ содержится лишь конечное число точек из M. В первом случае точка x_0 является предельной, а во втором случае – изолированной. □

Отсюда заключаем, что замыкание множества M состоит из

1) изолированных точек множества M;

2) предельных точек множества M, принадлежащих M;

3) предельных точек множества M, не принадлежащих M.

Таким образом, замыкание множества M получается присоединением к M всех его предельных точек, не содержащихся в нем.

Теорема 1.3.2. *Для того чтобы точка x была точкой прикосновения множества M, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность точек из M, сходящаяся к x.*

Доказательство. Немедленно вытекает из определения точки прикосновения множества M. □

Следствие 1.3.1. *Для того чтобы точка x была предельной точкой множества M, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность попарно различных точек из M, сходящаяся к x.*

Доказательство. Немедленно вытекает из определения предельной точки множества M. □

Предложение 1.3.2. *Если* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ *и* $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, *то*

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = \rho(x, y).$$

Доказательство. Следует из неравенства треугольника, так как

$$\lim_{n\to\infty} |\rho(x_n, y_n) - \rho(x, y)| \leq$$

$$\lim_{n\to\infty} (|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_n, y)| + |\rho(x_n, y) - \rho(x, y)|) \leq$$

$$\lim_{n\to\infty} (\rho(y, y_n) + \rho(x_n, x)).$$

□

1.3.2 Замкнутые множества

Определение 1.3.6. Пусть $\mathbb{X} = (X, \rho)$ – метрическое пространство. Множество $M \subset X$ называется *замкнутым,* если оно совпадает со своим замыканием, т.е. $M = \overline{M}$.

В силу теоремы 1.3.1 замыкание любого множества есть множество замкнутое.

Пример 1.3.2. Всякое множество, состоящее из конечного числа точек, замкнуто, так как оно не имеет предельных точек.

Пример 1.3.3. Каково бы ни было метрическое пространство (X, ρ), пустое множество $\emptyset$ и само X замкнуты.

Пример 1.3.4. Всякий отрезок $[a, b] \subset \mathbb{R}$ есть множество замкнутое. В самом деле, если $x \notin [a, b]$, то шар $B(x, r)$, где $r = \min(|x - a|, |x - b|)/2$ не содержит точек отрезка $[a, b]$. Следовательно, точка x не является предельной для $[a, b]$, а значит, отрезок замкнут. Всякий интервал $(a, b) \subset \mathbb{R}$ $(-\infty < a < b < \infty)$ не замкнут, поскольку он не содержит свои предельные точки a и b.

Пример 1.3.5. Любой замкнутый шар есть множество замкнутое. Действительно, пусть $\overline{B}(x_0, R)$ – замкнутый шар в $\mathbb{X}$. Если $\overline{B}(x_0, R) = \mathbb{X},$ то этот шар замкнут (см. пример 1.3.3). Предположим, что $\overline{B}(x_0, R) \neq \mathbb{X}$. Тогда существует точка $x_1 \in \mathbb{X}$ такая, что $\rho(x_0, x_1) > R$. В силу неравенства треугольника имеем:

$$\rho(x_0, y) \geq \rho(x_0, x_1) - \rho(x_1, y) \geq \rho(x_0, x_1) - (\rho(x_0, x_1) - R)/2 > R$$

для всех $y \in B(x_1, (\rho(x_0, x_1) - R)/2)$. В частности, это означает, что шар $B(x_1, (\rho(x_0, x_1) - R)/2)$ не содержит точек шара $\overline{B}(x_0, r)$, а значит, этот последний замкнут, поскольку точка x_1 не является для него предельной.

Основные свойства замкнутых множеств перечислены в следующей теореме.

Теорема 1.3.3. *Пересечение любого числа и объединение любого конечного числа замкнутых подмножеств метрического пространства суть замкнутые множества.*

Доказательство. Пусть сначала $M = \bigcap\limits_{\alpha \in A} M_\alpha$ есть пересечение замкнутых множеств M_α (здесь A – некоторое индексное множество) и пусть x – предельная точка для M. Значит, любая ее окрестность содержит бесконечно много точек из M. Но тогда она содержит бесконечно много точек из каждого M_α. Так как все M_α замкнуты, x принадлежит каждому M_α, а поэтому $x \in M$, т.е. M замкнуто.

Пусть теперь $M = \bigcup\limits_{i=1}^{n} M_i$ – объединение конечного числа замкнутых множеств M_i. Пусть x не принадлежит M. Покажем, что точка x не может быть предельной для M. В самом деле, x не принадлежит ни одному из замкнутых множеств M_i и, следовательно, не является предельной ни для одного из них. Следовательно, для каждого i существует окрестность $B(x, r_i)$ точки x, которая содержит не более чем конечное число точек из M_i. Ясно, что $B(x, \min_i r_i)$ есть окрестность точки x, содержащая не более чем конечное число точек из M.

Таким образом, если точка не принадлежит M, то она не может быть предельной для M, т.е. M замкнуто. $\square$

1.4 Лекция 4

1.4.1 Открытые множества

Определение 1.4.1. Точка $x \in X$ называется *внутренней точкой множества* M, если существует окрестность $B(x, r)$ этой точки, целиком лежащая в M. Точка $x \in X$ называется внешней точкой множества M, если существует окрестность $B(x, r)$ этой точки, не содержащая ни одной точки из M. Точка $x \in X$ называется граничной точкой множества M, если в любом шаре $B(x, r)$ есть точки, принадлежащие M и точки, не принадлежащие M.

Границей множества M называется множество ∂M его граничных точек. Граничная точка M может как принадлежать M, так и не принадлежать.

Определение 1.4.2. Множество M, все точки которого внутренние, называется *открытым.*

Пример 1.4.1. Всякий интервал $(a, b) \subset \mathbb{R}$ $(a < b)$ есть открытое множество. Действительно, если $a < x < b$, то шар $B(x, r)$, где $r = \min(x-a, b-x)$ целиком содержится в интервале (a, b).

Пример 1.4.2. Всякий открытый шар в метрическом пространстве $\mathbb{X}$ есть множество открытое. Действительно, пусть $B(x_0, r)$ – открытый шар в $\mathbb{X}$. Если $x \in B(x_0, r)$, то $B(x, r_1) \subset B(x_0, r)$, где $r = r - \rho(x_0, x)$, поскольку

$$\rho(x_0, y) \leq \rho(x_0, x) + \rho(x, y) < r$$

для $y \in B(x, r_1)$.

Теорема 1.4.1. *Для того чтобы множество M было открытым, необходимо и достаточно, чтобы его дополнение $X \setminus M$ было замкнутым.*

Доказательство. Если M открыто, то каждая точка из M имеет окрестность, целиком принадлежащую этому множеству, т.е. не имеющую ни одной общей точки с $X \setminus M$. Следовательно, ни одна из точек, не принадлежащих $X \setminus M$ не может быть точкой прикосновения для этого $X \setminus M$, а значит, это последнее множество замкнуто.

Обратно, пусть $X \setminus M$ замкнуто. Тогда все точки, ему не принадлежащие, не являются для него предельными. Поэтому любая точка из M имеет окрестность, лежащую в M, т.е. M открыто. □

Пример 1.4.3. Каково бы ни было пространство $\mathbb{X}$, пустое множество $\emptyset$ и само X открыты. Это следует из примера 1.3.3 и теоремы 1.4.1, поскольку $\emptyset = X \setminus X$, $X = X \setminus \emptyset$.

Теорема 1.4.2. *Объединение любого числа и пересечение любого конечного числа открытых множеств суть открытые множества.*

Доказательство. Воспользуемся следующими хорошо известными формулами из теории множеств:

(1.4.1)

$$X \setminus \left(\bigcup_{\alpha \in A} M_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in A} (X \setminus M_\alpha), \quad X \setminus \left(\bigcap_{\alpha \in A} M_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in A} (X \setminus M_\alpha).$$

Теперь очевидно, что утверждение теоремы вытекает из теорем 1.3.3 и 1.4.1. □

1.4.2 Полные метрические пространства

В определении сходящейся последовательности есть один очень существенный изъян – его невозможно проверить непосредственно, не зная самого предела. В рамках классического анализа этот вопрос решался с помощью теоремы Коши о фундаментальных последовательностях. Для произвольных метрических пространств ситуация более сложная.

Определение 1.4.3. Последовательность $\{x_n\}$ точек метрического пространства $\mathbb{X}$ называется *фундаментальной,* если

для всякого $\varepsilon > 0$ существует $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ такое, что $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ для всех $n > N_\varepsilon$ и $m > N_\varepsilon$.

Лемма 1.4.1. *Всякая сходящаяся последовательность является фундаментальной.*

Доказательство. Пусть $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существует $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ такое, что $\rho(x_n, x) < \varepsilon/2$ для всех $n > N_\varepsilon$.

В силу неравенства треугольника

$$\rho(x_n, x_m) \le \rho(x_n, x) + \rho(x_m, x) < \varepsilon$$

для всех $n > N_\varepsilon$ и $m > N_\varepsilon$. □

Определение 1.4.4. Если в пространстве $\mathbb{X}$ всякая фундаментальная последовательность сходится, то это пространство называется *полным.*

Приведем примеры полных и неполных пространств.

Пример 1.4.4. Конечный интервал $X = (a, b)$ с метрикой $\rho(x, y) = |x - y|$ является неполным метрическим пространством. Например, можно взять фундаментальную последовательность $\{x_n = a + 1/n\}$, не имеющую предела в $\mathbb{X}$.

Пример 1.4.5. Пространства последовательностей l_p $(1 \leq p < \infty)$ полны. Действительно, пусть $\{x^{(m)} = (x_1^{(m)}, \dots, x_n^{(m)}, \dots)\}$ – фундаментальная последовательность в l_p. Это означает, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j^{(k)} - x_j^{(m)}|^p < \varepsilon^p \tag{1.4.2}$$

для всех $k > N_\varepsilon$ и $m > N_\varepsilon$. Зафиксировав произвольное $1 \leq j \leq n$, мы получаем

$$|x_j^{(k)} - x_j^{(m)}| < \varepsilon$$

для всех $k > N_\varepsilon$ и $m > N_\varepsilon$, т.е. $\{x_j^{(m)}\}_{m \in \mathbb{N}}$ – фундаментальная числовая последовательность. Так как пространство $\mathbb{R}$ полно, то существует $\lim\limits_{m \to \infty} x_j^{(m)} = x_j$.

Докажем, что $x = (x_1, \dots, x_n, \dots)$ принадлежит l_p и $\lim\limits_{m \to \infty} x^{(m)} = x$. Из неравенства (1.4.2) следует, что для любого фиксированного $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j^{(k)} - x_j^{(m)}|^p < \varepsilon^p.$$

В этой сумме теперь лишь конечное число слагаемых, и мы можем, зафиксировав $n \in \mathbb{N}$, перейти к пределу по $m \to \infty$ и получить

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j^{(k)} - x_j|^p \leq \varepsilon^p.$$

Это неравенство верно при любом $n \in \mathbb{N}$. Переходя к пределу по $n \to \infty$, получаем

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j^{(k)} - x_j|^p \le \varepsilon^p. \tag{1.4.3}$$

Кроме того, используя неравенство треугольника для метрики в пространстве $\mathbb{R}_p^n$ (здесь n – произвольное фиксированное), мы видим, что

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p \right)^{1/p} \le \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j^{(k)}|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j^{(k)} - x_j|^p \right)^{1/p}.$$

Снова переходя к пределу по $n \to \infty$ и учитывая сходимости рядов

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j^{(k)}|^p, \quad \sum_{j=1}^{\infty} |x_j^{(k)} - x_j|^p,$$

мы заключаем, что ряд $\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p$ сходится, т.е. $x \in l_p$.

Наконец, в силу произвольности ε, из неравенства (1.4.3) следует, что

$$\lim_{k\to\infty} \rho(x, x^{(k)}) = \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j^{(k)} - x_j|^p \right)^{1/p} = 0,$$

т.е. $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x$.

Пример 1.4.6. Пространство $C[a,b]$ полно. В самом деле, пусть $\{x_n(t)\}$ – фундаментальная последовательность в $C[a,b]$. Это означает, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ такое, что

$$|x_k(t) - x_m(t)| < \varepsilon \tag{1.4.4}$$

для всех $k > N_\varepsilon$ и $m > N_\varepsilon$ и всех $a \le t \le b$. Значит, последовательность $x_k(t)$ равномерно сходится на отрезке $[a,b]$. По известной теореме из курса математического анализа ее предел $x(t)$ есть функция непрерывная на $[a,b]$. Переходя к пределу по $k \to \infty$ получаем

$$|x(t) - x_m(t)| < \varepsilon$$

для всех $m > N_\varepsilon$ и всех $a \le t \le b$, а это и означает, что $\lim_{m\to\infty} x_m = x$ в пространстве $C[a,b]$.

Пример 1.4.7. Пространство $C_p[a,b]$ $(1 \le p < \infty)$ не полно. Действительно, рассмотрим последовательность непрерывных функций в пространстве $C_p[-1;1]$

$$x_n(t) = \begin{cases} -1 & -1 \le t \le -\frac{1}{n}; \\ nt & -\frac{1}{n} < t < \frac{1}{n}; \\ 1 & \frac{1}{n} \le t \le 1. \end{cases}$$

Она фундаментальна в $C_p[-1,1]$, так как для $m > n$ мы имеем

$$\int_{-1}^{1} |x_n(t) - x_m(t)|^p \, dt = 2\int_0^{1/n} |x_n(t) - x_m(t)|^p \, dt =$$

$$= 2\int_0^{1/m} (m-n)^p t^p \, dt + 2\int_{1/m}^{1/n} (1-nt)^p \, dt =$$

$$\frac{2(m-n)^p}{(p+1)m^{p+1}} + \frac{2(1-n/m)^{p+1}}{n(p+1)} = \frac{2(m-n)^p}{(p+1)m^p n} \le$$

$$\frac{2}{(p+1)n} = \frac{2}{(p+1)\min{(m,n)}}.$$

Предположим, что последовательность $\{x_n(t)\}$ сходится к некоторой непрерывной функции $x(t)$ в $C_p[-1,1]$ и пусть

$$\phi(t) = \begin{cases} -1, & -1 \le t \le 0; \\ 1, & 0 < t \le 1. \end{cases}$$

В силу неравенства треугольника в пространстве $\mathbb{R}_p^n$, примененного к интегральным суммам, мы легко получаем, что

$$\left(\int_{-1}^{1}|x(t)-\phi(t)|^p\,dt\right)^{1/p}\leq$$

$$\left(\int_{-1}^{1}|x(t)-x_n(t)|^p\,dt\right)^{1/p}+\left(\int_{-1}^{1}|\phi(t)-x_n(t)|^p\,dt\right)^{1/p}=$$

$$\rho(x,x_n)+2\int_0^{1/n}(1-nt)^p\,dt=$$

$$\rho(x,x_n)+\frac{2}{n(p+1)}.$$

Если интеграл $\left(\int_{-1}^{1}|x(t)-\phi(t)|^p\,dt\right)^{1/p}$ равен нулю, то

$$\int_{-1}^{0}|x(t)+1|^p\,dt=\int_0^1|x(t)-1|^p\,dt=0.$$

Как мы видели выше, см. пример 1.1.10, из непрерывности функций $x(t)+1$, $x(t)-1$ на $[-1,0]$ и $[0,1]$ соответственно следует, что $x(t)=1$ для $t>0$, $x(t)=-1$ для $t<0$, что невозможно в силу непрерывности функции $x(t)$. Поэтому $\rho(x,x_n)$ не может стремиться к нулю при $n\to\infty$.

Для доказательства неполноты пространства $C_p[a,b]$ можно рассмотреть последовательность

$$x_n(t)=\begin{cases}-1 & a\leq t\leq \frac{a+b}{2}-\frac{b-a}{n};\\ \frac{n(2t-(b+a))}{2(b-a)} & \frac{a+b}{2}-\frac{b-a}{n}<t<\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{n};\\ 1 & \frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{n}\leq t\leq b.\end{cases}$$

Пример 1.4.8. Дискретное пространство из примера 1.1.12 полно, поскольку в нем фундаментальными являются только стационарные последовательности, т.е. такие, в которых, начиная с некоторого номера, повторяется все время одна и та же точка.

Пример 1.4.9. Пространства $\boldsymbol{\mathcal{M}_0}$ и $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ полны. Более подробно мы рассмотрим этот пример на практических занятиях.

1.5 Лекция 5

1.5.1 Теорема о вложенных шарах

Попробуем ответить на естественный вопрос: как отличить полное метрическое пространство от неполного, кроме как непосредственно проверяя определение.

Напомним, что для доказательства теоремы Коши о фундаментальных последовательностях можно использовать лемму о вложенных отрезках. В теории метрических пространств аналогичную роль играет *теорема о вложенных шарах.*

Теорема 1.5.1. *Для того чтобы метрическое пространство было полным, необходимо и достаточно, чтобы в нем всякая последовательность* $\{B_j\}_{j=1}^{\infty}$ *вложенных друг в друга замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю, имела непустое пересечение.*

Доказательство. Необходимость. Предположим, что пространство $\mathbb{X}$ полно. Возьмем какую-нибудь последовательность $\{B_j = \overline{B}(x_j, r_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ вложенных друг в друга замкнутых шаров, для которой соответствующая последовательность радиусов $\{r_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ стремится к нулю при $j \to \infty$. Последовательность центров $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ этих шаров фундаментальна, поскольку $\rho(x_j, x_k) < r_j$ при $k > j$, а $r_j \to 0$ при $j \to \infty$. Так как $\mathbb{X}$ полно, то существует предел $\lim_{j\to\infty} x_j = x \in X$.

Убедимся, что $x \in \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} B_j(x_j, r_j)$. Действительно, шар B_j содержит все точки x_k, за исключением, быть может, точек $x_1, \ldots, x_{j-1}$. Таким образом, точка x является точкой прикосновения для каждого шара B_j. Но так как эти шары замкнуты, то $x \in B_j$ для всех $j \in \mathbb{N}$.

Достаточность. Возьмем какую-нибудь фундаментальную последовательность $\{x_n\}_{j=1}^{\infty}$ и докажем, что она сходится в $\mathbb{X}$. В силу фундаментальности мы можем выбрать такую точку x_{n_1}, что $\rho(x_n, x_{n_1}) < 1/2$ для всех $n \geq n_1$. Положим $B_1 = \overline{B}(x_{n_1}, 1)$. Выберем затем $n_2 > n_1$ так, чтобы $\rho(x_n, x_{n_2}) < 1/2^2$ для всех $n \geq n_2$. Положим $B_2 = \overline{B}(x_{n_2}, 1/2)$. Тогда для любой точки $x \in B_2$ имеем

$$\rho(x, x_{n_1}) \leq \rho(x, x_{n_2}) + \rho(x_{n_2}, x_{n_1}) \leq 1/2 + 1/2 = 1$$

в силу выбора точки x_{n_1}. Значит, $B_2 \subset B_1$.

Если точки $x_{n_1}, \ldots, x_{n_k}$ уже выбраны (здесь $1 \leq n_1 < n_2 \cdots < n_k$), то выберем точку $x_{n_{k+1}}$ так, чтобы $n_{k+1} > n_k$ и $\rho(x_n, x_{n_{k+1}}) < 1/2^{k+1}$ для всех $n \geq n_{k+1}$ и положим $B_{k+1} = \overline{B}(x_{n_{k+1}}, 1/2^k)$. Тогда для любой точки $x \in B_{k+1}$ имеем

$$\rho(x, x_{n_k}) \leq \rho(x, x_{n_{k+1}}) + \rho(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) \leq 1/2^k + 1/2^k = 1/2^{k-1}$$

в силу выбора точки x_{n_k}. Значит, $B_{k+1} \subset B_k$.

Продолжая это построение, получим последовательность вложенных друг в друга замкнутых шаров B_k, радиусы $r_k = 1/2^{k-1}$ которых стремятся к нулю. Эта последовательность, по предположению, имеет хотя бы одну общую точку, скажем, $x \in X$. Так как $\rho(x, x_{n_k}) \leq 1/2^{k-1}$, то $x = \lim_{n_k \to \infty} x_{n_k}$. Наконец, поскольку последовательность $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ фундаментальна, то из неравенства

$$\rho(x, x_n) \leq \rho(x, x_{n_k}) + \rho(x_n, x_{n_k})$$

следует, что $x = \lim_{n \to \infty} x_n$. □

Следствие 1.5.1. *В условиях теоремы 1.5.1 пересечение шаров* $\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} B_j$ *состоит из одной точки.*

Доказательство. Пусть пересечение шаров $\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} B_j$ содержит точки x и y ($x \neq y$). Тогда $\rho(x, x_n) \le r_n$, $\rho(y, x_n) \le r_n$, а значит, из предложения 1.2.1 следует, что $y = \lim_{n\to\infty} x_n = x$, где x_n – центр шара B_n. □

Пример 1.5.1. Без условия о том, что радиусы шаров стремятся к нулю, теорема 1.5.1 неверна. В самом деле, пусть $X = \mathbb{N}$,

$$\rho(n,m) = \begin{cases} 0, & n = m; \\ 1 + \frac{1}{k+m} & n \neq m. \end{cases}$$

Это полное метрическое пространство (доказательство аналогично доказательству для дискретного пространства). В нем замкнутые вложенные друг в друга шары $B_j = \overline{B}(j, 1 + \frac{1}{2j})$ имеют пустое пересечение, так как $B_j = \mathbb{N} \setminus \{1, \dots j-1\}$ и по формуле (1.4.1)

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} B_j = \bigcap_{j=1}^{\infty} (\mathbb{N} \setminus \{1, \dots, j-1\}) = \mathbb{N} \setminus (\bigcup_{j=1}^{\infty} \{1, \dots, j-1\}) = \emptyset.$$

Определение 1.5.1. Пусть $\mathbb{X} = (X, \rho)$ – метрическое пространство, а $M \subset X$. Пара (M, ρ) называется *подпространством* пространства $\mathbb{X}$.

Например, $\mathcal{M}_0$ является замкнутым подпространством пространства $\mathcal{M}$.

Следствие 1.5.2. *Пусть $\mathbb{X} = (X, \rho)$ – полное метрическое пространство, а $M \subset X$. Подпространство (M, ρ) полно в том и только том случае, когда множество M замкнуто в $\mathbb{X}$.*

Доказательство. Пусть (M, ρ) полно и x – его предельная точка. Тогда согласно следствию 1.3.1 существует последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in M$, сходящаяся (в $\mathbb{X}$) к x. Тогда $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ фундаментальна в (M, ρ), и, в силу полноты, эта последовательность имеет предел $\boldsymbol{y}$ в $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\rho})$. Наконец, из предложения 1.2.1 следует, что $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$, а значит, $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{M}$, т.е. множество $\boldsymbol{M}$ замкнуто.

Обратно, пусть $\boldsymbol{M}$ замкнуто. Если $\{\boldsymbol{x_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ фундаментальна в $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\rho})$, то она фундаментальна в $\mathbb{X}$. Так как $\mathbb{X}$ полно, то существует предел $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$ этой последовательности в $\boldsymbol{X}$. Ясно, что $\boldsymbol{x}$ – предельная точка для $\boldsymbol{M}$, а значит, $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{M}$. Следовательно, подпространство $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\rho})$ полно. □

Пример 1.5.2. Заменить в теореме 1.5.1 замкнутые шары на открытые нельзя. В самом деле, пусть $\boldsymbol{X} = [-1, 1]$, $\boldsymbol{\rho(x, y)} = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|$. Это замкнутый шар $\overline{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1})$ в $\mathbb{R}$, а значит, полное метрическое пространство. В нем открытые вложенные друг в друга шары $\boldsymbol{B}(-\boldsymbol{1} + \boldsymbol{1}/\boldsymbol{n}, \boldsymbol{1}/\boldsymbol{n})$ имеют пустое пересечение.

1.5.2 Плотные подмножества. Теорема Бэра

Приведем еще одно (необходимое) условие полноты метрического пространства, проливающее свет на его структуру. Для этого дадим сначала несколько определений.

Интуитивно понятно, что работать со счетными множествами гораздо проще, чем со множествами произвольной мощности. Выделим среди метрических пространств такие, для которых все еще есть надежда получить достаточно много информации, работая со счетными множествами.

Определение 1.5.2. Пусть $\boldsymbol{M_1}$ и $\boldsymbol{M_2}$ – два множества в метрическом пространстве $\mathbb{X}$. Множество $\boldsymbol{M_1}$ называется *плотным* в $\boldsymbol{M_2}$, если $\boldsymbol{M_2} \subset \overline{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{1}}$.

Определение 1.5.3. Множество $\boldsymbol{M}$ называется *всюду плотным* в $\mathbb{X}$, если $\mathbb{X} = \overline{\boldsymbol{M}}$. Множество $\boldsymbol{M}$ называется нигде не плотным в $\mathbb{X}$, если оно не плотно ни в одном шаре, т.е. если в каждом шаре $\boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{X}$ содержится шар $\boldsymbol{B'}$, не содержащий ни одного элемента из $\boldsymbol{M}$.

Определение 1.5.4. Метрическое пространство назовем *сепарабельным,* если в нем имеется счетное всюду плотное множество.

Пример 1.5.3. Пространство $\mathbb{R}$ сепарабельно, так как множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ всюду плотно в нем.

Пример 1.5.4. Пространство $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{p}}$ $(\boldsymbol{n} \geq \mathbf{1},\ \mathbf{1} \leq \boldsymbol{p} \leq \infty)$ сепарабельно, так как множество векторов $\mathbb{Q}^{\boldsymbol{n}}$ с рациональными компонентами всюду плотно в нем.

Пример 1.5.5. Пространство $\boldsymbol{l_p}$ $(\mathbf{1} \leq \boldsymbol{p} < \infty)$ сепарабельно, так как в нем плотно множество последовательностей, в каждой из которых все члены рациональны и лишь конечное число (свое для каждой последовательности) этих членов отлично от нуля.

Пример 1.5.6. Пространство всевозможных ограниченных последовательностей $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ из примера 1.1.8 несепарабельно. В самом деле, рассмотрим всевозможные последовательности, состоящие из нулей и единиц. Они образуют множество мощности континуум, поскольку между ними и действительными числами (в двоичной записи) можно установить взаимно однозначное соответствие. Расстояние между двумя такими точками равно единице. Рассмотрим множество открытых шаров радиуса $\boldsymbol{r} = \mathbf{1/2}$ с центрами в точках $\boldsymbol{\mathcal{M}}$.

Эти шары, очевидно, не пересекаются. Если некоторое множество всюду плотно в $\mathcal{M}$, то каждый из построенных шаров должен содержать хотя бы по одной точке этого множества. Значит, оно не может быть счетным.

Теорема 1.5.2. (Теорема Бэра) *Полное метрическое пространство не может быть представлено в виде объединения счетного числа нигде не плотных множеств.*

Доказательство. Предположим противное: пусть каждое из множеств M_n нигде не плотно и $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} M_n$. Возьмем какой-нибудь замкнутый шар B_0 радиуса 1. Поскольку M_1, будучи нигде не плотным, не плотно и в B_0, то существует замкнутый шар B_1 радиуса меньше $1/2$, такой, что $B_1 \subset B_0$ и $B_1 \cap M_1 = \emptyset$. Далее, M_2, будучи нигде не плотным, не плотно и в B_1, т.е. существует замкнутый шар B_2 радиуса меньше $1/3$, такой, что $B_2 \subset B_1$ и $B_2 \cap M_2 = \emptyset$. Продолжая построение, мы получаем последовательность B_j вложенных друг в друга замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю, причем $B_j \cap M_j = \emptyset$. В силу теоремы 1.5.1 пересечение $\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} B_j$ содержит некоторую точку $x \in X$. По построению x не принадлежит ни одному из множеств M_j, $j \in \mathbb{N}$, следовательно, $x \notin \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} M_j$. Значит, $X \neq \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} M_j$, что противоречит предположению теоремы. $\square$

1.6 Лекция 6

1.6.1 Полнота и разрешимость уравнений

С точки зрения решения уравнения (1.2.1) свойство полноты является одним из ключевых. В самом деле, рассмотрим метрические пространства $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ с обычными метриками и непрерывные отображения:

$$f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, \quad f(x) = x^2,$$

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F(y) = y^2.$$

Как выяснили еще пифагорейцы в IV веке до н.э., уравнение

$$f(x) = 2$$

не имеет решения – слишком мал запас элементов в $\mathbb{Q}$. В то же время уравнение

$$F(x) = y$$

имеет решение для всех $y \geq 0$. Такое резкое различие обусловлено, в частности, тем, что пространство $\mathbb{R}$ – полное, а $\mathbb{Q}$ – нет. Заметим, что для построения пространства действительных чисел (фактически, как естественного расширения пространства чисел рациональных) человечеству понадобилось более двух тысяч лет.

Конечно, для существования решения уравнения (1.2.1) для всех правых частей одной полноты мало, нужны дополнительные свойства тройки $(\mathbb{X}, \mathbb{Y}, f)$, см. ниже.

1.6.2 Пополнение пространства

Определение 1.6.1. Пусть $\mathbb{X} = (X, \rho)$ – метрическое пространство. Полное метрическое пространство $\tilde{\mathbb{X}} = (\tilde{X}, \tilde{\rho})$ называется *пополнением* пространства $\mathbb{X}$, если

1) $\mathbb{X}$ является подпространством пространства $\tilde{\mathbb{X}}$;

2) $\tilde{X}$ всюду плотно в $\tilde{X}$.

Теорема 1.6.1. *Каждое метрическое пространство $\mathbb{X}$ имеет пополнение, и это пополнение единственно с точностью до изометрии, оставляющей неподвижными точки пространства $\mathbb{X}$.*

Доказательство. Сначала докажем единственность. Более точно, докажем, что если $\tilde{\mathbb{X}}$ и $\tilde{\mathbb{X}}'$ – два пополнения пространства $\mathbb{X}$, то существует такая биекция $\phi : \tilde{X} \to \tilde{X}'$, что

1) $\phi(x) = x$ для всех $x \in X$;

2) $\tilde{\rho}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{\rho}'(\phi(\tilde{x}), \phi(\tilde{y}))$, где $\tilde{\rho}'$ – метрика в $\tilde{\mathbb{X}}'$.

Отображение ϕ определим следующим образом. Пусть $\tilde{x}$ – произвольная точка $\tilde{X}$. Тогда по определению пополнения существует последовательность $\{x_n\}$ из X, сходящаяся к $\tilde{x}$. С другой стороны, $\{x_n\} \subset X'$. Так как $\mathbb{X}$ есть подпространство $\tilde{\mathbb{X}}'$, то $\{x_n\}$ – фундаментальна в $\tilde{\mathbb{X}}'$. А поскольку $\tilde{\mathbb{X}}'$ полно, то эта последовательность сходится к некоторому $\tilde{x}' \in \tilde{X}'$. Положим $\tilde{x}' = \phi(\tilde{x})$.

Заметим, что точка $\tilde{x}'$ не зависит от выбора последовательности $\{x_n\}$, так как если другая последовательность, скажем, $\{y_n\}$, также сходится к элементу x в $\tilde{\mathbb{X}}$, то последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ фундаментальны в $\tilde{\mathbb{X}}'$ и сходятся к тому же самому пределу.

Отображение ϕ инъективно в силу единственности предела (см. предложение 1.2.1). Обратное отображение определено для всех $\tilde{x}'$ с помощью той же процедуры, и, следовательно, также инъективно. Именно, по определению пополнения существует последовательность $\{x_n\} \subset \mathbb{X}$, сходящаяся к $\tilde{x}'$. С другой стороны, $\{x_n\} \subset \tilde{\mathbb{X}}$, а значит, эта последовательность сходится к некоторому $\tilde{x} \in \tilde{X}$, при этом $\tilde{x}' = \phi(\tilde{x})$. Следовательно ϕ взаимно однозначно.

По построению $\phi(x) = x$ для всех $x \in \mathbb{X}$. Далее, пусть $\{x_n\}$ сходится к $\tilde{x}$ в $\tilde{\mathbb{X}}$ и $\{x_n\}$ сходится к $\tilde{x}'$ в $\tilde{\mathbb{X}}'$; $\{y_n\}$ сходится к $\tilde{y}$ в $\tilde{\mathbb{X}}$ и $\{y_n\}$ сходится к $\tilde{x}'$ в $\tilde{\mathbb{X}}'$. Тогда, в силу предложения 1.3.2,

$$\tilde{\rho}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim_{n\to\infty} \tilde{\rho}(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n),$$

$$\tilde{\rho}'(\tilde{x}', \tilde{y}') = \lim_{n\to\infty} \tilde{\rho}'(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n).$$

Следовательно, $\tilde{\rho}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{\rho}'(\tilde{x}', \tilde{y}')$, откуда следует и взаимная непрерывность отображения ϕ. Итак, ϕ – искомая изометрия пространств $\tilde{\mathbb{X}}$ и $\tilde{\mathbb{X}}'$.

Докажем теперь существование пополнения. Идея этого доказательства та же, что и в канторовской теории действительных чисел.

Пусть $\mathbb{X}$ – произвольное метрическое пространство. Назовем две фундаментальные последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ из $\mathbb{X}$ эквивалентными, если

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = 0.$$

Название "эквивалентность" оправдано, поскольку из аксиом метрики следует, что это отношение рефлексивно ($\rho(x_n, x_n) = 0$), симметрично ($\rho(x_n, y_n) = \rho(y_n, x_n)$) и транзитивно ($\rho(x_n, z_n) \leq \rho(x_n, y_n) + \rho(y_n, z_n)$). Следовательно, все фундаментальные последовательности распадаются на классы эквивалентных между собой последовательностей. Пусть $\tilde{X}$ – множество всевозможных классов эквивалентных между собой фундаментальных последовательностей. Расстояние $\tilde{\rho}$ на этом множестве зададим следующим образом. Пусть $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ – два таких класса. Выберем в каждом из этих классов по одному представителю, т.е. по некоторой фундаментальной последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$. Положим

$$\tilde{\rho}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n). \tag{1.6.1}$$

Лемма 1.6.1. *Предел (1.6.1) всегда существует и не зависит от выбора представителей* $\{x_n\}$ *и* $\{y_n\}$*.*

Доказательство. В силу неравенства треугольника

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m)| \le |\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_n)| +$$

$$|\rho(x_m, y_n) - \rho(x_m, y_m)| \le |\rho(x_m, x_n) + \rho(y_m, y_n)|.$$

Так как последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ фундаментальны, то и числовая последовательность $\{a_n = \rho(x_n, y_n)\}$ фундаментальна, а, значит, имеет предел.

Докажем теперь, что этот предел не зависит от выбора представителей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$. Пусть $\{x_n\}, \{x'_n\} \in \tilde{x}$, и $\{y_n\}, \{y'_n\} \in \tilde{x}$. Тогда

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x'_n, y'_n)| \le \rho(x_n, x'_n) + \rho(y_n, y'_n).$$

Поскольку $\{x_n\}$ эквивалентно $\{x'_n\}$, а $\{y_n\}$ эквивалентно $\{y'_n\}$, то

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \rho(x'_n, y'_n).$$

Лемма доказана. □

Лемма 1.6.2. *Предел (1.6.1) определяет метрику на множестве* $\tilde{X}$*.*

Доказательство. Так как ρ – метрика на X, то $\tilde{\rho}(\tilde{x}, \tilde{y}) \ge 0$. Если предел (1.6.1) равен нулю, то последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ эквивалентны, а значит, $\tilde{x} = \tilde{y}$, т.е. аксиома 1) выполнена.

Аксиома 2) очевидна.

Проверим аксиому треугольника. Поскольку ρ – метрика на X, то

$$\rho(x_n, z_n) \le \rho(x_n, y_n) + \rho(y_n, z_n).$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$\rho(\tilde{x}, \tilde{z}) \leq \rho(\tilde{x}, \tilde{y}) + \rho(\tilde{y}, \tilde{z}).$$

Лемма доказана. □

Лемма 1.6.3. *Пространство $\mathbb{X}$ можно рассматривать как всюду плотное подпространство в $\tilde{\mathbb{X}}$.*

Доказательство. Каждой точке $x \in \mathbb{X}$ отвечает класс эквивалентных фундаментальных последовательностей, сходящихся к x. Он не пуст, так как он содержит стационарную последовательность, все члены которой равны x. При этом, если $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, $y = \lim_{n\to\infty} y_n$, то согласно предложению 1.3.2,

$$\rho(x, y) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = \tilde{\rho}(\tilde{x}, \tilde{y}).$$

Следовательно, соотнеся каждой точке $x \in \mathbb{X}$ класс сходящихся к ней последовательностей, мы изометрически отобразили пространство $\mathbb{X}$ в пространство $\tilde{\mathbb{X}}$. В дальнейшем мы не будем различать само пространство $\mathbb{X}$ и его образ в $\tilde{\mathbb{X}}$.

Покажем, что $\mathbb{X}$ всюду плотно в $\tilde{\mathbb{X}}$. Действительно, пусть $\tilde{x} \in \tilde{\mathbb{X}}$ и $\varepsilon > 0$ – произвольно. Выберем в $\tilde{x}$ представителя, т.е. некоторую фундаментальную последовательность $\{x_n\}$. Пусть $N \in \mathbb{N}$ таково, что $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$ для всех $n, m > N$. Тогда

$$\tilde{\rho}(x_n, \tilde{x}) = \lim_{m\to\infty} \rho(x_n, x_m) \leq \varepsilon$$

при $n > N$, т.е. произвольная окрестность точки $\tilde{x}$ содержит некоторую точку из $\mathbb{X}$. Таким образом, замыкание $\mathbb{X}$ есть $\tilde{\mathbb{X}}$. □

Остается доказать полноту пространства $\tilde{\mathbb{X}}$. Заметим, прежде всего, что по построению $\tilde{\mathbb{X}}$ любая фундаментальная последовательность $\{x_n\} \subset \mathbb{X}$ сходится в $\tilde{\mathbb{X}}$ к точке $\tilde{x} \in \tilde{\mathbb{X}}$, определяемой этой самой последовательностью. В самом деле, $\tilde{\rho}(\tilde{x}, x_n) =$

$\lim_{k\to\infty}\rho(x_k,x_n)$ может быть сделано сколь угодно малым в силу фундаментальности последовательности $\{x_n\}$.

Далее, так как $\mathbb{X}$ плотно в $\tilde{\mathbb{X}}$, то для любой фундаментальной последовательности точек $\{\tilde{x}_n\}\subset\tilde{\mathbb{X}}$ можно построить последовательность точек $\{x_n\}\subset X$ такую, что $\tilde{\rho}(x_n,\tilde{x}_n)<1/n$. Последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна в $\mathbb{X}$, так как

$$\rho(x_n,x_m)\le\tilde{\rho}(x_n,\tilde{x}_n)+\tilde{\rho}(\tilde{x}_n,\tilde{x}_m)+\tilde{\rho}(x_m\tilde{x}_m).$$

По доказанному ранее последовательность $\{x_n\}$ сходится в $\tilde{\mathbb{X}}$ к некоторой точке $\tilde{x}$. В силу неравенства

$$\tilde{\rho}(\tilde{x}_n,\tilde{x})\le\tilde{\rho}(x_n,\tilde{x}_n)+\tilde{\rho}(x_n,\tilde{x})$$

последовательность $\{\tilde{x}_n\}$ также сходится к $\tilde{x}$. □

Пример 1.6.1. Пополнение $\mathbb{Q}$ суть $\mathbb{R}$ (известно из курса математического анализа).

Пример 1.6.2. Как известно из курса математического анализа, пополнение пространства $C_p[a,b]$ $(1\le p<\infty)$ совпадает с пространством $L_p[a,b]$ измеримых функций таких, что их модули в степени p интегрируемы по Лебегу на отрезке $[a,b]$.

К сожалению, конструкция пополнения приводит к существенному расширению пространства и, во многих случаях, к потере конструктивности описания элементов пополнения.

1.7 Лекция 7

1.7.1 Принцип сжимающих отображений

Покажем, как можно использовать изученную нами теорию для решения одного важного, хотя и узкого, класса уравнений.

Определение 1.7.1. Пусть $\mathbb{X}$ – метрическое пространство. Отображение $A : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ называется *сжимающим* (или сжатием), если существует такое число $0 \le \alpha < 1$, что для всех $x, y \in \mathbb{X}$ выполняется неравенство

$$\rho(Ax, Ay) \le \alpha\, \rho(x, y).$$

Очевидно, всякое сжимающее отображение является непрерывным.

Определение 1.7.2. Точка $x \in \mathbb{X}$ называется *неподвижной точкой* отображения $A : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$, если $Ax = x$.

Иными словами, неподвижные точки отображения A – это решения уравнения $Ax - x = 0$.

Теорема 1.7.1. (Принцип сжимающих отображений) *Всякое сжимающее отображение $A : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ в полном метрическом пространстве $\mathbb{X}$ имеет одну и только одну неподвижную точку.*

Доказательство. Пусть x_0 – произвольная точка в $\mathbb{X}$. Положим $x_1 = Ax_0$, $x_2 = Ax_1$ и т.д.: $x_n = Ax_{n-1} = A^n x_0$.

Покажем, что последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна в $\mathbb{X}$. Действительно, для $m \ge n$ мы имеем

$$\rho(x_n, x_m) = \rho(A^n x_0, A^m x_0) \le \alpha^n \rho(x_0, x_{m-n}) \le$$

$$\alpha^n(\rho(x_0,x_1)+\rho(x_1,x_2)+\cdots+\rho(x_{m-n-1},x_{m-n}))\leq$$

$$\alpha^n\rho(x_0,x_1)(1+\alpha+\cdots+\alpha^{m-n-1})\leq\frac{\alpha^n\rho(x_0,x_1)}{1-\alpha},$$

или, короче,

$$\rho(x_n,x_m)\leq\frac{\alpha^n\rho(x_0,x_1)}{1-\alpha},\quad m\geq n. \tag{1.7.1}$$

Так как $0\leq\alpha<1$, то при достаточно большом n эта величина сколь угодно мала. В силу полноты пространства $\mathbb{X}$ последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, который мы обозначим через x.

Из непрерывности отображения A следует, что

$$Ax=A\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}Ax_n=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=x.$$

Итак, существование неподвижной точки доказано. Докажем ее единственность. Так как A – сжимающее отображение, то из $Ax=x$, $Ay=y$, следует, что $\rho(x,y)\leq\alpha\rho(x,y)$. Поскольку $\alpha<1$, то $\rho(x,y)=0$, т.е. $x=y$. □

Заметим, что последовательность $\{x_n\}$ представляет собой последовательность приближенных решений уравнения $Ax=x$, а формула (1.7.1) дает эффективный способ оценки точности этих приближенных решений, поскольку, переходя в ней к пределу при $m\to\infty$, мы получаем

$$\rho(x_n,x)\leq\frac{\alpha^n\rho(x_0,x_1)}{1-\alpha}. \tag{1.7.2}$$

Следствие 1.7.1. *Пусть $A:\mathbb{X}\to\mathbb{X}$ – такое непрерывное отображение в полном метрическом пространстве $\mathbb{X}$, что некоторая его степень $B=A^n$ является сжатием. Тогда отображение A имеет одну и только одну неподвижную точку.*

Доказательство. В самом деле, согласно теореме 1.7.1, отображение B имеет неподвижную точку x. Тогда для всякого $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$Ax = AB^k x = B^k A x = B^k x_0.$$

Следовательно, используя доказательство теоремы 1.7.1, получаем

$$Ax = \lim_{k\to\infty} B^k x_0 = x.$$

Эта неподвижная точка единственна, поскольку всякая неподвижная точка отображения A суть неподвижная точка отображения $A^n = B$, для которого неподвижная точка может быть только одна. □

1.7.2 Применение принципа сжимающих отображений к обыкновенным дифференциальным уравнениям*

Пример 1.7.1. В курсе обыкновенных дифференциальных уравнений вы уже встречались с применением принципа сжимающих отображений для изучения задачи Коши. Коротко напомним об этом.

Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ – некоторая область (открытое связное множество), а точка (x_0, y_0) принадлежит G. Пусть функция $f(x, y)$ определена, непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по y в области G:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le M|y_1 - y_2|$$

с некоторой постоянной $M > 0$.

Докажем, что на некотором отрезке $[x_0 - d, x_0 + d]$ существует единственное решение $y = \phi(x)$ задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y); \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{1.7.3}$$

Легко заметить, что эта задача Коши эквивалентна следующему интегральному уравнению:

$$\phi(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, \phi(t))\, dt. \tag{1.7.4}$$

В силу непрерывности функции f найдутся некоторая постоянная $K > 0$ и область $G' \subset G$ такие, что $(x_0, y_0) \in G'$ и $|f(x, y)| \le K$. Подберем $d > 0$ так, чтобы

1) $(x, y) \in G'$, если (x, y) принадлежит прямоугольнику $\Pi = \{|x - x_0| \le d,\ |y - y_0| \le Kd\}$;

2) $Md < 1$.

Обозначим через $\mathbb{X}$ пространство непрерывных функций на отрезке $[x_0 - d, x_0 + d]$ и таких, что $|\phi(x) - y_0| \le Kd$ с метрикой $\rho = \max_x |\phi_1(x) - \phi(x)|$. Пространство $\mathbb{X}$ полно, так как оно является (замкнутым) подпространством полного пространства $C([x_0 - d, x_0 + d])$.

Отображение

$$(A\psi)(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, \psi(t))\, dt$$

действует из $\mathbb{X}$ в $\mathbb{X}$ и является в нем сжатием.

В самом деле, для $\psi \in \mathbb{X}$ и $|x - x_0| \le d$ мы имеем

$$|A\psi(x) - y_0| = \left| \int\limits_{x_0}^{x} f(t, \psi(t))\, dt \right| \le Kd,$$

следовательно, $A(\mathbb{X}) \subset \mathbb{X}$. Кроме того,

$$\rho(A\psi_1, A\psi_2) \le \int\limits_{x_0}^{x} |f(t, \psi_1(t)) - f(t, \psi_2(t))|\, dt \le d\, M \rho(\psi_1, \psi_2).$$

Так как $Md < 1$, то A – сжатие (т.е. уравнение (1.7.4) имеет единственное решение в пространстве $\mathbb{X}$).

1.7.3 Применение принципа сжимающих отображений к интегральным уравнениям

Интегральные уравнения естественно появляются в рамках основных моделей естествознания.

Пример 1.7.2. Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$f(x) = \phi(x) + \lambda \int_a^b K(x, y) f(y)\, dy, \tag{1.7.5}$$

где $K(x, y)$ и $\phi(x)$ – заданные функции, λ – произвольный параметр, а $f(x)$ – неизвестная. Докажем разрешимость этого уравнения в пространстве $C[a, b]$ для малых значений параметра λ.

Предположим, что $K(x, y)$ и $\phi(x)$ непрерывны при $x, y \in [a, b]$. Тогда найдется $M > 0$ такое, что $|K(x, y)| \leq M$. Рассмотрим отображение

$$(Ag)(x) = \phi(x) + \lambda \int_a^b K(x, y) g(y)\, dy,$$

в полном метрическом пространстве $C[a, b]$. Имеем

$$\rho(Ag_1, Ag_2) \leq M\, |\lambda||b - a|\, \rho(g_1, g_2).$$

Следовательно, при $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$, отображение A является сжимающим, а значит, уравнение (1.7.5) имеет единственное решение в метрическом пространстве $C[a, b]$.

Пример 1.7.3. Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра

$$f(x) = \phi(x) + \lambda \int_a^x K(x, y) f(y)\, dy, \tag{1.7.6}$$

где $K(x, y)$ и $\phi(x)$ – заданные функции, λ – произвольный параметр, а $f(x)$ – неизвестная функция. Докажем разрешимость этого уравнения в пространстве $C[a, b]$ для всех значений параметра λ.

Предположим, что $K(x, y)$ и $\phi(x)$ непрерывны при $x, y \in [a, b]$. Тогда найдется $M > 0$ такое, что $|K(x, y)| \leq M$. Рассмотрим отображение

$$(Ag)(x) = \phi(x) + \lambda \int\limits_a^x K(x, y)g(y)\, dy$$

в полном метрическом пространстве $C[a, b]$. Имеем

$$|Ag_1(x) - Ag_2x)| = |\lambda| \left| \int\limits_a^x K(x, y)(g_1(y) - g_2(y))\, dy \right| \leq$$

$$\leq |\lambda| M(x - a)\rho(g_1, g_2).$$

Отсюда

$$|A^2 g_1(x) - A^2 g_2 x)| = |\lambda| \left| \int\limits_a^x K(x, y)(Ag_1(y) - Ag_2(y))\, dy \right| \leq$$

$$\leq |\lambda|^2 M^2 \frac{(x - a)^2}{2} \rho(g_1, g_2).$$

И, вообще,

$$|A^n g_1(x) - A^n g_2 x)| = |\lambda| \left| \int\limits_a^x K(x, y)(A^{n-1} g_1(y) - A^{n-1} g_2(y))\, dy \right| \leq$$

$$\leq |\lambda|^n M^n \frac{(b - a)^n}{n!} \rho(g_1, g_2).$$

При любом значении λ число n можно выбрать настолько большим, что $|\lambda|^n M^n \frac{(b-a)^n}{n!} < 1$. Тогда отображение A^n является сжимающим, а значит, уравнение (1.7.6) имеет единственное решение в пространстве $C[a, b]$.

Глава 2

Раздел II: Линейные метрические пространства и функционалы

2.1 Лекция 8

2.1.1 Линейные пространства*

Как мы видели выше, среди метрических пространств встречаются очень "экзотичные" экземпляры, с которыми достаточно сложно работать. Естественно, что это одно из следствий слишком высокого уровня абстрагирования от объектов окружающего нас мира. Пространства, возникающие в современных моделях естествознания менее абстрактны и обычно учитывают различные "геометрические" и "алгебраические" свойства привычного нам евклидова пространства.

Нам придется рассматривать более узкий класс пространств для того, чтобы получить более обозримое описание их непрерывных отображений и соответствующих операторных уравнений.

Определение 2.1.1. Непустое множество $\boldsymbol{L}$ называется *линейным или векторным пространством* над полем $\boldsymbol{K}$, если оно удовлетворяет следующим условиям.

I. Для любых двух элементов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{L}$ определен элемент $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{L}$, называемый их суммой и обозначаемый $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$, причем

1) $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$ (коммутативность);

2) $\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}$ (ассоциативность);

3) в $\boldsymbol{L}$ существует такой элемент $\mathbf{0}$, что $\boldsymbol{x}+\mathbf{0}=\boldsymbol{x}$ для всех $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{L}$ (существование нуля);

4) для каждого $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{L}$ существует такой элемент $-\boldsymbol{x}$, что $\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=\mathbf{0}$ (существование противоположного элемента).

II. Для любого скаляра $\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{K}$ и любого элемента $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{L}$ определен элемент $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{L}$, называемый произведением элемента $\boldsymbol{x}$ на скаляр $\boldsymbol{\alpha}$ и обозначаемый $\boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{x}$, причем

1) $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{x}$;

2) $\mathbf{1}\,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$, где $\mathbf{1}$ – единица в поле $\boldsymbol{K}$;

3) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{x}$;

4) $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{y}$.

Мы будем использовать в качестве поля $\boldsymbol{K}$ поля комплексных и действительных чисел.

Пример 2.1.1. Пространство $\mathbb{R}$, т.е. совокупность всех действительных чисел с обычными операциями сложения и умножения суть линейное пространство над полем $\mathbb{R}$.

Пример 2.1.2. Пространство $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$, т.е. совокупность всевозможных наборов $\boldsymbol{n}$ действительных чисел с обычными операциями сложения векторов и умножения их на действительное число суть линейное пространство над полем $\mathbb{R}$.

Пример 2.1.3. Пространство $\mathbb{C}^{\boldsymbol{n}}$, т.е. совокупность всевозможных наборов $\boldsymbol{n}$ комплексных чисел с обычными операциями сложения векторов и умножения их на комплексное число суть линейное пространство над полем $\mathbb{C}$.

Пример 2.1.4. Непрерывные вещественные (комплексные) функции с обычными операциями сложения функций и умножения их на вещественное (комплексное) число суть линейное пространство над полем $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$).

Пример 2.1.5. Пространство l_p, т.е. совокупность всевозможных последовательностей $(x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ действительных чисел, удовлетворяющих условию $\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p < \infty$, с обычными операциями сложения последовательностей и умножения их на действительное число суть линейное пространство над полем $\mathbb{R}$.

Определение 2.1.2. Линейные пространства L_1 и L_2 над полем K называются *изоморфными* ($L_1 \cong L_2$), если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие $\phi : L_1 \to L_2,$ согласованное с операциями сложения векторов и умножения на скаляр в этих пространствах. Это означает, что $\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y)$, $\phi(\alpha x) = \alpha\phi(x)$ для всех $x, y \in L_1$ и всех $\alpha \in K$.

Пример 2.1.6. Пространство $\mathbb{R}^n$ изоморфно линейному пространству всех многочленов степени $(n-1)$ над полем R.

Напомним несколько полезных определений из курса линейной алгебры.

Определение 2.1.3. Элементы $x_1, \ldots, x_n$ линейного пространства L называются *линейно зависимыми,* если существуют такие числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, не все равные нулю, что

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j = 0.$$

В противном случае эти элементы называются линейно независимыми. Бесконечная система элементов $x_1, \dots, x_n, \dots$ называется *линейно независимой,* если любая ее конечная подсистема линейно независима.

Определение 2.1.4. Если в пространстве L можно найти n линейно независимых векторов, а любые $(n+1)$ элементов линейно зависимы, то говорят, что пространство имеет *размерность* n ($\dim L = n$). Если же в L можно указать систему, состоящую из произвольного числа линейно независимых элементов, то говорят, что пространство L бесконечномерно.

Определение 2.1.5. *Базисом* в n-мерном пространстве называется любая система, состоящая из n линейно независимых векторов.

Конечномерным пространствам было уделено много внимания в курсе линейной алгебры. Мы будем заниматься, как правило, бесконечномерными пространствами. Наличие базиса позволит нам использовать уже знакомый из курсов линейной алгебры и аналитической геометрии метод координат.

Пример 2.1.7. Из курса линейной алгебры нам известно, что $\dim \mathbb{R}^n = n$. В качестве базиса в этом пространстве можно взять систему $\{e_j\}_{j=1}^n$, где j-тая компонента вектора e_j равна единице, а все остальные равны нулю.

Пример 2.1.8. Пространство l_p бесконечномерно, поскольку система векторов $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ является линейно независимой.

Пример 2.1.9. Пространство $C[a, b]$ бесконечномерно, поскольку из основной теоремы алгебры следует, что система мономов $\{t^n\}_{n=1}^{\infty}$ $(a \leq t \leq b)$ является линейно независимой.

Определение 2.1.6. Непустое подмножество L' линейного пространства L называется *линейным многообразием* (подпространством), если оно само является линейным пространством по отношению к операциям сложения и умножения на скаляр в L, т.е. если $\alpha x + \beta y \in L'$ для всех $\alpha, \beta \in K$, для всех $x, y \in L'$.

Пример 2.1.10. Во всяком пространстве L имеется подпространство, состоящее из одного нуля – нулевое подпространство. С другой стороны, все L можно рассматривать как свое подпространство.

Определение 2.1.7. Линейное многообразие (подпространство), отличное от L и содержащее хотя бы один ненулевой элемент называется *собственным.*

Пример 2.1.11. Пусть x – некоторый ненулевой элемент линейного пространства L. Совокупность $\mathcal{L}(x) = \{\alpha x\}$, где α пробегает все поле K, образует одномерное подпространство пространства L.

Пример 2.1.12. Совокупность всех многочленов на отрезке

$[a, b]$ образует собственное линейное многообразие (подпространство) в пространстве $C[a, b]$.

Пример 2.1.13. Пространство l_2 образует линейное многообразие (подпространство) в пространстве $\mathcal{M}$.

Пример 2.1.14. Пространство $\mathcal{M}_0$ образует линейное многообразие (подпространство) в пространстве $\mathcal{M}$.

Пример 2.1.15. Пусть $\{x_\beta\}_{\beta \in B}$ – некоторое непустое подмножество линейного пространства L. Минимальное линейное многообразие (подпространство) $\mathcal{L}(\{x_\beta\})$, содержащее систему $\{x_\beta\}_{\beta \in B}$, называется линейной оболочкой множества $\{x_\beta\}_{\beta \in B}$. По крайней мере, одно подпространство, содержащее $\{x_\beta\}_{\beta \in B}$, существует: это все пространство L. Так как пересечение подпространств снова есть подпространство, то $\mathcal{L}(\{x_\beta\})$ всегда существует и является пересечением всех подпространств, содержащих $\{x_\beta\}_{\beta \in B}$.

2.1.2 Нормированные пространства

В геометрии и, в частности, в аналитической геометрии, важное значение имело понятие длины отрезка (вектора). Мы постараемся обобщить это понятие.

Определение 2.1.8. Однозначная неотрицательная функция $\|x\|$, заданная на линейном пространстве L, называется *нормой,* если

1) $\|x\| = 0$ в том и только том случае, когда $x = 0$ (разделение точек);

2) $\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$ для всех $x, y \in L$ (неравенство треугольника);

3) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ для всех $x \in L$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$ (положительная однородность).

Линейное пространство с нормой $\|.\|$ называется нормированным пространством.

Предложение 2.1.1. *Всякое нормированное пространство L является метрическим пространством с метрикой*

$$\rho(x, y) = \|x-y\|.$$

Доказательство. Немедленно вытекает из определения нормы. □

Пример 2.1.16. Пространство $\mathbb{R}^n_p$ является нормированным с нормой

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{1/p}.$$

Пример 2.1.17. Пространство l_p $(1 \leq p < \infty)$ является нормированным с нормой

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{1/p}.$$

Пример 2.1.18. Пространство $C[a, b]$ является нормированным с нормой

$$\|x\| = \max_{t \in [a,b]} |x(t)|.$$

Пример 2.1.19. Пространство $C_p[a,b]$ является нормированным с нормой

$$\|x\|_p = \left(\int_a^b |x(t)|^p\,dt\right)^{1/p}.$$

Определение 2.1.9. Полное нормированное пространство называется *банаховым.*

Определение 2.1.10. Подмножество нормированного пространства L называется *подпространством,* если оно замкнуто и является линейным многообразием (подпространством) в L.

Заметим, что в конечномерном пространстве любое линейное подпространство замкнуто. Для бесконечномерного пространства это не так. Например, подпространство многочленов в пространстве $C[a,b]$ не замкнуто.

Определение 2.1.11. Две нормы $\|.\|_1$ и $\|.\|_2$ называются *эквивалентными,* если существуют такие неотрицательные постоянные c_1 и c_2, что для всех $x \in L$

$$c_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2\|x\|_1.$$

Пример 2.1.20. Нормы $\|.\|_p$ $(1 \leq p \leq \infty)$ на пространстве $\mathbb{R}^n$ эквивалентны. На самом деле, любые две нормы на всяком конечномерном пространстве являются эквивалентными. Докажите это самостоятельно с использованием теоремы Вейерштрасса о максимумах и минимумах непрерывных функций на компактах.

Пример 2.1.21. На пространстве непрерывных функций на отрезке $[a, b]$ нормы $\|x\| = \max_{t\in[a,b]} |x(t)|$ и $\|x\|_p = \left(\int_a^b |x(t)|^p\, dt\right)^{1/p}$ не являются эквивалентными, поскольку с первой нормой получаем полное пространство, а со второй – неполное.

2.1.3 Пополнение нормированного пространства*

Следствие 2.1.1. *Каждое нормированное пространство L имеет пополнение, которое также является нормированным пространством.*

Доказательство. Конструкция пополнения *метрического* пространства подробно рассмотрена нами на лекции 1.6. Нужно только заметить, что если L – нормированное пространство, то

1) пространство $\tilde{L}$ (состоящее из классов фундаментальных последовательностей метрического пространства $\mathbb{X} = (L, \rho_X(x, y) = \|x - y\|_L)$ и описанное в доказательстве теоремы 1.6.1) является линейным;

2) норму на пространстве $\tilde{L}$ можно задать следующим образом:

$$\|\tilde{x}\|_{\tilde{L}} = \lim_{\nu\to\infty} \|x_\nu\|_L,$$

где $\{x_\nu\}$ – какая-нибудь фундаментальная последовательность из класса $\tilde{x} \in \tilde{L}$. □

2.1.4 Евклидовы пространства

Кроме длины вектора, в классической геометрии часто используется понятие угла между векторами. В нормированных пространствах определить угол между векторами, вообще говоря, нельзя. Для того чтобы это сделать нам придется еще сузить класс рассматриваемых пространств.

Определение 2.1.12. *Скалярным произведением* на линейном пространстве $\boldsymbol{L}$ над полем $\mathbb{R}$ называется действительнозначная функция $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ для всех $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{L}$;

2) $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ для всех $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{L}$;

3) $(\boldsymbol{\lambda x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ для всех $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{L}$ и всех $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$;

4) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geq \boldsymbol{0}$, причем $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ только при $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Линейное пространство $\boldsymbol{L}$ со скалярным произведением $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ называется евклидовым пространством.

Предложение 2.1.2. *Всякое евклидово пространство является нормированным с нормой* $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$.

Доказательство. Аксиомы 1) и 2) нормы немедленно вытекают из аксиом скалярного произведения. Для доказательства аксиомы 3) нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2.1.1. (Неравенство Коши-Буняковского.) *Для любых* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ *в евклидовом пространстве* $\boldsymbol{L}$ *мы имеем*

$$|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| \leq \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|. \tag{2.1.1}$$

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\boldsymbol{0} \leq (\boldsymbol{\lambda x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{\lambda x} + \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{\lambda}^2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) + 2\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) =$$

$$\|\boldsymbol{x}\|^2\boldsymbol{\lambda}^2 + 2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\boldsymbol{\lambda} + \|\boldsymbol{y}\|^2.$$

Таким образом, мы получили неотрицательный квадратный трехчлен относительно переменной $\boldsymbol{\lambda}$. Следовательно, дискриминант этого квадратного трехчлена не превосходит нуля, то есть $4(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^2 - 4\|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2 \leq \boldsymbol{0}$. □

Наконец, из неравенства Коши-Буняковского следует, что

$$\|x + y\| = \sqrt{(x + y, x + y)} = \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x, y)} \leq$$

$$\sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\|} \leq \sqrt{(\|x\| + \|y\|)^2} = \|x\| + \|y\|.$$

Предложение доказано. □

2.1.5 Пополнение евклидова пространства*

Следствие 2.1.2. *Каждое евклидово пространство L имеет пополнение, которое также является евклидовым пространством.*

Доказательство. Конструкция пополнения *метрического* пространства подробно рассмотрена нами на лекции 1.6. Нужно только заметить, что если L – евклидово пространство, то

1) пространство $\tilde{L}$ (состоящее из классов фундаментальных последовательностей метрического пространства $\mathbb{X} = (L, \rho_X(x, y) = \sqrt{(x - y, x - y)_L})$ и описанное в доказательстве теоремы 1.6.1) является линейным;

2) скалярное произведение на пространстве $\tilde{L}$ можно задать следующим образом:

$$(\tilde{x}, \tilde{y})_{\tilde{L}} = \lim_{\nu \to \infty} (x_\nu, y_\nu)_L,$$

где $\{x_\nu\}$, $\{y_\nu\}$ – какие-нибудь фундаментальные последовательности из классов $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{L}$ соответственно. □

2.2 Лекция 9

2.2.1 Ортогональные системы. Теорема об ортогонализации

Наличие скалярного произведения позволяет ввести в евклидовом пространстве L не только длину вектора (т.е. норму), но и угол между векторами.

Определение 2.2.1. Число $0 \le \phi \le \pi$,

$$\phi = \arccos \frac{(x, y)}{\|x\| \|y\|}, \quad 0 \le \phi \le \pi,$$

называется *углом* между векторами $x, y \in L$.

В частности, если $(x, y) = 0$, то $\phi = \pi/2$.

Определение 2.2.2. Вектора x и y называются *ортогональными,* если $(x, y) = 0$. Система ненулевых векторов $\{x_\beta\}$ из L называется ортогональной, если $(x_\beta, x_\gamma) = 0$ при $\beta \ne \gamma$. Ортогональная система называется ортонормированной, если $\|x_\beta\| = 1$.

Очевидно, если $\{x_\beta\}$ – ортогональная система векторов, то система $\{\frac{x_\beta}{\|x_\beta\|}\}$ – ортонормирована.

Предложение 2.2.1. *Если система векторов $\{x_\beta\}$ из L ортогональна, то она линейно независима.*

Доказательство. В самом деле, если $\sum_{j=1}^{n} c_{\beta_j} x_{\beta_j} = 0$, то в силу ортогональности системы мы имеем

$$\left(x_{\beta_k}, \sum_{j=1}^{n} c_{\beta_j} x_{\beta_j} \right) = c_{\beta_k} \|x_{\beta_k}\|^2 = 0.$$

Поскольку $\|x_{\beta_k}\| \ne 0$, то $c_{\beta_k} = 0$ для всех $1 \le k \le n$. $\square$

Определение 2.2.3. Система векторов $\{x_\beta\} \subset L$ называется *полной,* если $\overline{\mathcal{L}(\{x_\beta\})} = L$.

Определение 2.2.4. Система векторов $\{x_\beta\} \subset L$ называется *ортогональным базисом,* если она ортогональна и полна.

Пример 2.2.1. Пространство $\mathbb{R}^n_2$ со скалярным произведением

$$(x, y) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$$

является евклидовым. Один из ортонормированных базисов в нем образуют вектора e_j, $1 \leq j \leq n$ (см. пример 2.1.7).

Пример 2.2.2. Пространство l_2 со скалярным произведением

$$(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j$$

является евклидовым. Один из ортонормированных базисов в нем образуют вектора e_j, $j \in \mathbb{N}$ (см. пример 2.1.8). Ортонормированность этой системы очевидна. Вместе с тем она и полна: пусть $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots) \in l_2$ и $x^{(k)} = (x_1, \ldots, x_k, 0, 0 \ldots) \in l_2$. Тогда $x^{(k)}$ есть линейная комбинация векторов $e_1, \ldots, e_k$ и $\rho(x^{(k)}, x) = \|x^{(k)} - x\| \to 0$ при $k \to \infty$.

Пример 2.2.3. Пространство $C_2[a, b]$ со скалярным произведением

$$(x, y) = \int_a^b x(t) y(t)\, dt$$

является евклидовым. Как известно из курса математического анализа, один из ортонормированных базисов в нем образуют вектора

$$\frac{1}{2\pi}, \quad \frac{1}{2\pi}\cos\frac{2\pi nt}{b-a}, \quad \frac{1}{2\pi}\sin\frac{2\pi nt}{b-a}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Поскольку метод координат был очень плодотворен для изучения конечномерных пространств, важно ответить на вопрос о существовании ортогонального базиса в евклидовом пространстве. Мы ограничимся рассмотрением достаточно широкого класса сепарабельных евклидовых пространств.

Предложение 2.2.2. *Пусть L – сепарабельное евклидово пространство. Тогда всякая ортогональная система в нем не более чем счетна.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $\{x_\beta\}$ – ортонормированная система. Тогда $\|x_\beta - x_\gamma\| = \sqrt{2}$ при $\beta \neq \gamma$ и шары $B(x_\beta, 1/2)$ не пересекаются. Если счетное множество $\{y_\beta\}$ всюду плотно в L, то в каждом таком шаре есть по крайней мере один элемент из $\{y_\beta\}$. Следовательно, число таких шаров (а значит, и элементов x_β) не более чем счетно. □

Теорема 2.2.1. (Теорема об ортогонализации) *Пусть $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ – линейно независимая система элементов в сепарабельном евклидовом пространстве L. Тогда в L существует система элементов $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, удовлетворяющая следующим условиям:*

1) ортонормированность;

2) каждый элемент ϕ_n есть конечная линейная комбинация элементов $f_1, \dots, f_n$:

$$\phi_n = \sum_{j=1}^{n} a_{nj} f_j, \qquad (a_{nn} \neq 0);$$

3) каждый элемент f_n есть конечная линейная комбинация элементов $\phi_1, \ldots, \phi_n$:

$$f_n = \sum_{j=1}^{n} b_{nj}\phi_j, \qquad (b_{nn} \neq 0).$$

Каждый элемент системы $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ определяется условиями 1) – 3) однозначно с точностью до множителя ± 1.

Доказательство. Элемент ϕ_1 ищется в виде $\phi_1 = a_{11}f_1$; при этом a_{11} определяется из условия $(\phi_1, \phi_1) = a_{11}^2(f_1, f_1) = 1$, откуда $a_{11} = \frac{1}{b_{11}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{(f_1,f_1)}}$.

Ясно, что ϕ_1 определяется этим однозначно (с точностью до знака). Пусть элементы ϕ_k ($k < n$), удовлетворяющие условиям 1) – 3), уже построены. Тогда положим

$$h_n = f_n - \sum_{j=1}^{n-1} b_{nj}\phi_j,$$

где коэффициенты b_{nk} выбраны так, что $(h_n, \phi_k) = 0$ при $k < n$. Именно, в силу ортогональности системы $\{\phi_k\}_{k=1}^{n-1}$ мы получаем

$$0 = (h_n, \phi_k) = (f_n - \sum_{j=1}^{n-1} b_{nj}\phi_j, \phi_k) = (f_n, \phi_k) - b_{nk}(\phi_k, \phi_k),$$

т.е. $b_{nk} = \frac{(f_n,\phi_k)}{(\phi_k,\phi_k)}$.

Заметим, что $(h_n, h_n) > 0$. В самом деле, если $(h_n, h_n) = 0$, то $h_n = 0$, а значит, $f_n = \sum_{j=1}^{n-1} b_{nj}\phi_j = \sum_{j=1}^{n-1} c_{nj}f_j$ по условию 2), что противоречит линейной независимости системы $\{f_n\}$. Положим $\phi_n = \frac{h_n}{\sqrt{(h_n,h_n)}}$.

Из индуктивного построения ясно, что h_n, а значит, и ϕ_n, выражаются через $f_1, \ldots, f_n$, т.е. $\phi_n = \sum_{j=1}^{n} a_{nj}f_j$, где $a_{nn} = \frac{1}{\sqrt{(h_n,h_n)}} \neq 0$. Кроме того, система $\{\phi_n\}$ ортонормирована, и

$f_n = \sum_{j=1}^{n} b_{nj}\phi_j$, где $b_{nn} = \sqrt{(h_n, h_n)} \neq 0$, что и требовалось доказать. $\square$

Переход от системы $f_1, \ldots, f_n, \ldots$ к системе $\phi_1, \ldots, \phi_n, \ldots$ называется процессом ортогонализации Грама-Шмидта.

Следствие 2.2.1. *В любом сепарабельном евклидовом пространстве L существует ортонормированный базис.*

Доказательство. Пусть $\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_n, \ldots$ – счетное всюду плотное множество в L. Выберем из него счетную полную систему линейно независимых элементов $\{f_n\}$. Применив к полученной системе векторов процесс ортогонализации Грама-Шмидта, мы и построим ортонормированный базис $\{\phi_n\}$, поскольку полнота системы $\{\phi_n\}$ следует из полноты системы $\{f_n\}$ и теоремы 2.2.1. $\square$

2.2.2 Коэффициенты Фурье. Неравенство Бесселя

Как известно из курса линейной алгебры, зафиксировав в $\mathbb{R}^n$ ортонормированный базис $\{e_j\}_{j=1}^n$, можно любой вектор $x \in \mathbb{R}^n$ записать в виде

$$x = \sum_{j=1}^{n} c_j e_j,$$

где $c_j = (x, e_j)$.

Выясним, можно ли получить аналогичное разложение в бесконечномерном евклидовом пространстве.

Пусть $\phi_1, \ldots, \phi_n, \ldots$ – ортонормированная система в евклидовом пространстве L. Сопоставим элементу $x \in L$ последовательность чисел

$$c_k(x) = (x, \phi_k), \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{2.2.1}$$

и ряд (пока формальный)

$$\Phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(x)\,\phi_k. \tag{2.2.2}$$

Определение 2.2.5. Числа c_k будем называть координатами, или *коэффициентами Фурье* элемента x по системе $\{\phi_n\}$. Ряд $\Phi(x)$ назовем *рядом Фурье* элемента x по системе $\{\phi_n\}$.

Предложение 2.2.3. (Неравенство Бесселя) *Для всех* $x \in L$ *мы имеем:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k(x)|^2 \le \|x\|^2. \tag{2.2.3}$$

Доказательство. Пусть $S_n = \sum_{k=1}^{n} b_k\,\phi_k$, где b_k – какие-нибудь действительные числа. Подберем их таким образом, чтобы расстояние $\rho(x, S_n)$ было минимально. Так как система $\{\phi_n\}$ ортонормирована, то

$$\rho^2(x, S_n) = \|x - S_n\|^2 = \left(x - \sum_{k=1}^{n} b_k\,\phi_k, x - \sum_{j=1}^{n} b_j\,\phi_j\right) =$$

$$(x, x) - 2\left(x, \sum_{j=1}^{n} b_j\,\phi_j\right) + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k\,\phi_k, \sum_{j=1}^{n} b_j\,\phi_j\right) =$$

$$\|x\|^2 - 2\sum_{j=1}^{n} b_j\,c_j(x) + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 =$$

$$\|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2(x) + \sum_{k=1}^{n}(b_k - c_k(x))^2.$$

Ясно, что минимум этого выражения достигается при $b_k = c_k(x)$. В этом случае

$$\|x - S_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2(x) \geq 0. \tag{2.2.4}$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{n} c_k^2(x) \leq \|x\|^2.$$

В силу произвольности n мы и получаем неравенство Бесселя. □

Из неравенства Бесселя следует, что сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2(x)$, а значит, и ряд Фурье $\Phi(x)$ сходится в пространстве L, по крайней мере, если пространство является полным (см. доказательство теоремы Рисса-Фишера ниже). Естественно возникает вопрос: к какому элементу пространства L сходится этот ряд?

Определение 2.2.6. Система $\{\phi_n\}$ называется *замкнутой*, если для любого $x \in L$ выполнено равенство Парсеваля:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2(x) = \|x\|^2.$$

Предложение 2.2.4. *Система $\{\phi_n\}$ замкнута в том и только том случае, когда ряд Фурье $\Phi(x)$ сходится к x для всякого $x \in L$.*

Доказательство. Немедленно следует из формулы (2.2.4). □

Теорема 2.2.2. *В сепарабельном евклидовом пространстве ортогональная система является замкнутой в том и только том случае, когда она полна.*

Доказательство. Пусть $\{\phi_n\}$ – замкнутая система в евклидовом пространстве L. Тогда согласно предложению 2.2.4 для всякого элемента $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{L}$ последовательность частичных сумм его ряда Фурье сходится к $\boldsymbol{x}$. Это означает, что линейные комбинации элементов системы $\{\boldsymbol{\phi_n}\}$ плотны в $\boldsymbol{L}$, т.е. эта система полна.

Обратно, если система $\{\boldsymbol{\phi_n}\}$ полна в $\boldsymbol{L}$, то любой вектор $\boldsymbol{x}$ можно сколь угодно точно аппроксимировать линейными комбинациями вида $\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{b_k \phi_k}$. С другой стороны, при доказательстве неравенства Бесселя (см. предложение 2.2.3) мы видели, что частичные суммы ряда Фурье $\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{c_k(x)\phi_k}$ дают для $\boldsymbol{x}$ не менее точную аппроксимацию. Следовательно, ряд $\sum_{j=1}^{\infty} \boldsymbol{c_k(x)\phi_k}$ сходится к $\boldsymbol{x}$, и равенство Парсеваля имеет место. $\square$

Итак, мы построили разложение вектора по базису в виде сходящегося ряда, т.е. с привлечением анализа. Уместно отметить, что к данному вопросу можно также подойти алгебраически, т.е. искать такую систему векторов $\{\boldsymbol{b_\alpha}\}_{\alpha \in A}$ в $\boldsymbol{L}$, чтобы для каждого вектора $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{L}$ существовал номер $\boldsymbol{N = N(x)}$, набор элементов $\{\boldsymbol{b_{\alpha_j}}\}_{j=1}^{N}$ и констант $\{\boldsymbol{c_j}\}_{j=1}^{N}$, для которых выполнено соотношение

$$\boldsymbol{x = \sum_{j=1}^{N} c_j b_{\alpha_j}}.$$

Такие системы называются *базисами Гамеля.* Поскольку суммы в разложении конечны, то не нужно заботиться о сходимости, однако мощность индексного множества может быть слишком велика для конструктивной работы с такими базисами.

2.3 Лекция 10

2.3.1 Теорема Рисса-Фишера

Ответим теперь на вопрос: какие числа могут быть коэффициентами Фурье. Из неравенства Бесселя следует, что для этого необходима сходимость ряда $\sum_{j=1}^{\infty} c_j^2(x)$. Оказывается, что в полном пространстве это условие является и достаточным.

Теорема 2.3.1. (Теорема Рисса-Фишера) *Пусть* $\{\phi_n\}$ *– произвольная ортонормированная система в полном евклидовом пространстве* L, *и пусть числа* $c_1, \dots, c_n, \dots$ *таковы, что ряд* $\sum_{j=1}^{\infty} c_j^2$ *сходится. Тогда существует такой элемент* $x \in L$, *что* $c_k = c_k(x) = (x, \phi_k)$ *и* $\sum_{j=1}^{\infty} c_j^2 = (x, x) = \|x\|^2$.

Доказательство. Положим $x_n = \sum_{j=1}^{n} c_j \phi_j$. Тогда

$$\|x_{n+p} - x_n\|^2 = \|\sum_{j=n+1}^{n+p} c_j \phi_j\|^2 = \sum_{j=n+1}^{n+p} c_j^2.$$

Поскольку ряд $\sum_{j=1}^{\infty} c_j^2$ сходится, то последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна, а значит, в силу полноты пространства L существует предел $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in L$.

Далее,

$$(x, \phi_k) = (x_n, \phi_k) + (x - x_n, \phi_k), \tag{2.3.1}$$

причем справа первое слагаемое при $n \geq k$ равно c_k, а второе стремится к нулю при $n \to \infty$, так как

$$(x - x_n, \phi_k) \leq \|x - x_n\| \|\phi_k\| = \|x - x_n\|.$$

Левая часть равенства (2.3.1) от n не зависит; поэтому, переходя в нем к пределу при $n \to \infty$, получаем, что $c_k(x) = c_k$.

Поскольку $\|x - x_n\|^2 \to \infty$ при $n \to \infty$, то

$$\|x\|^2 - \sum_{j=1}^{\infty} c_j^2 = \lim_{n\to\infty}\left(x - \sum_{j=1}^{n} c_j\phi_j, x - \sum_{k=1}^{n} c_k\phi_k\right) = 0.$$

Теорема доказана. □

Теорема 2.3.2. *Для того чтобы ортонормированная система векторов $\{\phi_n\}$ в полном сепарабельном евклидовом пространстве L была полна, необходимо и достаточно, чтобы в L не существовало ненулевого элемента, ортогонального всем элементам системы $\{\phi_n\}$.*

Доказательство. Пусть система $\{\phi_n\}$ полна и, следовательно, замкнута. Если x ортогонален всем элементам системы $\{\phi_n\}$, то все его коэффициенты Фурье равны нулю. Тогда из равенства Парсеваля следует, что $\|x\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} c_j^2(x) = 0$, т.е. $x = 0$.

Обратно, пусть система $\{\phi_n\}$ не полна. Тогда в L существует такой элемент $y \neq 0$, что $\|y\|^2 > \sum_{j=1}^{\infty} c_j^2(y)$. По теореме Рисса-Фишера существует такой элемент $x \in L$, что $\|x\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} c_j^2(y) < \|y\|^2$ и $c_j(x) = c_j(y)$, откуда следует, что $x - y \neq 0$. Наконец, легко видеть, что

$$(x - y, \phi_k) = \left(\sum_{j=1}^{\infty}(x, \phi_j)\phi_j - y, \phi_k\right) = (y, \phi_k) - (y, \phi_k) = 0,$$

для всех $k \in \mathbb{N}$. □

2.3.2 Теорема об изоморфизме

Мы уже знаем характеристические свойства полных метрических пространств. В данном разделе мы опишем все сепарабельные полные евклидовы пространства.

Определение 2.3.1. Полное евклидово пространство бесконечного числа измерений называется *гильбертовым.*

Определение 2.3.2. Два евклидовых пространства L_1 и L_2 над полем $\mathbb{R}$ называются *изоморфными* ($L_1 \cong L_2$), если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие $\phi : L_1 \to L_2$ согласованное со скалярным произведением и операциями сложения векторов и умножения на скаляр в этих пространствах. Это означает, что $(x, y)_{L_1} = (\phi(x), \phi(y))_{L_2}$, $\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y)$, $\phi(\alpha x) = \alpha\phi(x)$ для всех $x, y \in L_1$ и всех $\alpha \in R$.

Как известно из курса линейной алгебры, любые два n-мерных евклидовых пространства изоморфны между собой и, следовательно, каждое такое пространство изоморфно пространству $\mathbb{R}_2^n$. Евклидовы пространства бесконечного числа измерений не обязательно изоморфны между собой. Например, l_2 не изоморфно пространству $C_2[a, b]$, поскольку первое из них полно, а второе – нет.

Теорема 2.3.3. *Любые два бесконечномерных сепарабельных гильбертовых пространства изоморфны между собой.*

Доказательство. Покажем, что любое сепарабельное гильбертово пространство изоморфно l_2. Тем самым будет доказано утверждение теоремы. Выберем в сепарабельном гильбертовом пространстве L какую-нибудь полную ортонормированную систему (ортонормированный базис) $\{\phi_n\}$ и поставим в соответствие элементу $x \in L$ совокупность его коэффициентов Фурье относительно этой системы. Так как $\sum_{j=1}^{\infty} c_j^2(x) < \infty$, то последовательность $c_1(x), \dots, c_n(x), \dots$ принадлежит l_2. Обратно, в силу теоремы

Рисса-Фишера всякому элементу $(c_1, \ldots, c_n, \ldots)$ из l_2 отвечает некоторый элемент, имеющий числа c_j своими коэффициентами Фурье. Установленное соответствие ϕ между L и l_2, очевидно, взаимно однозначно. Далее, если

$$(c_1, \ldots, c_n, \ldots) = \phi(x), \qquad (d_1, \ldots, d_n, \ldots) = \phi(y),$$

то

$$(c_1 + d_1, \ldots, c_n + d_n, \ldots) = \phi(y + x), \quad (\beta c_1, \ldots, \beta c_n, \ldots) = \phi(\beta x).$$

Таким образом, отображение ϕ согласовано с операциями сложения и умножения на скаляр.

Наконец, из равенства Парсеваля следует, что

$$(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j d_j.$$

Действительно, так как $\|x\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} c_j^2$, $\|y\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} d_j^2$, то

$$(x + y, x + y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y) = \sum_{j=1}^{\infty} (c_j + d_j)^2 =$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j^2 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} c_j d_j + \sum_{j=1}^{\infty} d_j^2.$$

Следовательно, отображение ϕ является изоморфизмом. □

2.3.3 Подпространства, ортогональные дополнения

В этом параграфе мы изучим некоторые свойства подпространств евклидовых пространств.

Предложение 2.3.1. *Подпространство сепарабельного гильбертова пространства есть либо конечномерное евклидово пространство, либо само является сепарабельным гильбертовым пространством.*

Доказательство. Действительно, если подпространство сепарабельного гильбертова пространства L не является конечномерным, то оно полно (см. следствие 1.5.2), евклидово (с тем же самым произведением, что и в L), а его сепарабельность следует из следующей леммы.

Лемма 2.3.1. *Любое подмножество M сепарабельного метрического пространства $\mathbb{X}$ само сепарабельно.*

Доказательство. Пусть $\{\zeta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ – счетное всюду плотное множество в $\mathbb{X}$ и $a_n = \inf_{x\in M} \rho(x, \zeta_n)$. Тогда для любых $m, n \in \mathbb{N}$ найдется такая точка $x_{nm} \in M$, что $\rho(\zeta_n, x_{nm}) < a_n + 1/m$.

Пусть $\varepsilon > 0$ и $1/m < \varepsilon/3$. Поэтому для всякого $x \in M$ найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что $\rho(\zeta_n, x) < \varepsilon/3$. В частности, $a_n \leq \varepsilon/3$, а следовательно,

$$\rho(x, x_{nm}) \leq \rho(\zeta_n, x_{nm}) + \rho(\zeta_n, x) <$$

$$\varepsilon/3 + a_n + 1/m < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.$$

Значит, не более чем счетное множество $\{x_{nm}\}_{n,m\in\mathbb{N}}$ плотно в M. □

Предложение доказано. □

Теорема 2.3.4. *В каждом подпространстве M сепарабельного гильбертова пространства L содержится ортонормированная система, замыкание линейной оболочки которой совпадает с M.*

Доказательство. Достаточно применить процесс ортогонализации к какой-нибудь счетной всюду плотной системе векторов подпространства M. □

Определение 2.3.3. Пусть M – подпространство полного евклидова пространства L. Тогда множество элементов из L, ортогональных ко всем элементам из M, называется *ортогональным дополнением* подпространства M и обозначается $M^{\perp}$.

Предложение 2.3.2. *Ортогональное дополнение $M^{\perp}$ есть подпространство пространства L.*

Доказательство. Так как из $(y_1, x) = (y_2, x) = 0$ вытекает $(a_1 y_1 + a_2 y_2, x) = 0$, то $M^{\perp}$ – линейное многообразие в L. Докажем, что $M^{\perp}$ замкнуто. Если $y = \lim_{n\to\infty}$, где $y_n \in M^{\perp}$, то

$$(x, y) = \lim_{n\to\infty}(x, y_n) = 0$$

для всех $x \in M$, что и требовалось. □

Теорема 2.3.5. *Если M – (замкнутое!) линейное подпространство сепарабельного гильбертова пространства L, то любой элемент $x \in L$ единственным образом представим в виде $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in M$, а $x_2 \in M^{\perp}$.*

Доказательство. Докажем сначала существование разложения. По теореме 2.3.4 в M можно указать полную ортонормированную систему, скажем, $\{\phi_n\}$. Положим $x_1 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x)\phi_n$. Из неравенства Бесселя следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2(x)$ сходится, и, следовательно, элемент x_1 существует и принадлежит M. Тогда $x_2 = x - x_1$. В самом деле, очевидно, что $x_1 + x_2 = x$. Более того, для любого $k \in \mathbb{N}$

$$(x_2, \phi_k) = \left(x - \sum_{n=1}^{\infty}(x, \phi_n)\phi_k\right) = (x, \phi_k) - (x, \phi_k) = 0.$$

Поскольку всякий элемент $y \in M$ представим в виде $y = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(y)\phi_n$, то

$$(x_2, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(y)(x, \phi_n) = 0,$$

т.е. $x_2 \in M^{\perp}$.

Допустим, что существует другое разложение $x = y_1 + y_2$, где $y_1 \in M$, а $y_2 \in M^{\perp}$. Тогда $(y_1, \phi_n) = (x, \phi_n) = c_n(x) = c_n(x_1)$. Следовательно, $x_1 = y_1$, а значит, $x_2 = y_2$. □

Следствие 2.3.1. $(M^{\perp})^{\perp} = M$.

Доказательство. Немедленно вытекает из теоремы 2.3.5 в силу симметрии между M и $M^{\perp}$. □

Следствие 2.3.2. *Каждая ортонормированная система может быть расширена до системы, полной в* L.

Доказательство. Достаточно построить ортонормированные системы $\{\phi_n\} \subset M$ и $\{\psi_n\} \subset M^{\perp}$ полные в M и $M^{\perp}$ соответственно и объединить их в одну. Полученная после объединения система будет ортогональна в силу ортогональности подпространств M и $M^{\perp}$ и полна в силу разложения, полученного в теореме 2.3.5. □

Определение 2.3.4. Если каждый вектор $x \in L$ представим в виде $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in M$, а $x_2 \in M^{\perp}$, то говорят, что L есть *прямая сумма* взаимно ортогональных подпространств M и $M^{\perp}$ и пишут $L = M \oplus M^{\perp}$.

Ясно, что понятие прямой суммы может быть обобщено на любое конечное, или даже счетное число подпространств.

2.3.4 Свойство параллелограмма*

Мы выяснили, что всякое евклидово пространство является нормированным, а по многим свойствам евклидовы пространства гораздо удобнее, чем произвольные нормированные. Изучим теперь вопрос о том, каким дополнительным условиям должна удовлетворять норма в пространстве $\boldsymbol{L}$, чтобы пространство $\boldsymbol{L}$ было евклидовым, т.е. чтобы эта норма определялась некоторым скалярным произведением.

Теорема 2.3.6. *Для того чтобы нормированное пространство было евклидовым, необходимо и достаточно, чтобы для любых элементов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{L}$ выполнялось равенство параллелограмма:*

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 + \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2 = 2(\|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2). \tag{2.3.2}$$

Доказательство. Необходимость. Если $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}$, то

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 + \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2 = (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) =$$

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) + 2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) - 2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}) = 2(\|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2).$$

Достаточность. Положим

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{1}{4}(\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 - \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2) \tag{2.3.3}$$

и покажем, что эта функция удовлетворяет всем аксиомам скалярного произведения, если выполнено равенство параллелограмма.

Прежде всего, $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|^2 \geq 0$, т.е. это скалярное произведение согласовано с нормой, и $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = 0$ только при $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Очевидно также, что $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$.

Для установления аксиомы 2) рассмотрим функцию

$$\phi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = 4[(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) - (\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) - (\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})] = \tag{2.3.4}$$

$$\|x+y+z\|^2-\|x+y-z\|^2-\|x+z\|^2+|x-z\|^2-\|y+z\|^2+\|y-z\|$$

Покажем, что она тождественно равна нулю. В силу равенства параллелограмма 2.3.2 имеем

$$\|x+y\pm z\|^2=2\|x\pm z\|^2+2\|y\|^2+|x\pm z-y\|^2.$$

Подставив соответствующие выражения в (2.3.4), получим

$$\phi(x,y,z)=-\|x+z-y\|^2+\|x-z-y\|^2+ \tag{2.3.5}$$

$$\|x+z\|^2-|x-z\|^2-\|y+z\|^2+\|y-z\|^2.$$

Взяв полусумму (2.3.4) и (2.3.5), имеем

$$\phi(x,y,z)=\frac{1}{2}(\|x+z+y\|^2+\|y+z-x\|^2)-\frac{1}{2}(\|y-z+x\|^2+|y-z$$

$$\|y+z\|^2+\|y-z\|^2.$$

В силу (2.3.2) первое слагаемое равно $\|x\|^2+\|y+z\|^2$, а второе – равно $(-\|x\|^2-\|y-z\|^2)$. Таким, образом $\phi(x,y,z)\equiv 0$.

Установим, наконец, свойство 3) скалярного произведения. Для этого рассмотрим функцию $\psi(t)=(tx,y)-t(x,y)$. Из (2.3.3) сразу следует, что $\psi(0)=\frac{1}{4}(\|y|^2-\|y\|^2)=0$. Далее, $\psi(1)=0$, а поскольку $(-x,y)=-(x,y)$, то $\psi(-1)=0$. Поэтому для любого $n\in\mathbb{Z}$

$$(nx,y)=(\operatorname{sign} n(x+\cdots+x),y)=\operatorname{sign} n\,[(x,y)+\cdots+(x,y)]=$$

$$|n|\operatorname{sign} n\,(x,y)=n(x,y),$$

т.е. $\psi(n)=0$.

При целых n,m $(m\neq 0)$

$$\left(\frac{n}{m}x,y\right)=n\left(\frac{1}{m}x,y\right)=\frac{n}{m}m\left(\frac{1}{m}x,y\right)=\frac{n}{m}(x,y),$$

т.е. $\psi(t) = 0$ для всех $t \in \mathbb{Q}$. Наконец, заметим, что функция ψ непрерывна, а значит, $\psi \equiv 0$. В самом деле,

$$\psi(t) = \|tx + y\|^2 - \|tx - y\|^2 - t(x, y).$$

Последнее слагаемое в этом равенстве есть функция линейная, а значит, и непрерывная. Что же касается первых двух слагаемых, то их непрерывность вытекает из непрерывности функции $\|tx \pm y\|$, которая, в свою очередь, следует из неравенства

$$|\|tx \pm y\| - \|t_0x \pm y\|| \leq |t - t_0|\|x\|.$$

Итак, мы показали, что функция (x, y) обладает всеми свойствами скалярного произведения. $\square$

Пример 2.3.1. В пространстве $\mathbb{R}^n_p$ ($p \neq 2$) нельзя ввести скалярное произведение, согласованное с нормой, поскольку не выполнено равенство параллелограмма. В самом деле, для $x = (1, 1, 0, \ldots, 0)$ и $y = (1, -1, 0, \ldots, 0)$ мы имеем $x + y = (2, 0, 0, \ldots, 0)$, $x - y = (0, 2, 0, \ldots, 0)$. Следовательно,

$$\|x + y\|_p^2 + \|x - y\|_p^2 = 2^2 + 2^2 = 8 \neq$$

$$2(\|x\|_p^2 + \|y\|_p^2) = 2(2^{2/p} + 2^{2/p}) = 4 \cdot 2^{2/p},$$

если $p \neq 2$.

Пример 2.3.2. В пространстве $C[a, b]$ нельзя ввести скалярное произведение, согласованное с нормой, поскольку не выполнено равенство параллелограмма. В самом деле, для $a = 0$, $b = \pi/2$ и $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$ мы имеем $\|x\|^2 = \|y\|^2 = 1$,

$$\|x + y\| = \max_{t \in [a,b]} |\cos t + \sin t| = \sqrt{2},$$

$$\|x-y\| = \max_{t\in[a,b]} |\cos t - \sin t| = 1.$$

Следовательно,

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 3 \neq 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = 4.$$

Для произвольных a, b можно рассмотреть функции

$$x(t) = \cos\frac{\pi t}{2(b-a)}, \qquad y(t) = \sin\frac{\pi t}{2(b-a)}.$$

2.3.5 Комплексные евклидовы пространства*

Наряду с действительным евклидовым пространством может быть введено и комплексное евклидово пространство (т.е. над полем $\mathbb{C}$). Однако аксиомы 1) – 4), сформулированные в определении 2.1.12 не могут быть в комплексном пространстве выполнены одновременно. В самом деле, из 1) и 3) следует, что $0 \le (ax, ax) = a^2(x, x)$, откуда при $a = \sqrt{-1}$ имеем $(\sqrt{-1}x, \sqrt{-1})x) = -(x, x) \le 0$. Таким образом, скалярные квадраты векторов x и $\sqrt{-1}x$ не могут быть одновременно положительны. Иными словами, аксиомы 1) и 3) несовместимы с аксиомой 4).

Определение 2.3.5. *Скалярным произведением* на линейном пространстве L над полем $\mathbb{C}$ называется комплекснозначная функция (x, y), удовлетворяющая следующим условиям:

1) $(x, y) = \overline{(y, x)}$ для всех $x, y \in L$;

2) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$ для всех $x, y, z \in L$;

3) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ для всех $x, y \in L$ и всех $\lambda \in \mathbb{R}$;

4) $(x, x) \ge 0$, причем $(x, x) = 0$ только при $x = 0$.

Линейное пространство L над полем $\mathbb{C}$ со скалярным произведением (x, y) называется комплексным евклидовым пространством.

Легко проверить, что все теоремы, доказанные выше для действительных евклидовых пространств справедливы (с незначительными изменениями, учитывающими комплексность скалярного произведения) и для комплексных пространств. Отметим лишь некоторые из них.

Предложение 2.3.3. *Всякое комплексное евклидово пространство является нормированным с нормой* $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$.

Понятие угла между векторами в комплексном пространстве, как правило, не вводят, поскольку величина $\frac{(x,y)}{\|x\|\|y\|}$, вообще говоря, комплексна; однако понятие ортогональности сохраняется.

Пример 2.3.3. Пространство $\mathbb{C}_2^n$ со скалярным произведением

$$(x, y) = \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y}_j$$

является евклидовым комплексным. Один из ортонормированных базисов в нем образуют вектора e_j $(1 \leq j \leq n)$. Все n-мерные комплексные евклидовы пространства изоморфны $\mathbb{C}_2^n$, и, следовательно, изоморфны между собой.

Пример 2.3.4. Комплексное пространство l_2, состоящее из последовательностей комплексных чисел $(x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ таких, что $\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2$, со скалярным произведением

$$(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \overline{y}_j$$

является комплексным евклидовым. Один из ортонормированных базисов в нем образуют вектора e_j $(j \in \mathbb{N})$. Все сепарабельные комплексные евклидовы пространства изоморфны комплексному пространству l_2, и, следовательно, изоморфны между собой.

Пример 2.3.5. Пространство $C_2[a, b]$ комплекснозначных непрерывных функций на отрезке $[a, b]$ со скалярным произведением

$$(x, y) = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}\,dt$$

является комплексным евклидовым. Как известно из курса математического анализа, один из ортонормированных базисов в нем образуют вектора

$$\frac{1}{2\pi}, \quad \frac{1}{2\pi}\cos\frac{2\pi n t}{b-a}, \quad \frac{1}{2\pi}\sin\frac{2\pi n t}{b-a} \quad n \in \mathbb{N}.$$

2.4 Лекция 11

2.4.1 Функционалы: основные определения и примеры

Определение 2.4.1. Числовая функция $f : L \longrightarrow \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$ на некотором линейном пространстве L называется *функционалом.* Функционал называется *аддитивным,* если $f(x+y) = f(x) + f(y)$ для всех $x, y \in L$; функционал называется *однородным,* если $f(x) = af(x)$ для всех $x \in L$, $\in \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$. Аддитивный однородный функционал называется *линейным.* Функционал $g : L \longrightarrow \mathbb{R}$ называется *положительно-однородным,* если $g(ax) = ag(x)$ для всех $x \in L$ и $a > 0$.

Мы будем изучать, в основном, свойства линейных функционалов.

Пример 2.4.1. Пусть x и a – два вектора из $\mathbb{R}^n$. Функция

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j$$

является линейным функционалом на $\mathbb{R}^n$.

Пример 2.4.2. Пусть x – вектор из l_2. Функция $f_j(x) = x_j$ является линейным функционалом на l_2.

Пример 2.4.3. Пусть $x(t)$ и $a(t)$ – две функции из $C[a, b]$. Функционал

$$f(x) = \int_a^b x(t)a(t)\,dt$$

является линейным на $C[a, b]$.

Выясним геометрический смысл линейного функционала в конечномерных пространствах.

Определение 2.4.2. *Ядром* функционала $f : L \to \mathbb{R}$ называется подмножество $\ker f$ элементов x пространства L таких, что $f(x) = 0$.

Предложение 2.4.1. *Пусть f – линейный функционал. Тогда множество $\ker f$ является подпространством пространства L и, более того, если $\dim L = n < \infty$ и $f \not\equiv 0$, то $\dim \ker f = n-1$.*

Доказательство. В силу линейности функционала,

$$f(ax + by) = af(x) + bf(y) = 0 + 0 = 0$$

для всех $x, y \in L$. Поэтому $\ker f$ – подпространство пространства L.

Далее, поскольку $f \not\equiv 0$, то найдется такая точка $x_0 \in L$, что $f(x_0) \neq 0$. Тогда для $y_0 = \frac{x_0}{f(x_0)}$ мы имеем $f(y_0) = 1$.

Пусть x – произвольный элемент L. Поставим ему в соответствие элемент $y = x - f(x)y_0$. Тогда $f(y) = f(x) + f(x)f(y_0) = 0$, т.е. $y \in \ker f$. Итак, мы представили элемент x в виде $x = y + ay_0$ ($a = f(x)$). Покажем, что другой выбор элемента $y \in \ker f$ и скаляра невозможен. В самом деле, если $x = y' + by_0$, ($y' \in \ker f$), то $f(x) = bf(y_0) = b$ и $y' = x - by_0 = y$.

Поскольку $\dim L = n < \infty$, то $\dim \ker f = m \leq n < \infty$. Зафиксируем какой-нибудь базис $\{y_j\}_{j=1}^m$ в $\ker f$. Тогда элемент x представим единственным образом в виде $x = ay_0 + \sum_{j=1}^m a_j y_j$. Осталось заметить, что вектора $y_0, y_1, \ldots, y_m$ линейно независимы. Действительно, если $0 = ay_0 + \sum_{j=1}^m a_j y_j$, то $a = f(ay_0) = -f(\sum_{j=1}^m a_j y_j) = 0$, а в силу линейной независимости системы

$\{y_j\}_{j=1}^m$ мы имеем $a_j = 0$ для всех $1 \leq j \leq m$. Итак, мы доказали, что система $y_0, y_1, \ldots, y_m$ является базисом в L, а значит, $m + 1 = n$. □

Таким образом, всякий ненулевой линейный функционал определяет гиперплоскость $\ker f$ в конечномерном пространстве. Ядро ненулевого линейного функционала на бесконечномерном пространстве также можно трактовать как гиперплоскость (см. [1], с. 147–148).

В основном, мы изучим некоторые свойства непрерывных функционалов на метрических пространствах. Мы уже давали определение непрерывного отображения метрических пространств (см. определение 1.2.1). Переформулируем это определение для функционалов.

Определение 2.4.3. Функционал $f : L \to \mathbb{R}$ называется *непрерывным в точке* $x_0 \in L$, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $x \in L$, удовлетворяющих $\rho(x, x_0) < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Функционал f назовем *непрерывным на* L, если он непрерывен в каждой точке пространства L.

2.4.2 Компактные множества в метрическом пространстве. Непрерывные функционалы на компактах

Зададимся вопросом, на каких подмножествах непрерывный функционал на метрическом (нормированном, евклидовом и т.д.) пространстве достигает своего максимума или минимума. В этой связи мы приходим к такому важному понятию, как *компактность*.

Определение 2.4.4. Множество M в метрическом пространстве

$\mathbb{X}$ называется *предкомпактным,* если из всякой последовательности $\{x_n\}_{n=1\infty} \subset M$ можно извлечь фундаментальную подпоследовательность. Множество M *компактно,* если из всякой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$ можно извлечь сходящуюся в M подпоследовательность.

Предложение 2.4.2. *В метрическом пространстве всякое компактное множество является замкнутым.*

Доказательство. Пусть x_0 – предельная точка множества M. Тогда существует последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$, сходящаяся к x_0. Так как всякая ее подпоследовательность также сходится к x_0, то в силу компактности $x_0 \in M$. Следовательно, M замкнуто. □

Предложение 2.4.3. *В полном метрическом пространстве всякое предкомпактное множество является ограниченным.*

Доказательство. Пусть M неограничено. Зафиксируем какую-нибудь точку $x_0 \in M$. Тогда существует такая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$, что $\rho(x_n, x_0) > n$. В силу предкомпактности M, последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ содержит фундаментальную подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Теперь полнота пространства гарантирует, что подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ сходится к некоторому элементу $x_1 \in X$.

Значит, найдется такая постоянная $C > 0$, что

$$\rho(x_{n_k}, x_0) \leq \rho(x_{n_k}, x_1) + \rho(x_0, x_1) \leq C$$

для всех n_k. Но это невозможно, т.к. $\rho(x_{n_k}, x_0) > n_k$. Полученное противоречие и доказывает лемму. □

Напомним, что в пространстве $\mathbb{R}_2^n$ множество компактно в том и только том случае, когда оно замкнуто и ограничено. В общем случае это, вообще говоря, неверно.

Пример 2.4.4. Последовательность $\{\sin nt\}_{n=1}^{\infty}$ является ограниченной в пространстве $C^2[-\pi, \pi]$, так как $\|\sin nt\| = \sqrt{\pi}$. Легко вычислить, что $\rho(\sin kt, \sin nt) = \|\sin kt - \sin nt)\| = \sqrt{2}$, поэтому это множество не имеет предельных точек, а значит, замкнуто. Однако по этой же причине $\{\sin nt\}_{n=1}^{\infty}$ не может содержать ни одной фундаментальной подпоследовательности, т.е. это множество не является даже предкомпактным.

Теорема 2.4.1. *Пусть M – компактное множество в метрическом пространстве $\mathbb{X}$. Тогда всякий непрерывный функционал на M ограничен.*

Доказательство. Покажем, что f ограничен сверху, т.е. найдется такая постоянная $C > 0$, что $f(x) \leq C$ для всех $x \in M$. Допустим противное. Тогда существует такая последовательность $\{x_n\} \subset M$, что $f(x_n) > n$. Так как M компактно, то существует сходящаяся в M подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}$. Пусть $\lim_{n\to\infty} x_{n_k} = x_0 \in M$. Тогда по непрерывности функционала мы имеем: $\lim_{n\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$. Значит, $\{f(x_{n_k})\}$ ограничена. С другой стороны, $f(x_{n_k}) > n_k$, т.е. $\{f(x_{n_k})\}$ неограничена сверху. Таким образом, мы получили противоречие.

Аналогично доказывается ограниченность снизу. □

Теорема 2.4.2. *Пусть M – компактное множество в метрическом пространстве $\mathbb{X}$. Тогда всякий непрерывный функционал на M достигает на нем своего наибольшего и наименьшего значений.*

Доказательство. Обозначим через $m_1 = \inf_{x\in M} f(x)$, $m_2 =$

$\sup_{x\in M} f(x)$. Нам нужно доказать, что найдутся такие точки x_1 и x_2 из M, что $m_1 = f(x_1)$, $m_2 = f(x_2)$.

Из определения точной верхней грани следует, что существует такая последовательность $\{x_n\} \subset M$, что $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = m_2$. Так как M компактно, то существует сходящаяся в M подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}$. Пусть $\lim_{n\to\infty} x_{n_k} = x_0 \in M$. Тогда по непрерывности функционала мы имеем: $\lim_{n\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$. Из единственности предела мы заключаем, что $f(x_0) = m_2$.

Таким образом, мы доказали, что непрерывный функционал f достигает на M своего наибольшего значения. Аналогично доказывается, что непрерывный функционал f достигает на M своего наименьшего значения. □

2.4.3 Компактность и полная ограниченность

Напомним, что в курсе математического анализа ключевую роль при описании компактов играла лемма Гейне-Бореля. Похожая ситуация имеет место и в произвольном метрическом пространстве.

Определение 2.4.5. В метрическом пространстве $\mathbb{X}$ множество M_ε называется *ε-сетью* для множества M в $\mathbb{X}$, если для всякого $x \in M$ существует $y \in M_\varepsilon$, такая, что $\rho(x, y) < \varepsilon$ (иначе говоря, $M \subset \bigcup\limits_{y\in M_\varepsilon} B(y, \varepsilon)$).

Определение 2.4.6. В метрическом пространстве $\mathbb{X}$ множество M называется *вполне ограниченным,* если при любом $\varepsilon > 0$ для него существует конечная ε-сеть M_ε в $\mathbb{X}$.

Теорема 2.4.3. *В метрическом пространстве множество* *является предкомпактным тогда и только тогда, когда оно вполне ограничено.*

Доказательство. Пусть M – предкомпактно. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и докажем существование конечной ε-сети M_ε.

Пусть $x_1 \in M$. Если $\rho(x, x_1) < \varepsilon$ для всех $x \in M$, то $M_\varepsilon = \{x_1\}$. В противном случае существует такой элемент $x_2 \in M$, что $\rho(x_1, x_2) \geq M_\varepsilon$. Если окажется, что $\rho(x, x_1) < \varepsilon$ или $\rho(x, x_2) < \varepsilon$ для всех $x \in M$, то $M_\varepsilon = \{x_1, x_2\}$. Продолжая это построение, мы либо остановимся на некотором шаге (а значит, построим конечную ε-сеть), либо процесс будет продолжаться бесконечно. В последнем случае мы получим такую последовательность $\{x_n\} \subset M$, что $\rho(x_n, x_m) \geq \varepsilon$ для любых $m \neq n$. Такая последовательность не может содержать ни одной фундаментальной подпоследовательности, что противоречит предкомпактности множества M. Следовательно, описанный выше процесс не может быть бесконечным.

Обратно, пусть для каждого $\varepsilon > 0$ существует конечная ε-сеть M_ε для M. Пусть $\{\varepsilon_n\}$ – числовая последовательность, стремящаяся к нулю. Тогда для каждого $\varepsilon_n > 0$ существует конечная ε_n-сеть

$$M_{\varepsilon_n} = \{y_1^{(n)}, \dots, y_{k(n)}^{(n)}\}.$$

Зафиксируем какую-нибудь последовательность $\{x_\nu\}_{\nu=1}^\infty \subset M$ и докажем, что она содержит фундаментальную подпоследовательность. Ясно, что $M \subset \bigcup\limits_{j=1}^{k(1)} B(y_j^{(1)}, \varepsilon_1)$. Следовательно, существует номер $1 \leq j \leq k(1)$ такой, что шар $B(y_j^{(1)}, \varepsilon_1)$ содержит бесконечное число элементов последовательности $\{x_\nu\}$. Обозначим через B_1 этот шар $B(y_j^{(1)}, \varepsilon_1)$, а через X_1 – содержащуюся в B_1 часть последовательности $\{x_\nu\}_{\nu=1}^\infty$.

Выберем $x_{\nu(1)} \in X_1$. Ясно, что $X_1 \subset M \subset \bigcup\limits_{j=1}^{k(2)} B(y_j^{(2)}, \varepsilon_2)$.

Следовательно, среди шаров $\{B(y_j^{(2)},\varepsilon_2)\}_{j=1}^{k(2)}$ существует такой шар B_2, который содержит бесконечное множество X_2 элементов последовательности X_1. Выберем $x_{\nu(2)} \in X_2$, $(n_2 > n_1)$. Продолжая это построение, мы получим последовательность шаров $\{B_k\}$ радиусов $\{\varepsilon_k\}$ и подпоследовательность $\{x_{\nu(k)}\}$ последовательности $\{x_\nu\}$. При этом, по построению, $x_{\nu(k)} \subset B_k$ и даже $x_{\nu(m)} \subset B_k$ при $m \geq k$.

Покажем, что $\{x_{\nu(k)}\}$ фундаментальна. В самом деле, если y_k – центр шара B_k, то

$$\rho(x_{n(k)}, x_{n(k+p)}) \leq \rho(y_k, x_{n(k+p)}) + \rho(x_{n(k)}, y_k) \leq 2\varepsilon_k,$$

что и требовалось. □

Следствие 2.4.1. *В полном метрическом пространстве множество является компактным тогда и только тогда, когда оно замкнуто и вполне ограничено.*

Доказательство. Немедленно следует из доказательства теоремы 2.4.3, и предложения 2.4.2. □

Любой шар в пространстве $\mathbb{R}_2^n$ является предкомпактным. В бесконечномерном пространстве это не так.

Предложение 2.4.4. *В бесконечномерном нормированном пространстве всякий шар не является предкомпактным.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ – линейно независимые векторы в нормированном пространстве L. Тогда $x_n \notin X_{n-1} = \mathcal{L}(\{x_k\}_{k=1}^{n-1})$, а значит, существует такая постоянная $a_n > 0$, что

$$\rho(x_n, X_{n-1}) = \inf_{x \in X_{n-1}} \|x_n - x\| > a_n > 0.$$

Из определения точной нижней грани следует, что существует вектор $x^* \in X_{n-1}$, что $0 \neq \|x_n - x^*\| < 2a_n$. Положим $y_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$, $y_n = \frac{x_n - x^*}{\|x_n - x^*\|}$ $(n > 1)$. Тогда $y_k \in X_k$, $\|y_k\| = 1$ и

$$\rho(y_k, X_{k-1}) = \inf_{x \in X_{k-1}} \|y_k - x\| =$$

$$\frac{1}{\|x_n - x^*\|} \inf_{x \in X_{k-1}} \|x_n - x^* - \|x_n - x^*\| x\| = \frac{1}{\|x_n - x^*\|} \inf_{x \in X_{k-1}} \|x_n - x\| \geq$$

$$\frac{a_n}{2a_n} = \frac{1}{2}.$$

Так как $x_m \in X_k$ при $m \leq k$, то $\|y_k - y_m\| \geq 1/2$ при $k \neq m$. Поэтому последовательность $\{R\,y_k - a\} \subset B(a, R)$ не содержит ни одной фундаментальной подпоследовательности, т.е. шары $B(a, R)$ и $\overline{B}(a, R)$ $(0 < R < \infty$, $a \in L)$ не являются предкомпактными. □

2.4.4 Компактные множества в $C[a, b]$. Теорема Арцела*

Дадим характеризацию компактных множеств в пространствах непрерывных функций.

Определение 2.4.7. Множество Φ функций, определенных на отрезке $[a, b]$ называется *равномерно ограниченным,* если существует такая постоянная $C > 0$, что

$$|\phi(t)| \leq C \text{ для всех } t \in [a, b] \text{ и всех } \phi \in \Phi.$$

Определение 2.4.8. Множество Φ функций, определенных на отрезке $[a, b]$ называется *равностепенно непрерывным,* если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $t_1, t_2 \in [a, b]$, удовлетворяющих $|t_1 - t_2| < \delta$, мы имеем

$$|\phi(t_1) - \phi(t_2)| \le \varepsilon \text{ для всех } \phi \in \Phi.$$

Теорема 2.4.4. *Для того чтобы множество Φ функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$ было предкомпактно в $C[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы это множество было равномерно ограниченным и равностепенно непрерывным.*

Доказательство. Необходимость. Пусть множество Φ предкомпактно в $C[a, b]$. Тогда по теореме 2.4.3 для каждого положительного ε существует конечная $\varepsilon/3$-сеть $\{\phi_j\}_{j=1}^n \subset C[a, b]$. Поскольку каждая из функций ϕ_j непрерывна, то она ограничена: $|\phi_j(t)| \le C_j$. Положим $C = \max_{1 \le j \le n} C_j + \varepsilon/3$. По определению $\varepsilon/3$-сети для всякого $\phi \in \Phi$ существует хотя бы одна ϕ_j, для которой

$$\rho(\phi_j, \phi) = \max_{t \in [a,b]} |\phi(t) - \phi_j(t)| \le \varepsilon/3.$$

Следовательно,

$$|\phi(t)| \le |\phi(t) - \phi_j(t)| + |\phi_j(t)| \le \varepsilon/3 + C_j \le C,$$

а значит, Φ равномерно ограничена.

Далее, так как каждая из функций ϕ_j, образующих $\varepsilon/3$-сеть равномерно непрерывна на отрезке $[a, b]$, то существует $\delta_j > 0$, такое, что

$$|\phi_j(t_1) - \phi_j(t_2)| < \varepsilon/3,$$

если $|t_1 - t_2| < \delta_j$.

Положим $\delta = \min_{1 \le j \le n} \delta_j$. Тогда

$$|\phi(t_1) - \phi(t_2)| \le |\phi(t_1) - \phi_j(t_1)| + |\phi_j(t_1) - \phi_j(t_2)| + |\phi_j(t_2) - \phi(t_2)| <$$

$$\varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon,$$

если $|t_1 - t_2| < \delta$. Равностепенная непрерывность доказана.

Достаточность. Пусть Φ – равномерно ограниченное и равностепенно непрерывное множество функций из $C[a, b]$. Покажем, что оно вполне ограничено. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и пусть $\delta > 0$ и $C > 0$ выбраны так, что $|\phi(\tau_1) - \phi(\tau_2)| < \varepsilon/5$ при $|\tau_1 - \tau_2|$ для всех $\tau_1, \tau_2 \in [a, b]$, для всех $\phi \in \Phi$ и $|\phi(\tau)| \leq C$, для всех $\phi \in \Phi$.

Разобьем отрезок $[a, b]$ на оси Ot точками $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ на промежутки длиной меньше δ. Отрезок $[-C, C]$ на оси Oy разобьем точками $-C = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = C$ на промежутки длины меньше чем $\varepsilon/5$. Сопоставим теперь каждой функции $\phi \in \Phi$ ломаную ψ с вершинами в точках (t_k, y_j), которые уклоняются в точках t_k от функции ϕ не более, чем на $\varepsilon/5$. Тогда по построению

$$|\psi(t_{k+1}) - \psi(t_k)| \leq$$

$$|\psi(t_{k+1}) - \phi(t_{k+1})| + |\phi(t_{k+1}) - \phi(t_k)| + |\psi(t_k) - \phi(t_k)| \leq 3\varepsilon/5.$$

Так как между точками t_k и t_{k+1} ломаная ψ линейна, то $\psi(x) - \psi(t_k) < 3\varepsilon/5$ для всех $x \in [t_k, t_{k+1}]$

Пусть теперь $t \in [a, b]$ и t_k – ближайшая слева из выбранных нами точек деления. Тогда

$$|\phi(t) - \psi(t)| \leq |\phi(t) - \phi(t_k)| + |\phi(t_k) - \psi(t_k)| + |\psi(t_k) - \psi(t)| \leq \varepsilon.$$

Следовательно, ломаные $\psi(t)$ образуют по отношению к Φ ε-сеть. Поскольку число узлов (t_k, y_j) равно $m \times n$, то и число ломаных также конечно. Теорема доказана. $\square$

2.5 Лекция 12

2.5.1 Свойства непрерывных линейных функционалов

Предложение 2.5.1. *Если линейный функционал f непрерывен в какой-либо точке $x_0 \in L$, то он непрерывен всюду на L.*

Доказательство. Пусть f непрерывен в точке $x_0 \in L$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $x \in L$, удовлетворяющих $\|x - x_0\| < \delta$, выполняется неравенство

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x - x_0)| < \varepsilon,$$

или, иными словами, для всех $y \in L$, удовлетворяющих $\|y\| < \delta$, выполняется неравенство $|f(y)| < \varepsilon$.

Если y_0 – произвольная точка L, и $\|x - y_0\| < \delta$, то мы заключаем, что

$$|f(x) - f(y_0)| = |f(x - y_0)| < \varepsilon.$$

Предложение доказано. □

Определение 2.5.1. Функционал f, заданный на нормированном пространстве L, называется *ограниченным* на множестве $M \subset L$, если существует такая постоянная $C > 0$, что $|f(x)| \leq C$ для всех $x \in M$.

Теорема 2.5.1. *Для того чтобы линейный функционал был непрерывным на L, необходимо и достаточно, чтобы он был ограничен в некоторой окрестности нуля.*

Доказательство. Если линейный функционал f непрерывен на L, то он непрерывен в нуле. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $x \in L$, удовлетворяющих $\|x\| < \delta$, выполняется неравенство

$$|f(x) - f(0)| = |f(x)| < \varepsilon,$$

т.е. он ограничен в шаре $B(0, \delta)$.

Обратно, если он ограничен в некотором шаре $B(0, r)$, то существует такая постоянная $C > 0$, что $|f(x)| \le C$ для всех $x \in B(0, r)$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ положим $\delta = \varepsilon r / C$. Поскольку $\left\| \frac{xr}{\|x\|} \right\| = r$, при $x \neq 0$, то для всех ненулевых $x \in L$, удовлетворяющих $\|x\| < \delta$, выполняется неравенство

$$|f(x) - f(0)| = |f(x)| = \frac{\|x\|}{r} \left| f\left(\frac{xr}{\|x\|} \right) \right| \le \frac{C\|x\|}{r} < \varepsilon.$$

Таким образом, f непрерывен в нуле, а значит, и на всем L (см. предложение 2.5.1). □

Определение 2.5.2. Пусть f – ограниченный функционал на L. Число

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \le 1} |f(x)| \tag{2.5.1}$$

называется *нормой* функционала f.

Предложение 2.5.2. *Норма линейного функционала f обладает следующими свойствами:*

1) $\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)|$;

2) $\|f\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|}$;

3) $|f(x)| \le \|f\| \|x\|$ *для всех* $x \in L$.

Доказательство. Для нулевого функционала эти утверждения тривиальны. Пусть теперь функционал f не является нулевым.

Свойство 1) справедливо, поскольку для всякого x_0, удовлетворяющего $\|x_0\| < 1$, существует x_1, удовлетворяющий $\|x_1\| = 1$ такой, что $|f(x_0)| \leq |f(x_1)|$. Предположим противное, т.е. что существует элемент x_0, удовлетворяющий $\|x_0\| < 1$ такой, что для всякого x, удовлетворяющего $\|x\| = 1$, выполнено неравенство $|f(x_0)| > |f(x)|$. Тогда элемент $x_1 = x_0/\|x_0\|$ удовлетворяет $\|x_1\| = 1$, и

$$|f(x_1)| = \left|\frac{1}{\|x_0\|} f(x_0)\right| > |f(x_0)|,$$

что находится в противоречии с нашим предположением.

Свойство 2) сразу следует из равенства

$$\frac{|f(x)|}{\|x\|} = \left|f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right|, \quad x \neq 0.$$

Свойство 3) справедливо, так как при $x \neq 0$ элемент $x/\|x\|$ принадлежит (замкнутому) единичному шару, а значит, по определению нормы мы имеем

$$\left|f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right| = \frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq \|f\|.$$

Предложение доказано. □

Пример 2.5.1. Пусть L – какое-нибудь евклидово пространство, $a \in L$ – фиксированный вектор, $f_a(x) = (x, a)$. Тогда в силу аксиом скалярного произведения и неравенства Коши-Буняковского f_a является линейным непрерывным функционалом. При этом $|(x, a)| \leq \|x\|\|a\|$ для всех $x \in L$, откуда следует, что $\|f_a\| \leq \|a\|$. Положив $x = a$, получим $|f_a(a)| = \|a\|^2$, т.е. $\frac{f_a(a)}{\|a\|} = \|a\|$. Значит, в силу предложения 2.5.2 мы заключаем, что $\|f_a\| = \|a\|$. Например, в случае $L = \mathbb{R}^n_2$, $a = (a_1, \ldots, a_n)$ мы имеем $f_a(x) = \sum_{j=1}^n x_j a_j$.

Пример 2.5.2. Пусть $L = C[a,b]$, $y(t)$ – фиксированная непрерывная функция на $[a,b]$ и

$$f_y(x) = \int_a^b x(t)y(t)\,dt.$$

Из примера 2.5.1 следует, что f_y – непрерывный линейный функционал на $C_2[a,b]$. Покажем, что это также непрерывный линейный функционал и на $C[a,b]$. Линейность следует из линейности интеграла, а ограниченность вытекает из неравенства:

$$|f_y(x)| = \left|\int_a^b x(t)y(t)\,dt\right| \le \int_a^b |x(t)|\,|y(t)|\,dt \le \|x\| \int_a^b |y(t)|\,dt,$$

откуда следует, что $\|f_y\| \le \int_a^b |y(t)|\,dt$.

2.5.2 Теорема Хана-Банаха в нормированных пространствах

Определение 2.5.3. Пусть L_0 – подпространство линейного пространства L, а f_0 – линейный функционал на L_0. Функционал $f : L \longrightarrow \mathbb{R}$ называется *продолжением* функционала f_0, если $f(x) = f_0(x)$ для всех $x \in L_0$.

Задача о продолжении часто встречается в анализе.

Теорема 2.5.2. *Пусть L – действительное нормированное пространство, L_0 – его подпространство и f_0 – ограниченный линейный функционал на L_0. Тогда f_0 может быть продолжен до* *некоторого линейного функционала* $\boldsymbol{f}$ *на всем пространстве* $\boldsymbol{L}$ *без увеличения нормы, т.е. так, что*

$$\|\boldsymbol{f}\|_L = \|\boldsymbol{f_0}\|_{L_0}.$$

Доказательство. В самом деле, в силу свойств нормы в пространстве $\boldsymbol{L_0}$,

$$|f(x)| \leq \|f_0\|_{L_0}\|x\| \text{ для всех } x \in L_0.$$

Сначала покажем, что если $L_0 \neq L$, то функционал f_0 можно продолжить до линейного функционала на некотором большем подпространстве L_1 с нормой, равной $\|f_0\|_{L_0}$ на всем L_1. Действительно, пусть $z \in L$ – произвольный элемент, не принадлежащий L_0. Пусть $L_1 = \mathcal{L}(L_0, z)$. Тогда каждый элемент из L_1 имеет вид $y = tz + x$, где $x \in L_0$, $t \in \mathbb{R}$. Такое представление единственно. Действительно, если $y = t_1 z + x_1$, то $(t - t_1)z = (x - x_1) \in L_0$, а значит, либо $t = t_1$, либо $z \in L_0$. Поскольку последнее не верно в силу выбора z, то $t = t_1$ и $x = x_1$.

Если f_1 – искомое продолжение функционала f_0 на L_1, то

$$f_1(y) = tf_1(z) + f_1(x) = tf_1(z) + f_0(x).$$

Таким образом, для того, чтобы продолжить функционал f_0 на L_1, необходимо и достаточно задать значение $c = f_1(z)$. Выберем это значение так, чтобы

$$|f_1(y)| \leq \|f_0\|_{L_0}\|y\| \text{ для всех } y \in L_1,$$

т.е. так, чтобы для всех $x \in L_0$ и всех $t \in \mathbb{R}$ выполнялось

$$|f_0(x) + tc| \leq \|f_0\|_{L_0}\|tz + x\|.$$

При $t = 0$ данное неравенство справедливо в силу условий теоремы. При $t \neq 0$, разделив на $|t|$ получим

$$|f_0(x/t) + c| \leq \|f_0\|_{L_0}\|z + x/t\|,$$

или, что то же самое,

$$-\|f_0\|_{L_0}\|z+x/t\|-f_0(x/t)\leq c\leq \|f_0\|_{L_0}\|z+x/t\|-f_0(x/t).$$

Покажем, что существует число c, удовлетворяющее этому условию. Пусть $x_1, x_2 \in L_0$. Тогда

$$f_0(x_2-x_1)=f_0(x_2)-f_0(x_1)\leq \|f_0\|_{L_0}\|x_2-x_1\|=$$

$$\|f_0\|_{L_0}\|(x_2+z)-(z+x_1)\|\leq \|f_0\|_{L_0}\left(\|x_2+z\|+\|x_1+z\|\right),$$

а значит,

$$-f_0(x_2)+\|f_0\|_{L_0}\|x_2+z\|\geq -f_0(x_1)-\|f_0\|_{L_0}\|x_1+z\|.$$

Отсюда следует, что

$$\inf_{x_2\in L_0}(-f_0(x_2)+\|f_0\|_{L_0}\|x_2+z\|)=c_2\geq$$

$$c_1=\sup_{x_1\in L_0}(-f_0(x_1)-\|f_0\|_{L_0}\|x_1+z\|).$$

Выбрав теперь $c_1 \leq c \leq c_2$, мы заключаем, что функционал $f_1(y)=tc+f_0(x)$ удовлетворяет условиям теоремы. В этой точке доказательства видно, что, вообще говоря, продолжение может не быть единственным.

Далее, если L сепарабельно, то в нем можно выбрать не более чем счетную систему $\{x_n\}$, порождающую все L (т.е. $\overline{\mathcal{L}(\{x_n\})}=L$). В этом случае функционал f на L построим по индукции, рассматривая возрастающую цепочку подпространств $L_k=\mathcal{L}(L_{k-1},x_k)$, $k\geq 1$. Тогда каждый элемент $x\in\mathcal{L}(\{x_n\})$ войдет в некоторое L_k, а значит, функционал f_0 будет продолжен на все $\mathcal{L}(\{x_n\})$. Теперь на всем пространстве L функционал f может быть доопределен по непрерывности, т.е.

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f(y_n),$$

где $\{y_n\} \in \mathcal{L}(\{x_n\})$ и $\lim_{n\to\infty} y_n = x$.

В общем случае доказательство заканчивается применением леммы Цорна ("если любая цепь в частично упорядоченном множестве M имеет верхнюю грань, то всякий элемент из M подчинен некоторому максимальному"). Совокупность $\mathfrak{F}$ всевозможных линейных продолжений функционала f_0, с нормой $\|f_0\|_{L_0}$, частично упорядочена. В самом деле, будем говорить, что $f_1 \geq f_2$, если область определения функционала f_2 содержит область определения функционала f_1. Легко проверить, что это отношение рефлексивно, транзитивно и антисимметрично. Любое линейно упорядоченное подмножество $\mathfrak{F}_0$ всегда имеет верхнюю грань (т.е. функционал, определенный на объединении областей определения функционалов из $\mathfrak{F}_0$). Из леммы Цорна следует, что во всем $\mathfrak{F}$ существует максимальный элемент, который и представляет собой искомый функционал. Действительно, он является продолжением функционала f_0, с нормой $\|f_0\|_{L_0}$ на своей области определения, которая совпадает с L, так как иначе мы бы продолжили его с области определения на некоторое большее подпространство, и этот элемент не был бы максимальным. Теорема доказана. $\square$

Следствие 2.5.1. *Если x_0 – ненулевой элемент в нормированном пространстве L, то существует такой непрерывный линейный функционал f на L, что $\|f\| = 1$ и $f(x_0) = \|x_0\|$.*

Доказательство. Действительно, пусть

$$L_0 = \mathcal{L}(x_0) = \{y = ax_0 | a \in \mathbb{R}\}$$

$$f_0(y) = a\|x_0\| \text{ для всех } y \in L_0.$$

Очевидно, $\|f_0\| = 1$, и $f(x_0) = \|x_0\|$. Продолжив его без увеличения нормы на все пространство L, мы получим искомый функционал f. $\square$

2.5.3 Теорема Хана-Банаха для комплексных пространств*

Приведем еще вариант теоремы Хана-Банаха в пространствах над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Теорема 2.5.3. *Пусть $\boldsymbol{L}$ – комплексное нормированное пространство, $\boldsymbol{L_0}$ – его подпространство и $\boldsymbol{f_0}$ – ограниченный линейный функционал на $\boldsymbol{L_0}$. Тогда $\boldsymbol{f_0}$ может быть продолжен до некоторого линейного функционала $\boldsymbol{f}$ на всем пространстве $\boldsymbol{L}$ без увеличения нормы, т.е. так, что*

$$\|f\|_L = \|f_0\|_{L_0}.$$

Доказательство. Обозначим через L_R и L_{0R} пространства L_0 и L_0, рассматриваемые над полем $\mathbb{R}$. Ясно, что $f_{0R}(x) = \mathcal{R}e f_0(x)$ – действительный линейный функционал на L_{0R}, удовлетворяющий условию

$$|f_{0R}(x)| \leq \|f_0\|_{L_0}\|x\| \qquad (x \in L_0).$$

По теореме Хана-Банаха 2.5.2 существует действительный линейный функционал f_R, определенный на всем L_R, и такой, что

$$|f_R(x)| \leq \|f_0\|_{L_0}\|x\| \text{ для всех } x \in L_R (= L),$$

$$f_R(x) = f_{0R}(x) \text{ для всех } x \in L_{0R} (= L_0).$$

Воспользуемся тем, что L – комплексное пространство, и положим

$$f(x) = f_R(x) - \sqrt{-1} f_R(\sqrt{-1}x), \quad x \in L_R (= L).$$

Если $x \in L_0$, то $\sqrt{-1}x \in L_0$ и

$$f(x) = f_R(x) - \sqrt{-1} f_R(\sqrt{-1}x) = f_{0R}(x) - \sqrt{-1} f_{0R}(\sqrt{-1}x) =$$

$$\mathcal{R}ef_0(x) - \sqrt{-1}\mathcal{R}ef_0(\sqrt{-1}x) = \mathcal{R}ef_0(x) - \sqrt{-1}\mathcal{R}e\sqrt{-1}f_0(x) =$$

$$\mathcal{R}ef_0(x) + \sqrt{-1}\mathcal{I}mf_0(x) = f_0(x),$$

т.е. f есть продолжение f_0 на все пространство L.

Легко понять, что функционал f линеен. Действительно, он аддитивен в силу аддитивности функционала f_R. Проверим однородность (над полем $\mathbb{C}$). Пусть $a = a_1 + \sqrt{-1}a_2 \in \mathbb{C}$. Тогда для всех $x \in L$ имеем:

$$f(ax) = f(a_1x + \sqrt{-1}a_2x) =$$

$$f_R(a_1x + \sqrt{-1}a_2x) - \sqrt{-1}f_R(\sqrt{-1}a_1x - a_2x) =$$

$$a_1f_R(x) + a_2f_R(\sqrt{-1}x) - \sqrt{-1}a_1f_R(\sqrt{-1}x) + \sqrt{-1}a_2f_R(x) =$$

$$af_R(x) - \sqrt{-1}af_R(\sqrt{-1}x) = af(x).$$

Наконец, покажем, что $|f(x) \le \|f_0\|_{L_0}\|x\|$ для всех $x \in L$. Предположим противное, т.е. пусть точка $x_0 \in L$ такова, что $|f(x_0)| > \|f_0\|_{L_0}\|x_0\|$. Представим комплексное число $f(x_0)$ в показательной форме $f(x_0) = re^{\sqrt{-1}\varphi}$ ($r > 0$) и положим $y_0 = e^{-\sqrt{-1}\varphi}x_0$. Тогда

$$f_R(y_0) = \mathcal{R}ef(y_0) = \mathcal{R}e(e^{-\sqrt{-1}\varphi}f(x_0) = r = |f(x_0)| >$$

$$\|f_0\|_{L_0}\|x_0\| = \|f_0\|_{L_0}\|e^{\sqrt{-1}\varphi}y_0\| = |e^{\sqrt{-1}\varphi}|\|f_0\|_{L_0}\|y_0\| = \|f_0\|_{L_0}\|y_0\|,$$

что противоречит выбору функционала f_R (у нас $f_R(y) \le \|f_0\|_{L_0}\|y\|$ для всех $y \in L_R = L$). Теорема доказана. $\square$

2.6 Лекция 13

2.6.1 Сопряженное пространство

Для линейных функционалов можно определить операции сложения и умножения на числа.

Определение 2.6.1. Пусть f_1 и f_2 – линейные функционалы на пространстве L. Их суммой называется функционал $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ $(x \in L)$. Произведением функционала f_1 на число a называется функционал $g(x) = af_1(x)$ $(x \in L)$.

Предложение 2.6.1. *С введенными в определении 2.6.1 операциями сложения и умножения на числа множество $L^\sharp$ всех линейных функционалов является линейным пространством, а множество всех линейных непрерывных функционалов L^* является его подпространством.*

Доказательство. В самом деле,

$$(f_1 + f_2)(a_1x_1 + a_2x_2) = f_1(a_1x_1 + a_2x_2) + f_2(a_1x_1 + a_2x_2) =$$

$$a_1f_1(x_1) + a_2f(x_2) + a_1f_2(x_1) + a_2f_2(x_2) =$$

$$a_1(f_1 + f_2)(x_1) + a_2(f_1 + f_2)(x_2),$$

т.е. $L^\sharp$ – линейное пространство. Что же касается второго утверждения, то оно справедливо, поскольку если функционалы f_1, f_2 непрерывны, то они ограничены, а значит,

$$|(a_1f_1 + a_2f_2)(x)| \leq |a_1|\,|f_1(x)| + |a_2|\,|f_2(x)|.$$

Предложение доказано. □

Замечание 2.6.1. Хотя для конечномерных пространств $L^* = L^\sharp$, в общем случае пространства $L^\sharp$ и L^* различны. Например, если $L = l_2$, то функционал $f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j$ является линейным и неограниченным.

Теорема 2.6.1. *Формула (2.5.1) задает норму $\|.\|$ на линейном пространстве L^*; при этом пара $(L, \|.\|)$ является банаховым пространством.*

Доказательство. В самом деле, очевидно, что для всякого ненулевого ограниченного линейного функционала функция $\|.\|$ определена и положительна. Однородность этой функции очевидна. Наконец, проверим неравенство треугольника. По предложению 2.5.2

$$\|f_1 + f_2\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f_1(x) + f_2(x)|}{\|x\|} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{|f_1(x)|}{\|x\|} + \sup_{x \neq 0} \frac{|f_2(x)|}{\|x\|} =$$

$$\|f_1\| + \|f_2\|.$$

Таким образом, функция $\|.\|$ является нормой, а пара $(L^*, \|.\|)$ – нормированным пространством.

Покажем, что это пространство полно, независимо от того, полно или нет исходное пространство L. Пусть $\{f_n\}$ – фундаментальная последовательность в L^*. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N \in \mathbb{N}$, что $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$ для всех $n, m \geq N$. Тогда

$$(2.6.1) \quad |f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\| \|x\| < \varepsilon \|x\| \quad (x \in L),$$

т.е. при любом $x \in L$ числовая последовательность $\{f_n(x)\}$ фундаментальна. Итак, положим

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) \quad (x \in L).$$

Проверим, что функционал f линеен и непрерывен. В самом деле,

$$f(ax+by) = \lim_{n\to\infty} f_n(ax+by) =$$

$$a\lim_{n\to\infty} f_n(x) + b\lim_{n\to\infty} f_n(y) = af(x) + bf(y).$$

Для доказательства непрерывности функционала воспользуемся формулой (2.6.1). Так как $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon\|x\|$, то, перейдя к пределу по $m \to \infty$, мы получим

$$|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon\|x\| \quad (x \in L).$$

Отсюда вытекает, что функционал $f - f_n$ ограничен. Но тогда ограничен, а значит, непрерывен и функционал $f = (f - f_n) + f_n$. Кроме того, отсюда же следует, что $\|f - f_n\| \le \varepsilon$ для всех $n \ge N$, т.е., что $\{f_n\}$ сходится к f. □

Замечание 2.6.2. Иногда про сходящуюся в нормированном пространстве $(L^*, \|.\|)$ последовательность говорят, что она сходится *сильно* в пространстве L^*.

Замечание 2.6.3. Если нормированное пространство L не полно, а $\tilde{L}$ – его пополнение, то пространства $\tilde{L}^*$ и L^* изоморфны.

Пример 2.6.1. Если L – конечномерное (n-мерное) евклидово пространство (действительное или комплексное), то, зафиксировав в нем какой-нибудь базис $\{e_k\}_{k=1}^n$, мы получим для всех $x \in L$ и $f \in L^*$:

$$x = \sum_{k=1}^n c_k e_k, \qquad f(x) = \sum_{k=1}^n c_k f(e_k).$$

Следовательно, линейный (непрерывный) функционал однозначно определяется своими значениями на базисных векторах. Определим линейные функционалы $\{g_k\}_{k=1}^n$:

$$g_k(e_j) = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Система $\{g_k\}_{k=1}^n$ является линейно независимой, поскольку, если

$$\sum_{k=1}^{n} g_k(x) b_k = 0$$

для всех $x \in L$, то, в частности,

$$\sum_{k=1}^{n} g_k(e_j) b_k = b_j = 0$$

для всех $1 \leq j \leq n$. Ясно, что $g_k(x) = c_k$, поэтому

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} g_k(x) f(e_k).$$

Таким образом, функционалы $\{g_k\}_{k=1}^n$ составляют базис в пространстве L^* и $\dim L = \dim L^* = n$. Базис $\{g_k\}_{k=1}^n$ в L^* называют *двойственным* по отношению к $\{e_k\}_{k=1}^n$ в L.

Различные нормы в пространстве L индуцируют различные нормы в L^*. Для того чтобы в этом убедиться, нам потребуется неравенство Гельдера.

Лемма 2.6.1. *(Неравенство Гельдера) Для всех $a, b \in \mathbb{R}^n$ и для всех $1 < p < \infty$ справедливо неравенство:*

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q \right)^{1/q}, \tag{2.6.2}$$

где $1/p + 1/q = 1$.

Доказательство. См., например, [1]. □

Пример 2.6.2. Пусть $L \cong \mathbb{R}_p^n$ $(1 \le p \le \infty)$ тогда $L^* = \mathbb{R}_q^n$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Действительно, из примера 2.6.1 следует, что

$$x = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k, \qquad f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k f(e_k) = \sum_{k=1}^{n} g_k(x) f(e_k),$$

где $f(e_k) = f_k$ – координаты функционала f в базисе $\{g_k\}_{k=1}^n$. Таким образом f можно отождествить с вектором $(f_1, \ldots, f_n) \in \mathbb{R}^n$.

Рассмотрим сначала случай $1 < p < \infty$. По неравенству Гельдера (2.6.2)

$$|f(x)| \le \sum_{k=1}^{n} |c_k f(e_k)| \le \left(\sum_{k=1}^{n} |c_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |f(e_k)|^q \right)^{1/q} =$$

$$\|x\|_p \left(\sum_{k=1}^{n} |f_k|^q \right)^{1/q}.$$

Следовательно, $\|f\| \le \left(\sum_{k=1}^{n} |f_k|^q \right)^{1/q}$. В частности, для

$$x_0 = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{sign}(f_k)\, |f_k|^{q/p}\, e_k$$

мы имеем

$$\|x_0\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |f_k|^q \right)^{1/p},$$

$$|f(x_0)| = \left| \sum_{k=1}^{n} \mathbf{sign}(f_k)\, |f_k|^{q/p} f_k \right| =$$

$$\sum_{k=1}^{n} |f_k|^{1+q/p} = \sum_{k=1}^{n} |f_k|^q = \|x_0\|_p \left(\sum_{k=1}^{n} |f_k|^q\right)^{1-1/p} =$$

$$\|x_0\|_p \left(\sum_{k=1}^{n} |f_k|^q\right)^{1/q} = \|x_0\|_p \, \|(f_1, \dots, f_n)\|_q,$$

а значит, $\|f\| = \|(f_1, \dots, f_n)\|_q$.

При $p = 1$ имеем

$$|f(x)| \le \sum_{k=1}^{n} |c_k f(e_k)| \le \max_{1\le k\le n} |f_k| \sum_{k=1}^{n} |c_k| = \max_{1\le k\le n} |f_k| \|x\|_1.$$

Следовательно, $\|f\| \le \max\limits_{1\le k\le n} |f_k|$. В частности, если $|f_j| = \max\limits_{1\le k\le n} |f_k|$, то для $x_0 = \mathrm{sign}(f_j)\, f_j e_j$ имеем: $\|x_0\|_1 = |f_j|$,

$$|f(x_0)| = \left(\max_{1\le k\le n} |f_k|\right)^2 = \|x_0\|_1 \, \|(f_1, \dots, f_n)\|_\infty,$$

а значит, $\|f\| = (f_1, \dots, f_n)_\infty$.

При $p = \infty$ имеем

$$|f(x)| \le \sum_{k=1}^{n} |c_k f(e_k)| \le \max_{1\le k\le n} |c_k| \sum_{k=1}^{n} |f_k| = \|x\|_\infty \sum_{k=1}^{n} |f_k|.$$

Следовательно, $\|f\| \le \sum_{k=1}^{n} |f_k|$, и для $x_0 = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{sign}(f_k)\, e_k$ имеем: $\|x_0\|_\infty = 1$,

$$|f(x_0)| = \sum_{k=1}^{n} |f_k| = \|x_0\|_\infty \|(f_1, \dots, f_n)\|_1,$$

а значит, $\|f\| = \|(f_1, \dots, f_n)\|_1$.

Пример 2.6.3. На практических занятиях мы докажем, что $l_p^* = l_q$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ $(1 < p < \infty)$.

2.6.2 Теорема об общем виде непрерывного линейного функционала на полном евклидовом пространстве

Теорема 2.6.2. *Пусть* $\boldsymbol{L}$ *– (действительное или комплексное) полное евклидово пространство. Для всякого непрерывного линейного функционала* $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^*$ *существует единственный элемент* $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{L}$ *такой, что*

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) \text{ для всех } \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{L}, \tag{2.6.3}$$

причем $\|\boldsymbol{f}\| = \|\boldsymbol{a}\|$*. Обратно, если* $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{L}$*, то формула (2.6.3) определяет такой непрерывный функционал* $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$*, что* $\|\boldsymbol{f}\| = \|\boldsymbol{a}\|$*.*

Доказательство. Как мы уже отмечали в примере 2.5.1, если $\boldsymbol{L}$ – какое-нибудь евклидово пространство, $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{L}$ – фиксированный вектор, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})$, то в силу аксиом скалярного произведения и неравенства Коши-Буняковского $\boldsymbol{f}$ является линейным непрерывным функционалом. При этом $|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})| \le \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{a}\|$ для всех $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{L}$, откуда следует, что $\|\boldsymbol{f}\| \le \|\boldsymbol{a}\|$. Положив $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$, получим $|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})| = \|\boldsymbol{a}\|^2$, т.е. $\frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})}{\|\boldsymbol{a}\|} = \|\boldsymbol{a}\|$. Значит, в силу предложения 2.5.2 мы заключаем, что $\|\boldsymbol{f}\| = \|\boldsymbol{a}\|$.

Покажем, что всякий непрерывный линейный функционал $\boldsymbol{f}$ представим в виде (2.6.3). Если $\boldsymbol{f} \equiv \boldsymbol{0}$, то, очевидно, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$. Пусть $\boldsymbol{f} \not\equiv \boldsymbol{0}$. Обозначим через $\ker \boldsymbol{f}$ ядро функционала $\boldsymbol{f}$:

$$\ker \boldsymbol{f} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{L} | \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = 0\}.$$

Легко понять, что это (замкнутое) подпространство в $\boldsymbol{L}$. Действительно, $\ker \boldsymbol{f}$ является линейным многообразием в $\boldsymbol{L}$ согласно предложению 2.4.1. Если последовательность $\{\boldsymbol{x}_n\} \subset \ker \boldsymbol{f}$ сходится в $\boldsymbol{L}$ к некоторому элементу $\boldsymbol{x}$, то в силу непрерывности функционала $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{0}$, т.е. $\boldsymbol{x} \in \ker \boldsymbol{f}$.

Поскольку пространство L полно, то согласно теореме 2.3.5 $L = \ker f \oplus (\ker f)^{\perp}$, где $(\ker f)^{\perp}$ – ортогональное дополнение подпространства $\ker f$ в L.

Лемма 2.6.2. *Если* $f \not\equiv 0$, *то* $\dim(\ker f)^{\perp} = 1$.

Доказательство. Пусть $y \in L$ таков, что $f(y) \neq 0$. Тогда $y = y_0 + y_1$, где $y_0 \in \ker f$, $y_1 \in (\ker f)^{\perp}$ и $f(y_1) = f(y) \neq 0$.

Положим $y_2 = \frac{y_1}{\|y_1\|}$. Ясно, что $y_2 \in (\ker f)^{\perp}$ и $f(y_2) \neq 0$. Следовательно, для всякого $x \in L$

$$x = \left(x - \frac{f(x)}{f(y_2)} y_2\right) + \frac{f(x)}{f(y_2)} y_2 = x_0 + \beta y_2,$$

где $f(x_0) = f\left(x - \frac{f(x)}{f(y_2)} y_2\right) = 0$. Покажем, что в этом представлении вектора x постоянная β и вектор x_0 выбраны единственно возможным способом. Действительно, если $x = x_0' + \beta' y_2$, где $f(x_0) = 0$, то $x_0 - x_0' = (\beta' - \beta) y_2$. Отсюда следует, что либо $\beta = \beta'$, либо $y_2 \in \ker f$. Так как последнее противоречит выбору y_2, то $\beta = \beta'$ и $x_0 = x_0'$.

Итак, для $x \in (\ker f)^{\perp}$ мы получаем, что $x = \beta y_2$, что и требовалось. □

Далее, положим $a = f(y_2) y_2$, если пространство L действительное и $a = \overline{f(y_2)} y_2$, если пространство L комплексное. Тогда для любого $x \in L$

$$f(x) = f(x_0 + \beta y_2) = \beta f(y_2),$$

$$(x, a) = (x_0 + \beta y_2, f(y_2) y_2) = \beta f(y_2) \|y_2\|^2 = \beta f(y_2).$$

Таким образом, $f(x) = (x, a)$ для всех $x \in L$ и, как мы уже доказали, $\|a\| = \|f\|$.

Наконец, докажем единственность элемента a. Если $f(x) = (x, a')$ для всех $x \in L$, то $(x, a - a') = 0$ для всех L, откуда, полагая $x = a - a'$, получаем $a = a'$. □

Теорема 2.6.3. *Пусть* $\boldsymbol{L}$ *– полное евклидово пространство. Равенство (2.6.3) определяет изоморфизм* $\boldsymbol{\phi}$ $(\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{f}) = \boldsymbol{a})$ *между* $\boldsymbol{L}$ *и* $\boldsymbol{L}^*$*, если* $\boldsymbol{L}$ *является действительным пространством, и сопряженно линейный изоморфизм, если* $\boldsymbol{L}$ *является комплексным пространством.*

Доказательство. Взаимно однозначность отображения доказана в теореме 2.6.2. Аддитивность отображения $\boldsymbol{\phi}$ немедленно следует из аддитивности скалярного произведения. Наконец, $\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\beta f}) = \boldsymbol{\beta a}$**,** если $\boldsymbol{L}$ является действительным пространством и $\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\beta f}) = \overline{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{a}$, если $\boldsymbol{L}$ – комплексное пространство, что и требовалось доказать. $\square$

Замечание 2.6.4. Если $\boldsymbol{L}$ – неполное евклидово пространство, то $\boldsymbol{L}^*$ изоморфно пополнению $\tilde{\boldsymbol{L}}$ пространства $\boldsymbol{L}$.

2.7 Лекция 14

2.7.1 Второе сопряженное пространство

Так как непрерывные линейные функционалы на нормированном пространстве $\boldsymbol{L}$ сами образуют нормированное пространство $\boldsymbol{L}^*$, то можно говорить о пространстве $\boldsymbol{L}^{**}$ непрерывных линейных функционалов на $\boldsymbol{L}^*$, т.е. о втором сопряженном пространстве и т.д.

Предложение 2.7.1. *Всякий элемент $\boldsymbol{x}$ нормированного пространства $\boldsymbol{L}$ определяет некоторый непрерывный линейный функционал на $\boldsymbol{L}^*$:*

$$\psi_x(f) = f(x) \qquad (f \in L^*).$$

Доказательство. Зафиксируем $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{L}$. Тогда

$$\psi_x(af + bg) = (af + bg)(x) = af(x) + bg(x) = a\psi_x(f) + b\psi_x(g)$$

для всех $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \in \boldsymbol{L}^*$, т.е. функционал $\boldsymbol{\psi_x}$ линеен.

Далее,

$$|\psi_x(f)| = |f(x)| \leq \|x\|\,\|f\|, \tag{2.7.1}$$

откуда следует, что $\|\boldsymbol{\psi}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| < \infty$. Следовательно, функционал $\boldsymbol{\psi_x}$ ограничен, а значит, непрерывен. $\square$

Таким образом, мы получили отображение $\boldsymbol{\pi} : \boldsymbol{L} \to \boldsymbol{L}^{**}$, (где $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\psi_x}$), которое называется естественным отображением пространства $\boldsymbol{L}$ во второе сопряженное.

Предложение 2.7.2. *Естественное отображение нормированного пространства $\boldsymbol{L}$ во второе сопряженное является линейным и инъективным.*

Доказательство. Линейность проверяется непосредственно:

$$\pi(ax+by)(f) = \psi_{ax+by}(f) = f(ax+by) = af(x) + bf(y) =$$

$$a\psi_x(f) + b\psi_y(f) = a\pi(x)(f) + b\pi(y)(f).$$

Проверим инъективность. Пусть $x \neq y$ – два элемента из L. Тогда $z = x - y \neq 0$ и $\|z\| \neq 0$. Используя следствие 2.5.1, заключаем, что существует непрерывный линейный функционал $f \in L^*$ такой, что $f(z) = \|z\| \neq 0$. Следовательно,

$$\pi(x)(f) - \pi(y)(f) = \psi_x(f) - \psi_y(f) = f(x) - f(y) =$$

$$f(x-y) = f(z) = \|z\| \neq 0,$$

т.е. $\pi(x) \neq \pi(y)$. □

Предложение 2.7.3. *Естественное отображение нормированного пространства L во второе сопряженное является изометрией, т.е.*

$$\|\pi(x)\| = \|\psi_x\| = \|x\|.$$

Доказательство. Из формулы (2.7.1) следует, что $\|\pi(x)\| = \|\psi_x\| \leq \|x\|$. С другой стороны, по следствию 2.5.1 для каждого $x \in L$ существует непрерывный линейный функционал $f \in L^*$ такой, что $\|f\| = 1$ и $f(x) = \|x\|$. Поэтому $\|\pi(x)\| = \|\psi_x\| \geq \|x\|$, что и требовалось доказать. □

Таким образом, нормированное пространство L изометрично (вообще говоря, незамкнутому) линейному многообразию $\pi(L) \subset L^{**}$. Отождествляя L с $\pi(L)$, можно считать, что $L \subset L^{**}$.

Определение 2.7.1. Нормированное пространство L называется *рефлексивным,* если отображение π есть (сопряженно линейный, в случае комплексных пространств) изоморфизм нормированных пространств L и L^{**}, т.е. если $\pi(L) = L^{**}$ (пишем $L \cong L^{**}$).

Пример 2.7.1. Всякое полное евклидово пространство рефлексивно, так как в силу теоремы 2.6.3 мы имеем $L \cong L^* \cong L^{**}$, и кроме того, мы знаем общий вид линейных непрерывных функционалов на L и L^*:

$$f(x) = (x, a_f)_L, \quad F(f) = (a_f, a_F)_L,$$

$x \in L$, $f \in L^*$, $F \in L^{**}$. Поскольку

$$\pi(x)(f) = f(x) = (x, a_f)_L,$$

то мы заключаем, что отображение $\pi : L \to L^{**}$ сюрьективно.

Пример 2.7.2. Пространства $\mathbb{R}^n_p$ $(1 \le p)$ являются рефлексивными. В самом деле, мы доказали, что $(\mathbb{R}^n_p)^* \cong \mathbb{R}^n_q$, $1/q + 1/p = 1$ и получили общий вид непрерывного линейного функционала на $\mathbb{R}^n_p$. Кроме того, отсюда следует, что $(\mathbb{R}^n_p)^{**} \cong (\mathbb{R}^n_q)^* \cong \mathbb{R}^n_p$ $(1/q + 1/p = 1)$. Таким образом,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k\, f_k, \quad F(f) = \sum_{k=1}^{n} f_k\, F_k,$$

$x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n_p$, $f = (f_1, \ldots, f_n) \in (\mathbb{R}^n_p)^*$, $F \in (F_1, \ldots, F_n)(\mathbb{R}^n_p)^{**}$.

При этом мы имеем:

$$\pi(x)(f) = \sum_{k=1}^{n} c_k\, f_k,$$

а значит, отображение $\pi : L \to L^{**}$ сюрьективно. Отметим, что $(\mathbb{R}^n_p)^* = \mathbb{R}^n_q \neq \mathbb{R}^n_p$, если $p \neq 2$.

Пример 2.7.3. Пространства l_p $(1 < p)$ являются рефлексивными, поскольку $l_p^{**} = l_q^* = l_p$ $(1/q + 1/p = 1)$. Отметим, что при этом $l_p^* = l_q \neq l_p$, если $p \neq 2$.

Пример 2.7.4. Пространство $\mathcal{M}_0$ сходящихся к нулю последовательностей с нормой

$$\|x\| = \sup_{j \in \mathbb{N}} |x_j| \qquad (x \in \mathcal{M}_0)$$

является примером полного нерефлексивного нормированного пространства. Именно, $\mathcal{M}_0^* \cong l_1$, $\mathcal{M}_0^{**} \cong l_1^* \cong \mathcal{M} \not\cong \mathcal{M}_0$, где $\mathcal{M}$ – пространство ограниченных последовательностей с той же нормой, что и в пространстве $\mathcal{M}_0$. Подробнее мы рассмотрим этот пример на практических занятиях.

2.7.2 Слабая сходимость

В середине прошлого столетия математики обнаружили, что измерить "близкость" элементов в метрических (нормированных, евклидовых) пространствах можно не только с помощью метрики, что наряду с "обычной" (сильной) сходимостью можно ввести и другие, более слабые типы сходимости.

Определение 2.7.2. Говорят, что последовательность $\{x_n\}$ в нормированном пространстве L *сходится слабо* к некоторому элементу x, если

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x) \text{ для всех } f \in L^*.$$

Предложение 2.7.4. *Если последовательность* $\{x_n\}$ *сходится в нормированном пространстве* L *(по норме) к некоторому элементу* x*, то она сходится слабо к* x.

Доказательство. Очевидно, для всякого непрерывного линейного функционала f мы имеем

$$|f(x) - f(x_n)| = |f(x - x_n)| \leq C\|f\|\,\|x - x_n\| \to 0,$$

если $\|x - x_n\| \to 0$ при $n \to \infty$. □

Обратное, вообще говоря, неверно (см. примеры ниже).

Теорема 2.7.1. *Если последовательность* $\{x_n\}$ *слабо сходится в нормированном пространстве* L*, то она ограничена, т.е. существует такая постоянная* $C > 0$*, что* $\|x_n\| \leq C$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Рассмотрим в L^* множества

$$A_{kn} = \{f : |f(x_n)| \leq k\} \quad k, n \in \mathbb{N}.$$

Эти множества замкнуты. Действительно, если $f = \lim_{j\to\infty} f_j$ и $\{f_j\} \subset A_{kn}$, то

$$|f(x_n)| \leq |f(x_n) - f_j(x_n)| + |f_j(x_n)| \leq |f(x_n) - f_j(x_n)| + k.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $j \to \infty$, получим $|f(x_n)| \leq k$, т.е. $f \in A_{kn}$.

Далее, множества $A_k = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_{kn}$ также замкнуты в силу теоремы 1.3.3; при этом

$$A_k = \{f : |f(x_n)| \leq k\} \quad \text{для всех } n \in \mathbb{N}.$$

В силу слабой сходимости последовательности $\{x_n\}$ числовая последовательность $\{f(x_n)\}$ ограничена для всякого $f \in L^*$. Поэтому

$L^* = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k$. Так как пространство L^* полно, то по теореме Бэра (см. теорему 1.5.2) хотя бы одно из множеств A_k, скажем, A_{k_0}, плотно в некотором шаре $B(f_0, r)$. Поскольку A_{k_0} замкнуто, то $B(f_0, r) \subset A_{k_0}$. Это означает, что

$$|f(x_n)| \le k_0 \quad \text{для всех } n \in \mathbb{N}, \text{ и всех } f \in B(f_0, r),$$

т.е. последовательность $\{x_n\}$ (как последовательность из L^{**}) ограничена на шаре $B(f_0, r)$. Иными словами, при $g = f - f_0$ получаем

$$|g(x_n)| = |\psi_{x_n}(g)| \le |\psi_{x_n}(g + f_0)| + |\psi_{x_n}(f_0)| \le 2k_0$$

для всех $n \in \mathbb{N}$, т.е. $|\psi_{x_n}(g)| \le 2k_0$ для всех $\|g\| \le r$ и всех $n \in \mathbb{N}$. Значит, используя предложение 2.7.3, мы заключаем, что $\|\psi_{x_n}\| = \|x_n\| \le 2k_0 r$ для всех $n \in \mathbb{N}$. □

Теорема 2.7.2. *Последовательность $\{x_n\}$ элементов нормированного пространства L сходится слабо к $x \in L$ в том и только том случае, когда*

1) $\{x_n\}$ ограничена;

2) $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ для всякого $f \in \Delta$, где Δ – некоторое подмножество L^*, такое что $\mathcal{L}(\Delta)$ плотна в L^*.

Доказательство. Необходимость следует из теоремы 2.7.1 при $\Delta = L^*$.

Достаточность. Из условия 2) следует, что если ϕ – (конечная) линейная комбинация элементов из Δ, то $\lim_{n\to\infty} \phi(x_n) = \phi(x)$. Пусть теперь ψ – произвольный элемент из L^*, а $\{\phi_k\} \subset \mathcal{L}(\Delta)$ – последовательность, сходящаяся к ψ. Покажем, что $\lim_{n\to\infty} \psi(x_n) = \psi(x)$. Так как $\lim_{k\to\infty} \phi_k = \psi$, то для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $K \in \mathbb{N}$, что $\|\phi_k - \psi\| < \varepsilon$ для всех $k \ge K$. Поэтому

$$|\psi(x_n) - \psi(x)| \le |\psi(x_n) - \phi_k(x_n)| + |\phi_k(x_n) - \phi_k(x)| + |\phi_k(x) - \psi(x)|$$

$$\|\psi - \phi_k\|\|x_n\| + |\phi_k(x_n) - \phi_k(x)| + \|\psi - \phi_k\|\|x\| \le$$

$$C\varepsilon + |\phi_k(x_n) - \phi_k(x)| + C\varepsilon.$$

Но, по условию, $\lim\limits_{n\to\infty} |\phi_k(x_n) - \phi_k(x)| = 0$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} |\psi(x_n) - \psi(x)| = 0$$

для всякого $\psi \in L^*$. □

Пример 2.7.5. В пространстве $\mathbb{R}^n_p$ ($n \ge 1$, $1 \le p < \infty$ слабая сходимость совпадает с сильной. На самом деле это справедливо для любого конечномерного нормированного пространства L. Действительно, пусть $\{e_k\}_{k=1}^n$ – какой-нибудь базис в пространстве L, которое мы можем отождествить с $\mathbb{R}^n$, а $\{g_k\}_{k=1}^n$ – базис в пространстве $L^* = \mathbb{R}^n$, ему двойственный (см. примеры 2.6.1 и 2.6.2). Тогда для всякой слабо сходящейся последовательности $\{x^{(k)}\}$ со слабым пределом x мы имеем

$$x^{(k)} = \sum_{j=1}^n c_j^{(k)} e_j, \quad x = \sum_{j=1}^n c_j e_j,$$

$$c_m = g_m(x) = \lim_{k\to\infty} g_m(x_k) =$$

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^n c_j^{(k)} g_m(e_j) = \lim_{k\to\infty} c_m^{(k)}.$$

Поэтому, используя неравенство треугольника для нормы, получаем

$$\lim_{k\to\infty} \|x^{(k)} - x\| \le \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^n |c_j^{(k)} - c_j|\|e_j\| =$$

$$\sum_{j=1}^n \|e_j\| \lim_{k\to\infty} |c_j^{(k)} - c_j| = 0,$$

т.е. последовательность $\{x^{(k)}\}$ сходится к x сильно (по норме).

Пример 2.7.6. В пространстве l_2 слабая сходимость не совпадает с сильной. Действительно, пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – какой-нибудь ортонормированный базис в пространстве l_2. Покажем, что последовательность $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится слабо к нулю.

По теореме 2.6.2 об общем виде непрерывного линейного функционала на полном евклидовом пространстве для всякого $f \in l_2$ существует такой элемент $a \in L$, что $f(x) = (x, a)$. Поскольку (e_k, a) суть коэффициенты Фурье элемента $a \in L$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |(e_k, a)|^2$ сходится, а значит,

$$\lim_{k\to\infty} (e_k, a) = \lim_{k\to\infty} f(e_k) = 0 = f(0)$$

для всякого $f \in l_2$.

С другой стороны, $\|e_k\| = 1$, а значит, эта последовательность не сходится к нулю сильно. Поскольку слабый и сильный пределы совпадают (когда оба существуют), то последовательность $\{e_k\}$ ни к какому пределу сильно не сходится.

2.7.3 $*$-слабая сходимость*

В пространстве, сопряженном к нормированному, мы получаем следующее определение.

Определение 2.7.3. Говорят, что последовательность $\{f_n\}$ в пространстве L^*, сопряженном к нормированному пространству L, сходится слабо к некоторому элементу f, если

$$\lim_{n\to\infty} F(f_n) = F(f) \text{ для всех } F \in L^{**}.$$

В этом пространстве можно ввести еще один вид сходимости.

Определение 2.7.4. Говорят, что последовательность $\{f_n\}$ в пространстве L^*, сопряженном к нормированному пространству L, сходится $*$-*слабо* к некоторому элементу f, если

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \text{ для всех } x \in L.$$

Поскольку $L \subset L^{**}$ (см. предложение 2.7.1), то всякая слабо сходящаяся последовательность в L^* является $*$-слабо сходящейся, а обратное, вообще говоря, неверно; для рефлексивных и конечномерных пространств эти два вида сходимости совпадают.

Доказательство следующих теорем проводится аналогично доказательству теорем 2.7.1 и 2.7.2 соответственно.

Теорема 2.7.3. *Если последовательность $\{f_n\}$ в пространстве L^*, сопряженном к банахову пространству L, сходится $*$-слабо, то она ограничена, т.е. существует такая постоянная $C > 0$, что $\|f_n\| \le C$ для всех $n \in \mathbb{N}$.*

Теорема 2.7.4. *Последовательность $\{f_n\}$ элементов пространства L^*, сопряженного к банахову пространству L, сходится $*$-слабо к $f \in L^*$ в том и только том случае, когда*

1) $\{f_n\}$ ограничена;

2) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ для всякого $x \in \Delta$, где Δ – некоторое подмножество L такое, что $\mathcal{L}(\Delta)$ плотна в L.

Теорема 2.7.5. *В любой ограниченной последовательности $\{f_n\}$ элементов пространства L^*, сопряженного к сепарабельному нормированному пространству L, существует $*$-слабо сходящаяся подпоследовательность.*

Доказательство. Выберем в L счетное всюду плотное множество $\{x_m\}$. Тогда числовая последовательность $\{f_n(x_1)\}$ ограничена. Поэтому из $\{f_n\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{f_n^{(1)}\}$

так, чтобы числовая последовательность $\{f_n^{(1)}(x_1)\}$ сходилась. Далее, из $\{f_n^{(1)}\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{f_n^{(2)}\}$ так, чтобы числовая последовательность $\{f_n^{(2)}(x_2)\}$ сходилась. Продолжая этот процесс, получим такую систему последовательностей $\{f_n^{(k)}\}$ (каждая из которых содержится в предыдущей), что $\{f_n^{(k)}\}$ сходится в точках $x_1, \dots, x_k$. Тогда, взяв "диагональную" последовательность $\{f_k^{(k)}\}$, мы получим такую последовательность из L^*, что числовая последовательность $\{f_k^{(k)}(x_n)\}$ сходится для всех $n \in \mathbb{N}$. В силу теоремы 2.7.4, последовательность $\{f_k^{(k)}(x)\}$ сходится для всех $x \in L$. $\square$

Следствие 2.7.1. (Принцип слабой компактности) *Для любой ограниченной последовательности $\{x_n\}$ элементов полного сепарабельного евклидова пространства L существует слабо сходящаяся подпоследовательность.*

Доказательство. Так как все евклидовы пространства рефлексивны, то утверждение следствия немедленно вытекает из теоремы 2.7.5. $\square$

2.8 Лекция 15

2.8.1 Обобщенные функции

Рассмотрим один поучительный пример. Сейчас мы построим линейное (не нормируемое, не метризуемое!) пространство, где "сходимость" элементов также описывается в некотором слабом смысле. Кроме того, элементы данного пространства существенно увеличивают запас "функций", являющихся решениями дифференциальных и интегральных уравнений. Этот объект называется *пространством обобщенных функций* и интенсивно используется в математике и физике.

Определение 2.8.1. Будем говорить, что функция $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *финитна* на $\mathbb{R}$, если найдется такой отрезок $[a, b] \subset \mathbb{R}$, что $\phi(x) = 0$ для всех $x \notin [a, b]$. *Носителем функции* ϕ назовем пересечение всех таких отрезков; мы обозначим его $\operatorname{supp} \phi$. Множество всех финитных бесконечно дифференцируемых функций на числовой оси обозначим через $C_0^\infty(\mathbb{R})$. Иногда это пространство называют пространством *пробных* функций или пространством *основных* функций.

Пространство $C_0^\infty(\mathbb{R})$ отлично от нулевого.

Пример 2.8.1. Пусть $a > 0$. Функция

$$\phi(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geq a; \\ e^{-1/(a^2-x^2)}, & |x| < a. \end{cases}$$

принадлежит $C_0^\infty(\mathbb{R})$, а ее носитель совпадает с $[-a, a]$. В самом деле, поскольку $\phi(x) \in C^\infty(-a, a)$ и

$$\lim_{x \to a-} \phi(x) = 0, \quad \lim_{x \to -a+} \phi(x) = 0,$$

то функция ϕ непрерывна на всей числовой оси.

Далее, легко убедиться, что

$$\lim_{x\to a-}\frac{d^k\phi}{dx^k}(x)=0,\quad \lim_{x\to -a+}\frac{d^k\phi}{dx^k}(x)=0$$

для всех $k\in\mathbb{N}$.

Докажем теперь, что $\phi\in C^\infty(\mathbb{R})$. Для этого достаточно проверить, что все производные функции ϕ в точках $\pm a$ существуют и равны нулю. Легко увидеть, что

$$\phi'_+(a)=0,\quad \phi'_-(a)=\lim_{x\to a+}\frac{e^{-1/(a^2-x^2)}}{x-a}=0,$$

а значит, $\phi'(a)=0$, и, аналогично, $\phi'(-a)=0$. В частности, функция ϕ' непрерывна на всей числовой оси. Доказательство завершается индукцией по порядку производной функции ϕ.

По построению, пространство $C_0^\infty(\mathbb{R})$ линейно над полем $\mathbb{R}$.

Определение 2.8.2. Последовательность финитных бесконечно дифференцируемых функций $\{\phi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ называется сходящейся в $C_0^\infty(\mathbb{R})$, если найдутся такие функция $\phi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ и отрезок $[a,b]\subset\mathbb{R}$, что

1) $\operatorname{supp}\phi_j\subset[a,b]$ для всех $j\in\mathbb{N}$;

2) $\operatorname{supp}\phi\subset[a,b]$;

3) последовательности $\{\frac{d^k\phi_j}{dx^k}\}_{j\in\mathbb{N}}$ сходятся к $\frac{d^k\phi}{dx^k}$ в пространстве $C[a,b]$ для всех $k\in\mathbb{Z}_+$.

Определим теперь пространство, сопряженное к $C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Определение 2.8.3. Функционал $f : C_0^\infty(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ называется *непрерывным,* если числовая последовательность $\{f(\phi_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$

сходится к $f(\phi)$ в случае, когда последовательность финитных бесконечно дифференцируемых функций $\{\phi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ сходится в $C_0^\infty(\mathbb{R})$ к элементу ϕ.

Множество всех непрерывных линейных функционалов на $C_0^\infty(\mathbb{R})$ обозначим через $(C_0^\infty(\mathbb{R}))'$. Элементы этого множества называются *обобщенными* функциями или *распределениями*.

Пример 2.8.2. Всякая функция g, модуль которой интегрируем (по Риману или по Лебегу) на любых измеримых ограниченных подмножествах $\mathbb{R}$, может быть отождествлена с некоторым элементом $(C_0^\infty(\mathbb{R}))'$. Более точно, определим функционал f следующим образом:

$$f(\phi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(t)\phi(t)\,dt, \quad \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

Данный интеграл существует для всякого $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, поскольку носитель ϕ лежит в некотором отрезке $[a, b]$, а значит,

$$|f(\phi)| \le \max_{a\le t\le b} |\phi(t)| \int\limits_a^b |g(t)|\,dt < \infty.$$

Это неравенство обеспечивает также и непрерывность функционала f, так как

$$|f(\phi_j) - f(\phi)| \le \max_{a\le t\le b} |\phi_j(t) - \phi(t)| \int\limits_a^b |g(t)|\,dt \to 0, \quad j \to \infty,$$

если только $\{\phi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ сходится к ϕ в $C_0^\infty(\mathbb{R})$ при $j \to \infty$.

Элементы $(C_0^\infty(\mathbb{R}))'$, порожденные интегрируемыми функциями, называются *регулярными* обобщенными функциями. Все остальные распределения называются *сингулярными*.

Пример 2.8.3. Типичным примером сингулярной обобщенной функции служит так называемая "дельта-функция":

$$\delta(\phi) = \phi(0), \quad \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

Линейность и непрерывность этого функционала очевидны.

Справедливости ради, нужно сказать, что физики начали использовать данную "функцию" раньше математиков. Именно, они ввели в рассмотрение следующий объект:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & x \neq 0; \\ +\infty, & x = 0, \end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, dt = 1,$$

не заботясь о его формальном обосновании (как, например, понимать интеграл?).

Пример 2.8.4. Для $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ рассмотрим следующий интеграл

$$P(\phi) = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\phi(t)}{t}\, dt$$

(понимаемый в смысле главного значения). Этот интеграл также задает обобщенную функцию.

Отметим, что, как и в случае пространств, сопряженных к нормированным, множество $(C_0^\infty(\mathbb{R}))'$ является линейным многообразием над полем $\mathbb{R}$ со стандартными операциями сложения и умножения на скаляр:

$$(f_1 + f_2)(\phi) := f_1(\phi) + f_2(\phi),$$

$$(\alpha f)(\phi) := \alpha f(\phi), \qquad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

Более того, так как $\psi \cdot \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ для всех $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ и $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$, то легко ввести операцию умножения распределений на бесконечно дифференцируемую функцию:

$$(\psi f)(\phi) := f(\psi\phi), \qquad \psi \in C^\infty(\mathbb{R}), \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

Эта операция согласована со стандартной операцией умножения интегрируемых функций на бесконечно дифференцируемую функцию:

$$(\psi g)(t) = \psi(t)g(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

К сожалению, нельзя ввести операции умножения распределений, по крайней мере, с одновременным сохранением важных свойств этой операции: коммутативности и ассоциативности. В самом деле,

$$(t \cdot \delta)(\phi) = \delta(t\phi) = 0,$$

$$(tP)(\phi) = P(t \cdot \phi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{t\phi(t)}{t}\,dt = 1(\phi),$$

и, если операция умножения распределений коммутативна и ассоциативна,

$$0 = ((t \cdot \delta) \cdot P)(\phi) = (\delta(t \cdot P))(\phi) = \delta(\phi) = \phi(0)$$

для всех $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, что, очевидно, невозможно.

Таким образом, в отличие, например, от пространства $C^\infty(\mathbb{R})$, множество $(C_0^\infty(\mathbb{R}))'$ не является кольцом.

2.8.2 Производная обобщенной функции

Как мы видели выше, даже решение алгебраических уравнений невозможно, если выбранное пространство слишком мало. Аналогичная ситуация имеет место и в анализе – класс дифференцируемых функций зачастую слишком мал для решения дифференциальных уравнений, а непрерывные, интегрируемые и т.д. функции нельзя дифференцировать, по крайней мере, в обычном смысле.

Мы обобщим понятие производной таким образом, чтобы всякая обобщенная функция имела (обобщенную) производную, также являющуюся распределением.

Определение 2.8.4. Для $f \in (C_0^\infty(\mathbb{R}))'$ определим функционал

$$f'(\phi) = -f(\phi'), \quad \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}),$$

который будем называть (обобщенной) производной для f.

Линейность этого функционала очевидна, а его непрерывность следует из равенства

$$f'(\phi) - f'(\phi_j) = -f(\phi') + f(\phi_j')$$

и определения сходимости в пространстве $C_0^\infty(\mathbb{R})$. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 2.8.1. *Для любой обобщенной функции f и любого $k \in \mathbb{N}$ существует производная $f^{(k)} \in (C_0^\infty(\mathbb{R}))'$ порядка k: определим функционал*

$$f^{(k)}(\phi) = (-1)^k f(\phi(k)), \quad \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

Пример 2.8.5. Как известно, функция $f(t) = |t|$ не имеет (обычной) производной в начале координат. Однако она имеет обобщенную производную:

$$|t|' = \mathbf{sign}(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

В самом деле, так как эта функция локально интегрируема на $\mathbb{R}$, то

$$f(\phi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |t|\phi(t)\,dt,$$

$$f'(\phi) =: -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |t|\phi'(t),dt, \quad \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

Наконец, интегрируя по частям, получаем

$$-\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |t|\phi'(t)\,dt = \int\limits_{-\infty}^{0} t\phi'(t),dt - \int\limits_{0}^{+\infty} t\phi'(t)\,dt =$$

$$-\int\limits_{-\infty}^{0} \phi(t)\,dt + \int\limits_{0}^{+\infty} \phi(t)\,dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{sign}(t)\phi(t)\,dt =$$

$$(\mathrm{sign}(t))(\phi),$$

так как функция $\mathrm{sign}(t)$ является локально интегрируемой.

Пример 2.8.6. Функция $\mathrm{sign}(t)$ не является уже даже непрерывной. Тем не менее, она имеет обобщенную производную:

$$(\mathrm{sign}(t))' = 2\delta.$$

В самом деле, так как функция $\mathrm{sign}(t)$ локально интегрируема, то

$$(\mathrm{sign}(t))'(\phi) = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{sign}(t)\phi'(t)\,dt =$$

$$-\int\limits_{-\infty}^{0} \phi(t)\,dt + \int\limits_{-\infty}^{0} \phi'(t)\,dt - \int\limits_{0}^{+\infty} \phi'(t)\,dt = 2\phi(0).$$

Учитывая, что каждая обобщенная функция имеет также и первообразную в классе распределений (см., например, [1]), то пространство $(C_0^\infty(\mathbb{R}))'$, а также его многомерные аналоги, очень хорошо приспособлены для решения дифференциальных (и интегральных) уравнений.

2.9 Лекция 16

2.9.1 Дифференциальные уравнения в классе обобщенных функций

Дифференциальные уравнения – одна из основных областей, где применяется теория обобщенных функций. Именно задачи, связанные с уравнениями, в значительной мере и стимулировали развитие этой теории. В основном она применяется к уравнениям в частных производных, которые мы здесь не рассматриваем. Однако мы коснемся здесь некоторых простейших вопросов, относящихся к решению обыкновенных дифференциальных уравнений с обобщенными функциями. Начнем с простейшего уравнения вида

$$y' = f(x),$$

где $f(x)$ – обобщенная функция, то есть с задачи о восстановлении функции по ее производной. Начнем со случая $f(x) \equiv 0.$

Теорема 2.9.1. *Только константы служат решениями (в классе обобщенных функций) уравнения*

$$y' = 0. \tag{2.9.1}$$

Доказательство. Уравнение (2.9.1) означает, что

$$(y', \varphi) = (y, -\varphi') = 0 \tag{2.9.2}$$

для любой основной функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Рассмотрим совокупность $K^{(1)}$ тех основных функций, каждая из которых может быть представлена как производная какой-то основной функции. Очевидно, что $K^{(1)}$ есть линейное подпространство в $C_0^\infty(\mathbb{R})$. Положим

$\varphi_1(x) = -\varphi'(x)$; функция φ_1 пробегает $K^{(1)}$, когда φ пробегает $C_0^\infty(\mathbb{R})$. Равенство (2.9.2) определяет функционал y на $K^{(1)}$.

Заметим теперь, что основная функция φ принадлежит $K^{(1)}$ в том и только том случае, если

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, dx = 0, \tag{2.9.3}$$

то есть $K^{(1)}$ – ядро функционала $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, dx$. Действительно, если $\varphi(x) = \psi'(x)$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, dx = \psi(x)\Big|_{\infty}^{\infty} = 0. \tag{2.9.4}$$

Обратно, выражение

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t) dt \tag{2.9.5}$$

есть бесконечно дифференцируемая функция. Если (2.9.3) выполнено, то $\psi(x)$ – финитная функция. Ее производная равна $\varphi(x)$. Любую основную функцию $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ можно представить в виде

$$\varphi = \varphi_1 + c\varphi_0 \quad (\varphi_1 \in K^{(1)}),$$

где φ_0 – фиксированная основная функция, не принадлежащая $K^{(1)}$ и удовлетворяющая условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(x)\, dx = 1.$$

Для этого достаточно положить

$$c = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, dx \quad \text{и} \quad \varphi_1(x) = \varphi(x) - c\varphi_0(x).$$

Таким образом, если задать значение функционала y на основной функции $\varphi_0(x)$, то тем самым он будет однозначно определен на всем $C_0^\infty(\mathbb{R})$. Положив $(y, \varphi_0) = \alpha$, получим

$$(y, \varphi) = (y, \varphi_1) + c(y, \varphi_0) = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha\varphi(x)\,dx,$$

то есть обобщенная функция y есть постоянная α, что и требовалось доказать. □

Отсюда следует, что если для двух обобщенных функций f и g выполнено равенство $f' = g'$, то $f - g = \mathrm{const}$.

Рассмотрим теперь уравнение

$$y' = f(x), \tag{2.9.6}$$

где $f(x)$ – произвольная обобщенная функция.

Теорема 2.9.2. *Уравнение (2.9.6) при каждом $f \in (C_0^\infty(\mathbb{R}))'$ имеет решение, принадлежащее $(C_0^\infty(\mathbb{R}))'$.*

Это решение естественно назвать первообразной обобщенной функции f.

Доказательство. Уравнение (2.9.6) означает, что

$$(y', \varphi) = (y, -\varphi') = (f, \varphi) \tag{2.9.7}$$

для любой основной функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Это равенство определяет значение функционала y на всех основных функциях φ_1 из $K^{(1)}$:

$$(y, \varphi_1) = \left(f, -\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(\xi) d\xi \right).$$

Используем теперь полученное выше представление

$$\varphi = \varphi_1 + c\varphi_0$$

элементов из $C_0^\infty(\mathbb{R})$. Положив $(y, \varphi_0) = 0$, мы доопределим тем самым функционал y на всем $C_0^\infty(\mathbb{R})$; именно,

$$(y, \varphi) = (y, \varphi_1) = \left(f, -\int\limits_{-\infty}^{x} \varphi_1(\xi) d\xi \right).$$

Этот функционал, как легко проверить, линеен и непрерывен. Кроме того, он удовлетворяет уравнению (2.9.6). Действительно, для всякого $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$

$$(y', \varphi) = (y, -\varphi') = \left(f, \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi'(\xi) d\xi \right) = (f, \varphi).$$

Итак, для каждой обобщенной функции $f(x)$ существует решение уравнения

$$y' = f(x),$$

то есть каждая обобщенная функция имеет первообразную. В силу теоремы 2.9.1 эта первообразная определяется функцией $f(x)$ однозначно с точностью до постоянного слагаемого. $\square$

Полученные результаты легко переносятся на системы линейных уравнений. Ограничимся здесь соответствующими формулировками, опуская доказательства.

Рассмотрим однородную систему n линейных дифференциальных уравнений с n неизвестными функциями

$$y_i' = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x) y_k, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{2.9.8}$$

где a_{ik} – бесконечно дифференцируемые функции. Такая система имеет некоторое количество "классических" решений (т. е. решений, представляющих собой "обычные", причем бесконечно дифференцируемые функции). Можно показать, что никаких новых решений в классе обобщенных функций система (2.9.8) не имеет.

Для неоднородной системы вида

$$y_i' = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x) y_k + f_i, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{2.9.9}$$

где f_i – обобщенные, а a_{ik} – "обычные" бесконечно дифференцируемые функции, решение существует в классе обобщенных функций и определяется с точностью до произвольного решения однородной системы (2.9.8).

Если в системе (2.9.9) не только a_{ik}, но и f_i – "обычные" функции, то все решения этой системы, существующие в $(C_0^\infty(\mathbb{R}))'$, также оказываются обычными функциями.

Выше мы рассматривали обобщенные функции одного действительного переменного, то есть обобщенные функции на прямой. Можно на основе тех же идей ввести обобщенные функции на ограниченном множестве, скажем, на отрезке или окружности, обобщенные функции нескольких переменных, обобщенные функции комплексного аргумента и т. д. Наконец, и для обобщенных функций на прямой то определение, которое было дано выше, – далеко не единственно возможное. В следующей лекции мы вкратце рассмотрим обобщенные функции нескольких вещественных переменных.

2.10 Лекция 17

2.10.1 Обобщенные функции нескольких переменных

Рассмотрим в n-мерном пространстве совокупность $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ функций $\varphi(x_1, \dots, x_n)$, имеющих частные производные всех порядков по всем аргументам и таких, что каждая из этих функций равна нулю вне некоторого параллелепипеда

$$a_i \le x_i \le b_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Эта совокупность представляет собой линейное пространство (с обычными операциями сложения функций и умножения их на числа), в котором можно ввести сходимость следующим образом: $\varphi_k \to \varphi$, если существует такой параллелепипед $a_i \le x_i \le b_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, вне которого каждая из функций φ_k равна нулю, а в этом параллелепипеде имеет место равномерная сходимость:

$$\frac{\partial^r \varphi_k}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \to \frac{\partial^r \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \quad \left(\sum \alpha_i = r\right),$$

для каждого фиксированного набора целых неотрицательных чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Обобщенной функцией n переменных называется любой непрерывный линейный функционал на $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Всякая "обычная" функция n переменных $f(x)$, интегрируемая в любой ограниченной области n-мерного пространства, есть в то же время и обобщенная функция. Значения отвечающего ей функционала определяются формулой

$$(f, \varphi) = \int f(x)\varphi(x)\, dx,$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$, $dx = dx_1 \dots dx_n$. Как и в случае $n = 1$ различные непрерывные функции определяют различные функционалы (то есть представляют собой различные обобщенные функции).

Для обобщенных функций n переменных понятия предельного перехода, производной и т. д. вводятся с помощью тех же методов, что и в случае одного переменного. Например, частные производные обобщенной функции вводятся формулой

$$\left(\frac{\partial^r f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}, \varphi(x)\right) = (-1)^r\left(f(x), \frac{\partial^r \varphi(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}\right).$$

Отсюда видно, что каждая обобщенная функция n переменных имеет частные производные всех порядков.

2.10.2 Свертка обобщенных функций

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – локально интегрируемые функции в $\mathbb{R}^n$, причем функция

$$h(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |g(y)f(x-y)|\,dy$$

также локально интегрируема в $\mathbb{R}^n$. *Сверткой* $f*g$ этих функций называется функция

(2.10.1)

$$f*g(x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\,dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(y)f(x-y)\,dy = (g*f)(x).$$

Отметим, что свертки $f*g$ и $|f|*|g| = h$ существуют одновременно и удовлетворяют неравенству $|(f*g)(x)| \le h(x)$ (при почти всех x), так что свертка $f*g$ оказывается также локально интегрируемой функцией в $\mathbb{R}^n$. Поэтому она определяет (регулярную) обобщенную функцию, действующую на основные функции $\varphi \in (C_0^\infty(\mathbb{R}^n))'$ по правилу:

$$(f*g, \varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} (f*g)(\xi)\varphi(\xi)\,d\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} g(y)f(\xi-y)\,dy\right)\varphi(\xi)\,d\xi =$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} g(y)\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\xi-y)\varphi(\xi)\,d\xi\right)\,dy=\int\limits_{\mathbb{R}^n} g(y)\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x+y)\,dx\right)\,dy$$

(в силу теоремы Фубини), то есть
(2.10.2)

$$(f*g,\varphi)=\int\limits_{\mathbb{R}^{2n}} f(x)g(y)\varphi(x+y)\,dx\,dy,\quad \varphi\in(C_0^\infty(\mathbb{R}^n))'.$$

Отметим три случая, когда условие локальной интегрируемости функции $h(x)$ выполнено и, стало быть, свертка $f*g$ существует и определяется формулой (2.10.1).

1) Одна из функций f или g финитна, например $\operatorname{supp} g\subset U_{R_1}$:

$$\int\limits_{U_R} h(x),\ dx=\int\limits_{U_{R_1}}|g(y)|\int\limits_{U_R}|f(x-y)|\,dx\,dy\le$$

$$\int\limits_{U_{R_1}}|g(y)|\,dy\int\limits_{U_{R+R_1}}|f(\xi)|\,d\xi<\infty.$$

2) При $n=1$ функции f и g обращаются в нуль для всех $x<0:$

$$\int\limits_{-R}^{R} h(x)\,dx=\int\limits_{0}^{R}\int\limits_{0}^{x}|g(y)|\,|f(x-y)|\,dy\,dx=$$

$$\int\limits_{0}^{R}|g(y)|\int\limits_{y}^{R}|f(x-y)|\,dx\,dy\le\int\limits_{0}^{R}|g(y)|\,dy\int\limits_{0}^{R}|f(\xi)|\,d\xi<\infty.$$

3) Функции f и g интегрируемы на $\mathbb{R}^n$:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} h(x)\,dx=\int\limits_{\mathbb{R}^n}|g(y)|\int\limits_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)|\,dx\,dy=$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |g(y)|\,dy \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(\xi)|\,d\xi < \infty,$$

так что в этом случае свертка $f * g$ интегрируема на $\mathbb{R}^n$.

Докажем, что равенство (2.10.2) можно переписать в виде (2.10.3)

$$(f*g, \varphi) = \lim_{k\to\infty} (f(x)g(y), \eta_k(x,y)\varphi(x+y)), \quad \varphi \in (C_0^\infty(\mathbb{R}^n))',$$

где $\{\eta_k(x,y)\}_{k=1}^\infty$ – любая последовательность, сходящаяся к 1 в $\mathbb{R}^{2n}$. Действительно, по доказанному функция

$$c_0|f(x)g(y)\varphi(x+y)|$$

интегрируема на $\mathbb{R}^{2n}$ и

$$|f(x)g(y)\eta_k(x,y)\varphi(x+y)| \le c_0|f(x)g(y)\varphi(x+y)|, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Далее,

$$f(x)g(y)\eta_k(x,y)\varphi(x+y) \to f(x)g(y)\varphi(x+y), \quad k \to \infty$$

почти везде в $\mathbb{R}^{2n}$. Применяя теорему Лебега о переходе к пределу под знаком интеграла, получаем равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)g(y)\varphi(x+y)\,dx\,dy = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)g(y)\eta_k(x,y)\varphi(x+y)\,dx\,dy,$$

что, в силу (2.10.2), эквивалентно равенству (2.10.3).

Исходя из равенств (2.10.2) и (2.10.3), примем следующее определение свертки обобщенных функций. Пусть пара обобщенных функций f и g из $(C_0^\infty(\mathbb{R}^n))'$ такова, что их прямое произведение $f(x)\cdot g(y)$ допускает продолжение $(f(x)\cdot g(y), \varphi(x+y))$ на функции вида $\varphi(x+y)$, где φ – любая функция из $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, в следующем смысле: какова бы ни была последовательность $\{\eta_k\}$ функций из $C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, сходящаяся к 1 в $\mathbb{R}^{2n}$, существует предел числовой последовательности

$$\lim_{k\to\infty} (f(x)\cdot g(y), \eta_k(x,y)\varphi(x+y)) = (f(x)\cdot g(y), \varphi(x+y))$$

и этот предел не зависит от последовательности $\{\eta_k\}$.

Отметим, что при каждом k функция $\eta_k(x,y)\varphi(x+y)$ принадлежит $C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, так что наша числовая последовательность определена.

Определение 2.10.1. *Сверткой* $f * g$ называется функционал

$$(f * g, \varphi) = (f(x)\cdot g(y), \varphi(x+y)) =$$

$$\lim_{k\to\infty}(f(x)\cdot g(y), \eta_k(x,y)\varphi(x+y)), \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{2.10.4}$$

Можно показать, что функционал $f * g$ принадлежит $(C_0^\infty(\mathbb{R}^n))'$, то есть является обобщенной функцией.

Пример 2.10.1. Свертка любой обобщенной функции f с δ-функцией существует и равна

$$f * \delta = \delta * f = f.$$

Действительно, пусть $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ и η_k – любая последовательность функций из $C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, сходящаяся к 1 в $\mathbb{R}^{2n}$. Тогда $\eta_k(x,0)\varphi(x) \to \varphi(x)$, $k\to\infty$ в $C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, и поэтому

$$\lim_{k\to\infty}(f(x)\cdot\delta(y), \eta_k(x,y)\varphi(x+y)) = \lim_{k\to\infty} f(x), \eta_k(x,0)\varphi(x) = (f,\varphi).$$

Отсюда, в силу определения (2.10.4), следует, что свертки $f * \delta$ и $\delta * f$ существуют и равны f, что и утверждалось.

Глава 3

Раздел III: Линейные операторы в пространствах Банаха

3.1 Лекция 18

3.1.1 Линейные операторы: основные определения

В настоящем разделе мы перейдем к изучению линейных *операторных* уравнений в пространствах Банаха. Поэтому нам придется сначала изучить свойства линейных отображений в этих пространствах.

Определение 3.1.1. Пусть X и Y – линейные пространства над полем $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$). Отображение $A : X \to Y$ называется *линейным оператором,* если $A(ax + by) = aAx + bAy$ для всех $x, y \in D(A)$ и всех $a \in \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), где $D(A)$ – это совокупность тех $x \in X$, для которых отображение A определено (т.е. область определения оператора). Множество тех $y \in Y$, для которых $y = Ax$ при некотором $x \in D(A)$, называется *образом* оператора и обозначается $R(A)$.

Вообще говоря, не предполагается, что $D(A) = X$, однако необходимо, чтобы $D(A)$ было линейным подмногообразием в X. Ясно, что всякий линейный функционал является линейным оператором (для $\boldsymbol{Y} = \mathbb{R}$).

Определение 3.1.2. Пусть $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$ – нормированные пространства с нормами $\|\cdot\|_X$ и $\|\cdot\|_Y$ соответственно. Оператор $\boldsymbol{A} : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ называется *непрерывным в точке* $\boldsymbol{x_0} \in \boldsymbol{D(A)}$, если для всякого $\boldsymbol{\varepsilon} > \boldsymbol{0}$ существует такое $\boldsymbol{\delta} > \boldsymbol{0}$, что для всех $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D(A)}$, удовлетворяющих $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}\|_X < \boldsymbol{\delta}$, выполняется неравенство $\|\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{Ax_0}\|_Y < \boldsymbol{\varepsilon}$. Оператор $\boldsymbol{A}$ назовем *непрерывным,* если он непрерывен в каждой точке $\boldsymbol{D(A)}$.

Предложение 3.1.1. *Если линейный оператор $\boldsymbol{A}$ непрерывен в какой-либо точке $\boldsymbol{x_0} \in \mathbb{X}$, то он непрерывен всюду на $\boldsymbol{D(A)}$.*

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{A}$ непрерывен в точке $\boldsymbol{x_0} \in \boldsymbol{X}$. Тогда для всякого $\boldsymbol{\varepsilon} > \boldsymbol{0}$ существует такое $\boldsymbol{\delta} > \boldsymbol{0}$, что для всех $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D(A)}$, удовлетворяющих $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}\|_X < \boldsymbol{\delta}$, выполняется неравенство

$$\|\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{Ax_0}\|_Y = \|\boldsymbol{A(x - x_0)}\|_Y < \boldsymbol{\varepsilon},$$

или, иными словами, для всех $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{D(A)}$, удовлетворяющих $\|\boldsymbol{y}\|_X < \boldsymbol{\delta}$, выполняется неравенство $\|\boldsymbol{Ay}\|_X < \boldsymbol{\varepsilon}$.

Если $\boldsymbol{y_0}$ – произвольная точка $\boldsymbol{D(A)}$, и $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y_0}\|_X < \boldsymbol{\delta}$, то мы заключаем, что

$$\|\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{Ay_0}\|_Y = \|\boldsymbol{A(x - y_0)}\|_Y < \boldsymbol{\varepsilon}.$$

Предложение доказано. □

Оказывается, что очень важное значение для изучения операторных уравнений имеет множество нулей отображения $\boldsymbol{A}$.

Определение 3.1.3. *Ядром* оператора $\boldsymbol{A} : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ называется подмножество $\ker A$ элементов x пространства $\mathbb{X}$ таких, что $Ax = 0$.

Предложение 3.1.2. *Пусть A – линейный непрерывный оператор, тогда $\ker A$ и $R(A)$ являются линейными многообразиями в Y. Если $D(A) = X$, то $\ker A$ является подпространством пространства $\mathbb{X}$.*

Доказательство. В силу линейности оператора,

$$A(ax + by) = aAx + bAy = 0 + 0 = 0$$

для всех $x, y \in \ker A$. Поэтому $\ker A$ – линейное многообразие в $\mathbb{X}$.

Если $D(A) = X$ и $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, то по непрерывности $Ax = \lim_{n\to\infty} Ax_n = 0$, т.е. $x \in \ker A$. Следовательно, $\ker A$ замкнуто.

Наконец, если $y_1, y_2 \in R(A)$, то $ay_1 + by_2 = A(ax_1 + bx_2)$, где $Ax_1 = y_1$, $Ax_2 = y_2$, т.е. $(ay_1 + by_2) \in R(A)$. □

Образ линейного непрерывного оператора, в отличие от ядра, вообще говоря, не замкнут (примеры мы приведем позднее).

Пример 3.1.1. Пусть $\mathbb{X} = \mathbb{Y}$. Положим $Ix = x$ для всех $x \in X$. Такой оператор называется единичным; $D(A) = X$, $\ker A = 0$, $R(A) = Y$. Очевидно, он непрерывный.

Пример 3.1.2. Положим $Ox = 0 \in Y$ для всех $x \in X$. Такой оператор называется нулевым; $D(A) = X$, $\ker A = X$, $R(A) = \{0\}$. Очевидно, он непрерывный.

Определение 3.1.4. Оператор A называется *ограниченным,* если он определен на всем пространстве $\mathbb{X}$ и переводит каждое ограниченное множество в ограниченное.

Предложение 3.1.3. *Линейный оператор A в нормированном пространстве является ограниченным в том и только том случае, когда существует такая постоянная $C > 0$, что*

$$\|Ax\|_Y \leq C\|x\|_X \text{ для всех } x \in X. \tag{3.1.1}$$

Доказательство. Пусть для всех $x \in X$ верно неравенство (3.1.1). Если множество $M \subset X$ ограничено, то оно содержится в некотором шаре $B(x_0, r)$. Тогда для всех $x \in M$ мы имеем

$$\|x\|_X \leq \|x - x_0\|_X + \|x_0\|_X \leq r + \|x_0\|_X,$$

Следовательно,

$$\|Ax\|_Y \leq C\|x\|_X \leq C\left(r + \|x_0\|_X\right),$$

для всех $x \in M$, т.е. $A(M) \subset B(0, C(r + \|x_0\|_X))$, а значит, это множество ограничено. Итак, оператор A ограничен.

Если оператор A ограничен, то он, в частности, переводит единичный шар в ограниченное множество, т.е. существует такая постоянная $C > 0$, что $\|Ax\|_Y \leq C$ для всех $\|x\| \leq 1$. Пусть $x \neq 0$. Тогда $\|A\frac{x}{\|x\|_X}\|_Y \leq C$, а значит, в силу линейности верно неравенство (3.1.1). При $x = 0$ неравенство (3.1.1) очевидно. □

Теорема 3.1.1. *Пусть $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$ – нормированные пространства. Тогда, для того, чтобы линейный оператор был непрерывным на $\mathbb{X}$, необходимо и достаточно, чтобы он был ограничен.*

Доказательство. Пусть $A : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ – линейный ограниченный оператор. Докажем, что он непрерывен в нуле.

Согласно предложению 3.1.3 существует такая постоянная $C > 0$, что $\|Ax\|_Y \leq C\|x\|_X$ для всех $x \in X$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ положим $\delta = \varepsilon/C$. Тогда для всех $x \in X$, удовлетворяющих $\|x\|_X < \delta$, выполняется неравенство

$$\|Ax - A0\|_Y = \|Ax\|_Y \leq C\|x\|_X < \varepsilon.$$

Таким образом, A непрерывен в нуле, а значит, и на всем X (см. предложение 3.1.1).

Обратно, если линейный оператор A непрерывен, то для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $x \in X$, удовлетворяющих $\|x\|_X < \delta$, выполняется неравенство

$$\|Ax - A0\|_Y = \|Ax\|_Y < \varepsilon.$$

Если $x \neq 0$, то $\left\|\frac{x\delta}{2\|x\|_X}\right\|_X < \delta$ и

$$\|Ax\|_Y = \frac{2\|x\|}{\delta}\left\|A\frac{x\delta}{2\|x\|_X}\right\|_Y < \frac{2\|x\|_X}{\delta}\varepsilon.$$

По предложению 3.1.3 оператор A ограничен. □

Пример 3.1.3. Пусть H – евклидово пространство, а H_1 – его подпространство. Как мы видели в разделе 2, $H = H_1 \oplus H_1^{\perp}$, то есть всякий элемент $x \in H$ представим (единственным образом) в виде $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in H_1$, а $x_2 \in H_1^{\perp}$. Положим $\pi(H_1)x = x_1$. Такой оператор $A = \pi(H_1)$ называется оператором ортогонального проектирования на подпространство H_1. Ясно, что он линеен, а $D(A) = X$, $\ker A = H_1^{\perp}$, $R(A) = H_1$. Он является ограниченным, поскольку, в силу ортогональности,

$$\|x\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 \geq \|x_1\|^2.$$

Пример 3.1.4. Пусть $\mathbb{X} = C^1[a, b]$, $\mathbb{Y} = C[a, b]$, $x(t)$ –

фиксированная непрерывно дифференцируемая функция на $[a, b]$, а $Ax(t) = \frac{dx}{dt}$. Покажем, что это непрерывный линейный оператор на $C[a, b]$. Линейность следует из линейности дифференциала, а ограниченность вытекает из неравенства:

$$\|Ax\|_Y = \max_{t\in[a,b]}\left|\frac{dx}{dt}(t)\right| \leq \max_{t\in[a,b]}\left|\frac{dx}{dt}(t)\right| + \max_{t\in[a,b]}|x(t)| = \|x\|_X.$$

Пример 3.1.5. Пусть $\mathbb{X} = C[a, b]$, $\mathbb{Y} = C[a, b]$, $D(A) = C^1[a, b] \neq X$, $x(t)$ – фиксированная непрерывно дифференцируемая функция на $[a, b]$, а $Ax(t) = \frac{dx}{dt}$. Покажем, что это не непрерывный линейный оператор на $C[a, b]$. Линейность следует из линейности дифференциала. Последовательность $x_n = \frac{\sin nt}{n}$ стремится к нулю в $C[a, b] = X$, поскольку $\|x_n\|_X \leq 1/n$. Очевидно, $Ax_n = \cos nt$ не стремится к нулю в $C[a, b]$.

Таким образом, "хорошее" поведение оператора означает согласованность всей "тройки" $(\mathbb{X}, \mathbb{Y}, A)$.

3.1.2 Норма оператора

Определение 3.1.5. Пусть A – ограниченный оператор на $\mathbb{X}$. Число

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_X\leq 1}\|Ax\|_Y \tag{3.1.2}$$

называется *нормой* оператора A.

Предложение 3.1.4. *Норма линейного оператора A обладает следующими свойствами:*

1) $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|_X=1}\|Ax\|_Y$;

2) $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|\neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}$;

3) $\|Ax\|_Y \leq \|A\|\|x\|_X$ *для всех* $x \in X$.

Доказательство. Свойство 1) справедливо, поскольку для всякого x_0, удовлетворяющего $\|x_0\|_X < 1$, существует x_1, удовлетворяющий $\|x_1\|_X = 1$ такой, что $\|Ax_0\|_Y \leq \|Ax_1\|_Y$. Предположим противное, т.е. существует элемент x_0, удовлетворяющий $\|x_0\|_X < 1$, такой, что для всякого x, удовлетворяющего $\|x\|_X = 1$, мы имеем: $\|Ax_0\|_Y > \|Ax\|_Y$. Тогда элемент $x_1 = x_0/\|x_0\|_X$ удовлетворяет $\|x_1\|_X = 1$, и

$$\|Ax_1\|_Y = \left\|\frac{1}{\|x_0\|_X} Ax_0\right\|_Y > \|Ax_0\|_Y,$$

что находится в противоречии с нашим предположением.

Свойство 2) сразу следует из равенства

$$\frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} = \left\|A\frac{x}{\|x\|_X}\right\|_Y.$$

Свойство 3) справедливо, так как при $x \neq 0$ элемент $x/\|x\|_X$ принадлежит единичному шару, а значит, по определению нормы мы имеем

$$\left\|A\frac{x}{\|x\|_X}\right\|_Y = \frac{|Ax|_Y}{\|x\|_X} \leq \|A\|.$$

Предложение доказано. □

Пример 3.1.6. Пусть A – линейный оператор, отображающий линейное пространство $\mathbb{R}^n$ с базисом $\{e_k\}_{k=1}^n$ в пространство $\mathbb{R}^m$ с базисом $\{f_j\}_{j=1}^m$. Если $x = \sum_{j=1}^n a_j e_j$, то $Ax = \sum_{j=1}^n a_j Ae_j$. Таким образом, оператор A задан, если известны его значения на базисных векторах. Поскольку $Ae_j = \sum_{k=1}^n a_{kj} f_k$, то оператор A задается матрицей (a_{kj}).

Рассмотрим ситуацию, когда $A : \mathbb{R}^n_\infty \to \mathbb{R}^m_\infty$. Тогда

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_\infty \le 1} \max_{1\le k\le m} \left|\sum_{j=1}^n x_j a_{kj}\right| \le \sup_{\|x\|_\infty \le 1} \max_{1\le j\le n} |x_j| \max_{1\le k\le m} \sum_{j=1}^n |a_{kj}| =$$

$$\sup_{\|x\|_\infty \le 1} \|x\|_1 \max_{1\le k\le m} \sum_{j=1}^n |a_{kj}| = \max_{1\le k\le m} \sum_{j=1}^n |a_{kj}|.$$

Пусть k_0 таково, что $\sum_{j=1}^n |a_{k_0 j}| = \max\limits_{1\le k\le m} \sum_{j=1}^n |a_{kj}|$, а

$$x_0 = (\mathrm{sign}(a_{k_0 1}), \ldots, \mathrm{sign}(a_{k_0 n})).$$

Тогда $\|x_0\|_\infty = 1$ и

$$\|Ax_0\|_\infty = \max_{1\le k\le m} \left|\sum_{j=1}^n \mathrm{sign}(a_{k_0 j}) a_{kj}\right| \ge \sum_{j=1}^n |a_{k_0 j}| = \max_{1\le k\le m} \sum_{j=1}^n |a_{kj}|,$$

т.е. $\|A\| \ge \max_{1\le k\le m} \sum_{j=1}^n |a_{kj}|$. Следовательно,

$$\|A\| = \max_{1\le k\le m} \sum_{j=1}^n |a_{kj}|.$$

3.2 Лекция 19

3.2.1 Пространство ограниченных линейных операторов

Определение 3.2.1. Пусть $\boldsymbol{A} : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ и $\boldsymbol{B} : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ линейные операторы. Их суммой называется оператор $\boldsymbol{Cx} = \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{Bx}$ ($\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D}(\boldsymbol{A}) \cap \boldsymbol{D}(\boldsymbol{B}) \subset \boldsymbol{X}$). Произведением оператора $\boldsymbol{A}$ на число $\boldsymbol{a}$ называется оператор $\boldsymbol{Dx} = \boldsymbol{aAx}$ ($\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D}(\boldsymbol{A})$).

Предложение 3.2.1. *Если* $\boldsymbol{A} : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ *и* $\boldsymbol{B} : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ *– линейные непрерывные операторы, то их сумма, а также произведение оператора* $\boldsymbol{A}$ *на любое число* $\boldsymbol{a}$ *являются непрерывными линейными операторами.*

Доказательство. Линейность проверяется непосредственно, исходя из определения 3.2.1. Что касается непрерывности, то легко проверяется ограниченность операторов $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{aA}$:

$$\|(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{Y}} \leq \|\boldsymbol{Ax}\|_{\boldsymbol{Y}} + \|\boldsymbol{Bx}\|_{\boldsymbol{Y}} \leq (\|\boldsymbol{A}\| + \|\boldsymbol{B}\|)\|\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{X}}, \tag{3.2.1}$$

$$\|(\boldsymbol{aA})\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{Y}} \leq \|\boldsymbol{aAx}\|_{\boldsymbol{Y}} \leq \|\boldsymbol{Aax}\|_{\boldsymbol{Y}} \leq |\boldsymbol{a}|\|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{X}}. \tag{3.2.2}$$

Предложение доказано. □

Предложение 3.2.2. *Множество* $\boldsymbol{\mathcal{L}}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ *всех линейных непрерывных операторов из нормированного пространства* $\mathbb{X}$ *в нормированное пространство* $\mathbb{Y}$ *является линейным пространством.*

Доказательство. Аксиомы линейного пространства проверяются непосредственно, исходя из определения 3.2.1. □

Теорема 3.2.1. *Формула (3.1.2) определяет норму на линейном пространстве $\mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. Более того, если $\mathbb{Y}$ является банаховым пространством, то $\mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ с этой нормой также является полным нормированным пространством.*

Доказательство. Аксиома 1) очевидна. Аксиома треугольника 2) вытекает из (3.2.1), а аксиома 3) – из (3.2.1). Таким образом, мы доказали, что $\mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ является нормированным пространством с нормой (3.1.2).

Пусть $\mathbb{Y}$ – полное нормированное пространство, а $\{A_n\}$ – какая-нибудь фундаментальная последовательность в нормированном пространстве $\mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, т.е. для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $N \in \mathbb{N}$, что для всех $n, m \geq N$ выполняется неравенство $\|A_m - A_n\| < \varepsilon$. Пусть $x \in X$. Тогда
(3.2.3)
$$\|A_m x - A_n x\|_Y = \|(A_m - A_n)x\|_Y \leq \|A_m - A_n\|_Y \, \|x\|_X < \varepsilon \|x\|_X$$

для всех $n, m \geq N$. Значит, последовательность $\{A_n x\}$ фундаментальна, а поскольку $\mathbb{Y}$ полно, то она сходится к некоторому элементу $y \in Y$. Определим оператор $A : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ равенством $Ax = y$. Так как

$$A(ax_1 + bx_2) = \lim_{n\to\infty} A_n(ax_1 + bx_2) =$$

$$\lim_{n\to\infty} aA_n x_1 + \lim_{n\to\infty} bA_n bx_2 = aAx_1 + bAx_2,$$

то оператор A линеен. Покажем, что A ограничен. С этой целью заметим, что последовательность $\{\|A_n\|\}$ также фундаментальна, поскольку

$$|\|A_n\| - \|A_m\|| \leq \|A_n - A_m\|.$$

Но тогда последовательность $\{\|A_n\|\}$ ограничена, т.е. существует такая постоянная $C > 0$, что $\|A_n\| \leq C$. Следовательно, $\|A_n x\|_Y \leq C\|x\|_X$. Переходя в этом числовом неравенстве к пределу при $n \to \infty,$ мы получаем, что $\|Ax\|_Y \leq C\|x\|_X$, т.е. $A \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

Наконец, переходя в формуле (3.2.3) к пределу при $m \to \infty,$ мы получаем, что

$$\|Ax - A_n x\|_X \leq \varepsilon \|x\|_X$$

для всех $x \in X$, $n \geq N$ т.е.

$$\left\|(A - A_n)\frac{x}{\|x\|_X}\right\|_Y < \varepsilon \text{ для всех } x \neq 0, \text{ для всех } n \geq N.$$

Следовательно, $\lim_{n\to\infty} \|A_n - A\| = 0$, что и требовалось. □

Введем еще одну операцию для непрерывных операторов.

Определение 3.2.2. Пусть $A \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, $B \in \mathcal{L}(\mathbb{Y}, \mathbb{Z})$, причем $D(B) \subset R(A)$. Произведением (композицией) операторов A и B называется оператор $C : X \to Z$, такой что

$$Cx = B(Ax) \text{ для всех } x \in D(A).$$

Предложение 3.2.3. $\|BA\| \leq \|B\| \, \|A\|$.

Доказательство. В самом деле,

$$\|BAx\|_Z \leq \|B\|\|Ax\|_Y \leq \|B\|\|A\|\|x\|_X$$

для всех $x \in X$, откуда и следует требуемое утверждение. □

Предложение 3.2.4. $A(BC) = (AB)C$, $C(A+B) = CA + CB$ *для всех непрерывных линейных операторов, для которых эти произведения определены.*

Доказательство. Проверяется непосредственно, исходя из определения композиции операторов. □

В частности, пространство $\mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{X})$ образует кольцо.

Поскольку произведение матриц не является коммутативным, то из примера 3.1.6 вытекает, что композиция линейных непрерывных операторов, вообще говоря, также некоммутативна.

3.2.2 Компактные операторы

Выделим теперь один очень важный подкласс ограниченных операторов.

Определение 3.2.3. Пусть $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$ – банаховы пространства. Оператор $A : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ называется *компактным,* если он каждое ограниченное множество переводит в предкомпактное. Множество всех линейных компактных операторов, действующих из $\mathbb{X}$ в $\mathbb{Y}$ будем обозначать через $\sigma(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

Пример 3.2.1. Если $\dim Y < \infty$, то всякий линейный непрерывный оператор $A : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ будет компактным. В самом деле, если $M \subset X$ – ограниченное множество, то в силу непрерывности оператора A

$$\|Ax\|_Y \leq \|A\| \|x\|_X,$$

а значит, $A(M)$ – также ограниченное множество. Так как в конечномерном нормированном пространстве всякое ограниченное множество предкомпактно, то оператор A компактен. В частности, всякий линейный непрерывный функционал на нормированном пространстве $\mathbb{X}$ является компактным оператором.

Пример 3.2.2. Если $\dim X < \infty$, то всякий линейный непрерывный оператор $A : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ является компактным. В самом деле, если $M \subset X$ – ограниченное множество, то в силу конечномерности пространства X оно является предкомпактным. Докажем, что $A(M)$ предкомпактно. Зафиксируем какую-нибудь последовательность $\{y_n\} \subset A(M)$. Тогда $y_n = Ax_n$, где $\{x_n\} \subset M$. Поскольку M предкомпактно, то $\{x_n\}$ содержит фундаментальную подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Из непрерывности следует, что $\{y_{n_k} = Ax_{n_k}\}$ также фундаментальна, т.е. оператор A компактен.

Таким образом, компактные операторы также можно считать обобщением непрерывных операторов в конечномерных пространствах на случай бесконечномерных пространств. В некоторых учебниках компактные операторы называются *вполне ограниченными*, поскольку они перводят ограниченные множества во вполне ограниченные.

Пример 3.2.3. Если $\dim X = \infty$, то тождественный оператор I не является компактным. В самом деле, образом единичного шара при тождественном отображении служит единичный шар. Ясно, что единичный шар есть множество ограниченное. Тем не менее, согласно предложению 2.4.4, единичный шар не предкомпактен.

Теорема 3.2.2. *Множество $\sigma(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ является (замкнутым) подпространством пространства $\mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.*

Доказательство. Покажем сначала, что $\sigma(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ есть линейное многообразие в $\mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. Действительно, в силу предложения 2.4.3 всякое предкомпактное множество является ограниченным, поэтому всякий компактный оператор есть оператор непрерывный.

Пусть теперь $A, B \in \sigma(X, Y)$, $a, b \in \mathbb{R}$, а M – ограниченное множество в X. Если $\{y_n\} \subset (aA + bB)(M)$, то $y_n = aAx_n + bBx_n$, где $\{x_n\} \subset M$. Поскольку оператор A компактен, то $\{Ax_n\}$ содержит фундаментальную подпоследовательность $\{Ax_{n_k}\}$. Но и оператор B компактен, т.е. $\{Bx_{n_k}\}$ содержит фундаментальную подпоследовательность $\{Bx_{n_{k_j}}\}$. Тогда последовательность $\{(aA+bB)x_{n_{k_j}}\}$ также фундаментальна, т.е. оператор $aA + bB$ компактен.

Докажем теперь, что $\sigma(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ замкнуто в $\mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. Пусть последовательность $\{A_n\} \subset \sigma(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ сходится к некоторому оператору A в пространстве $\mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. Если множество $M \subset X$ ограничено, то множества $A_n(M)$ предкомпактны для всех $n \in \mathbb{N}$. Зафиксируем последовательность $\{y_n\} \subset A(M)$. Тогда $y_n = Ax_n$, где $\{x_n\} \subset X$. Поскольку A_1 компактен, то $\{A_1x_n\}$ содержит фундаментальную подпоследовательность $\{A_1x_n^{(1)}\}$. Поскольку A_2 компактен, то $\{A_2x_n^{(1)}\}$ содержит фундаментальную подпоследовательность $\{A_2x_n^{(2)}\}$. При этом очевидно, что подпоследовательность $\{A_1x_n^{(2)}\}$ также фундаментальна. Рассуждая аналогично, мы заключаем, что существует такая подпоследовательность $\{x_n^{(k)}\}$ последовательности $\{x_n\}$, что $\{A_jx_n^{(k)}\}$ фундаментальны для всех $j \leq k$. Следовательно, каждый из операторов A_j переводит последовательность $\{x_k^{(k)}\}$ в фундаментальную.

Покажем, что оператор A также переводит последовательность $\{x_k^{(k)}\}$ в фундаментальную. Так как $\{x_n\}$ ограничена, то существует $C > 0$ такое, что $\|x_n\| \leq C$. Выберем $k \in \mathbb{N}$ так, чтобы $\|A - A_k\| < \varepsilon/3C$. Имеем

$$\|Ax_n^{(n)} - Ax_m^{(m)}\|_Y \leq$$

$$\|Ax_n^{(n)} - A_kx_n^{(n)}\|_Y + \|A_kx_n^{(n)} - A_kx_m^{(m)}\|_Y + \|Ax_m^{(m)} - A_kx_m^{(m)}\|_Y \leq$$

$$\|A - A_k\|\|x_n^{(n)}\|_X + \|A_kx_n^{(n)} - A_kx_m^{(m)}\|_Y + \|A - A_k\|\|x_m^{(m)}\|_X \leq$$

$$2\varepsilon/3 + \|A_k x_n^{(n)} - A_k x_m^{(m)}\|.$$

Наконец, поскольку последовательность $\{A_k x_n^{(n)}\}$ фундаментальна, то можно выбрать такое $N \in \mathbb{N}$, чтобы при всех $m, n \geq N$ выполнялось неравенство

$$\|A_k x_n^{(n)} - A_k x_m^{(m)}\|_Y < \varepsilon/3.$$

Таким образом, при всех $m, n \geq N$ мы имеем

$$\|A x_n^{(n)} - A x_m^{(m)}\|_Y < \varepsilon,$$

что и требовалось. □

Совокупность компактных операторов замкнута также относительно операции композиции. Мы докажем даже более сильное утверждение.

Теорема 3.2.3. *Пусть A – компактный оператор, а B – ограниченный. Тогда операторы AB и BA компактны.*

Доказательство. Если множество $M \subset X$ ограничено, то множество $B(M)$ также ограничено. Следовательно, $A(B(M))$ предкомпактно, а значит, оператор AB компактен.

Далее, множество $A(M)$ предкомпактно. В силу непрерывности оператор B переводит всякую фундаментальную последовательность в фундаментальную, поэтому он переводит всякое предкомпактное множество в предкомпактное. Следовательно, множество $B(A(M))$ предкомпактно, а значит, оператор BA компактен. □

3.3 Лекция 20

3.3.1 Принцип равномерной ограниченности

Введем еще один тип сходимости в пространстве $\mathcal{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ (ср. п. 2.7.2).

Определение 3.3.1. Говорят, что последовательность операторов $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ сходится к оператору $A \in \mathcal{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ *равномерно,* если $\lim_{n\to\infty}\|A_n - A\| = 0$. Говорят, что последовательность $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ сходится к оператору $A \in \mathcal{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ *поточечно,* если $\lim_{n\to\infty}\|A_n x - Ax\|_{\mathbb{Y}} = 0$ для всех $x \in \mathbb{X}$.

Иногда поточечную сходимость называют *сильной*. Интуитивно ясно, что равномерная сходимость не слабее поточечной.

Предложение 3.3.1. *Если последовательность $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ операторов из пространства $\mathcal{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ сходится к оператору $A \in \mathcal{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ равномерно, то она сходится и поточечно.*

Доказательство. Немедленно следует из оценки

$$\|A_n x - Ax\|_Y \le \|A_n - A\|\|x\|_X.$$

Предложение доказано. □

Обратное, вообще говоря, неверно.

Пример 3.3.1. Пусть $\mathbb{X} = \mathbb{Y} = l_2$, $x = (x_1, \dots x_n, \dots)$,

$$A_1 x = (0, x_2, \dots, x_n \dots), \quad A_k x = (0, \dots, 0, x_{k+1}, \dots, x_n, \dots).$$

Тогда для любого $x \in l_2$

$$\lim_{k\to 0}\|A_k x - 0x\|_Y^2 = \lim_{k\to 0}\sum_{j=k+1}^{\infty} x_j^2 = 0$$

(как остаток сходящегося ряда $\sum_{j=1}^{\infty} x_j^2 = \|x\|^2$), т.е. последовательность $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ сходится поточечно к нулю. С другой стороны, если

$$z = (0, \dots, 0, x_{k+1}, \dots, x_n, \dots) \text{ и } \sum_{j=k+1}^{\infty} x_j^2 = 1,$$

то $\|A_k z\|_Y = \|z\|_X = 1$ и

$$\|A_k\| = \sup_{\|y\|=1} \|A_k y\|_Y \geq 1,$$

т.е. равномерная сходимость последовательности $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ к нулю невозможна.

Следующая теорема показывает, что, в отличие от понятий поточечной и равномерной сходимости, понятия поточечной и равномерной ограниченности в пространстве $\mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ совпадают, по крайней мере, если $\mathbb{Y}$ – банахово.

Теорема 3.3.1. (Принцип равномерной ограниченности) *Пусть $\mathbb{Y}$ – полное нормированное пространство. Если $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, и $\{A_n x\}_{n\in\mathbb{N}}$ ограничена при каждом фиксированном $x \in X$, то $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ограничена.*

Доказательство. Для доказательства нам потребуется следующая лемма.

Лемма 3.3.1. *Пусть $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, и пусть существуют такие постоянная $C > 0$ и замкнутый шар $\overline{B}(x_0, R)$, что*

$$\|A_n x\|_X \leq C \text{ для всех } x \in B(x_0, R) \text{ и всех } n \in \mathbb{N}.$$

Тогда $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ограничена.

Доказательство. Пусть $x \neq 0$ – произвольный элемент из X. Тогда вектор $y_0 = x_0 + R\frac{x}{\|x\|_X}$ принадлежит шару $\overline{B}(x_0, R)$, поскольку

$$\|y_0 - x_0\|_X = \left\| R\frac{x}{\|x\|_X} \right\| = R.$$

Так как

$$C \geq \|A_n y_0\|_Y = \left\| R\frac{A_n x}{\|x\|_X} + A_n x_0 \right\| \geq \left| \frac{R}{\|x\|_X}\|A_n x\|_Y - \|A_n x_0\|_Y \right|,$$

то

$$\frac{R}{\|x\|_X}\|A_n x\|_Y \leq \|A_n x_0\|_Y + C \leq 2C.$$

Отсюда $\|A_n x\|_Y \leq \frac{2C\|x\|_X}{R}$, а значит, $\|A_n\| \leq \frac{2C}{R}$. □

Продолжим доказательство теоремы. Если ее утверждение не верно, то по лемме 3.3.1 последовательность $\{\|A_n x\|_Y\}_{n\in\mathbb{N}}$ не ограничена ни в каком замкнутом шаре. Зафиксируем какой-нибудь шар $\overline{B}(0, R_0)$ в X. В нем $\{\|A_n x\|_Y\}_{n\in\mathbb{N}}$ не ограничена, т.е. найдутся такие номер n_1 и точка $x_1 \in B(x_0, R_0)$, что $\|A_{n_1} x_1\|_Y > 1$. В самом деле, в силу неограниченности, найдутся такие номер n_1 и точка $\tilde{x}_1 \in \overline{B}(x_0, R_0)$, что $\|A_{n_1}\tilde{x}_1\|_Y > 2$. Пусть $0 < \varepsilon < 1$ и положим $x_1 = x_0 + (\tilde{x}_1 - x_0)\varepsilon$. Тогда

$$\|x_1 - x_0\|_X = \varepsilon\|\tilde{x}_1 - x_0\|_X \leq \varepsilon R_0 < R_0,$$

$$\|\tilde{x}_1 - x_1\|_X = (1-\varepsilon)\|\tilde{x}_1 - x_0\|_X \leq (1-\varepsilon)R_0 < R_0.$$

В силу непрерывности оператора A_{n_1} существует такое $\delta > 0$, что $\|A_{n_1} x\|_Y < 1/2$ для всех $\|x\| < \delta$. Выбрав ε так, чтобы $(1-\varepsilon)R_0 < \delta,$ мы получим:

$$\|A_{n_1} x_1\|_Y \geq |\|A_{n_1}\tilde{x}_1\|_Y - \|A_{n_1}(\tilde{x}_1 - x_1)\|_Y| \geq 2 - 1/2 > 1.$$

Далее, по непрерывности A_{n_1} найдется такое $0 < R_1 < R_0/2$, что $\overline{B}(x_1, R_1) \subset B(x_0, R_0)$ и $\|A_{n_1}x\|_Y > 1$ для всех $x \in \overline{B}(x_1, R_1)$. Так как $\{A_n x\}_{n\in\mathbb{N}}$ неограничена и в шаре $\overline{B}(x_1, R_1)$, то найдутся такие номер $n_2 > n_1$ и точка $x_2 \in B(x_1, R_1)$, что $\|A_{n_2}x_2\|_Y > 2$ и т.д.

Продолжая эти рассуждения, мы получим последовательность точек $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ и последовательность замкнутых вложенных друг в друга шаров $\{\overline{B}(x_k, R_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ таких, что

1) $R_k < R_0/k$;

2) $x_{k-1} \in B(x_k, R_k)$;

3) $\|A_{n_k}x\|_Y > k$ для всех $x \in B(x_k, \rho_k)$.

По теореме 1.5.1 о вложенных шарах найдется точка, скажем, $y \in \bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} \overline{B}(x_k, R_k)$, т.е. $\|A_{n_k}y\|_Y \geq k$. Это означает, что последовательность $\{\|A_n y\|\}_{n\in\mathbb{N}}$ не является ограниченной, что противоречит условию теоремы. □

3.3.2 Теорема Банаха-Штейнгауза

Следующая теорема является обобщением теоремы 2.7.2 на случай линейных операторов. Она дает критерий поточечной сходимости в пространстве $\mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ и, что самое главное, во многих случаях существенно облегчает проверку поточечной сходимости.

Теорема 3.3.2. (Теорема Банаха-Штейнгауза) *Пусть $\mathbb{Y}$ – пространство Банаха. Для того чтобы последовательность операторов $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ из $\mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ сходилась к некоторому оператору $A \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ поточечно, необходимо и достаточно, чтобы*

1) $\{\|A_n\|\}_{n\in\mathbb{N}}$ была ограничена;

2) $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ сходилась к $A \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ поточечно на некотором линейном многообразии $\mathbb{X}'$, всюду плотном в $\mathbb{X}$.

Доказательство. Необходимость. Если $\lim_{n\to\infty} A_n x = Ax$ для всякого $x \in X$, то $\lim_{n\to\infty} \|A_n x\|_Y = \|Ax\|_Y$, поскольку

$$|\|A_n x\|_Y - \|Ax\|_Y| \le \|A_n x - Ax\|_Y.$$

Следовательно, $\{\|A_n x\|_Y\}_{n\in\mathbb{N}}$ ограничена для всех $x \in X$. Тогда из предыдущей теоремы мы заключаем, что $\{\|A_n\|\}_{n\in\mathbb{N}}$ ограничена. В качестве X' можно взять X.

Достаточность. Пусть $C = \max((\sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\|), \|A\|)$. Пусть $x \in X \setminus X'$. Далее, поскольку X' всюду плотно в X, то для всякого $\varepsilon > 0$ существует такой элемент $x' \in X'$, что $\|x - x'\|_X < \varepsilon/4C$. Тогда

$$\|A_n x - Ax\|_Y = \|A_n(x - x') + (A_n x' - Ax') + A(x' - x)\|_Y =$$

$$\le \|A_n\|\|x - x'\|_X + \|A_n x' - Ax'\|_Y + \|A\|\|x' - x\|_X \le \varepsilon/2 + \|A_n x' - A$$

Наконец, в силу условия 2) теоремы существует такой номер N, что для всех $n \ge N$

$$\|A_n x' - Ax'\|_Y < \varepsilon/2.$$

Следовательно, для всех $n \ge N$

$$\|A_n x - Ax\|_Y < \varepsilon,$$

что и требовалось. $\square$

3.4 Лекция 21

3.4.1 Замкнутые операторы

Введем еще один важный класс операторов. С этой целью определим прямую сумму $\mathbb{Z} = \mathbb{X} + \mathbb{Y}$ двух нормированных пространств $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ как совокупность пар $z = (x, y)$, $x \in X$, $y \in Y$ со следующими операциями сложения и умножения на скаляр:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),\ z_1 = (x_1, y_1),\ z_2 = (x_2, y_2), \quad \alpha z = (\alpha x, \alpha y)$$

и нормой

$$\|z\|_Z = \|x\|_X + \|y\|_Y.$$

Линейность пространства $\mathbb{Z}$ очевидна (доказывается так же, как и линейность пространства $\mathbb{R}^2$, аксиомы нормы $\|.\|_Z$ следуют из неравенства треугольника в $\mathbb{R}$ и аксиом норм $\|.\|_X$, $\|.\|_Y$. Таким образом, $\mathbb{Z}$ – нормированное пространство.

Определение 3.4.1. *Графиком* Γ оператора $A : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ будем называть множество пар вида $(x, Ax) \in \mathbb{X} + \mathbb{Y}$. Линейный оператор A называется замкнутым, если его график замкнут.

Лемма 3.4.1. *Если $A \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, то он замкнут.*

Доказательство. В самом деле, пусть (x, y) – предельная точка графика оператора в $\mathbb{X} + \mathbb{Y}$. Тогда существует такая последовательность точек $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{X}$, что $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, $y = \lim_{n\to\infty} Ax_n$.

Так как $A \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, то $\lim_{n\to\infty} Ax_n = y$. Наконец, единственность предела позволяет нам заключить, что $Ax = y$, т.е. $(x, y) \in \Gamma$. □

Пример 3.4.1. Пусть $\mathbb{X} = \mathbb{Y} = C[a,b]$, $A = \frac{d}{dt}$. По теореме Вейерштрасса, многочлены плотны в пространстве $C[a,b]$, поэтому область определения $D(A) = C^1[a,b] \neq C[a,b]$ плотна в $\mathbb{X}$. Мы уже видели, что данный оператор не является ограниченным. Докажем, что он замкнут. В самом деле, если $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C^1[a,b]$ такова, что $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ сходится к некоторой функции $x \in C[a,b]$, а $\{x'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ сходится к некоторой функции $y \in C[a,b]$, то по известной теореме из курса математического анализа, $x \in C^1[a,b]$ и $x' = y$, т.е. $(x,y) \in \Gamma$.

3.4.2 Теорема о замкнутом графике

Теорема 3.4.1. *Пусть $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$ – пространства Банаха, а $A : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ – замкнутый линейный всюду определенный оператор. Тогда A ограничен.*

Доказательство. Нам потребуется две леммы.

Лемма 3.4.2. *Пусть $\mathbb{X}_1$ – всюду плотное множество в банаховом пространстве $\mathbb{X}$, Тогда любой ненулевой элемент $x \in \mathbb{X}$ можно разложить в ряд $x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j$, где $\{x_j\} \subset \mathbb{X}_1$ и $\|x_j\| \leq 3\|x\|/2^j$.*

Доказательство. Элементы x_j будем строить последовательно: сначала выберем $x_1 \in X_1$ так, чтобы

$$\|x - x_1\| \leq \|x\|/2. \tag{3.4.1}$$

Это возможно, поскольку X_1 всюду плотно в $\mathbb{X}$, а неравенство (3.4.1) определяет шар $B(x, \|x\|/2)$, внутри которого должен найтись элемент из X_1. Выберем элемент $x_2 \in X_1$ так, чтобы $\|x - x_1 - x_2\| \leq$

$\|x\|/4$, и вообще, $x_n \in X_1$ выберем так, чтобы

$$\|x - \sum_{j=1}^{n} x_j\| \leq \|x\|/2^n. \tag{3.4.2}$$

Это возможно, поскольку X_1 всюду плотно в $\mathbb{X}$, а неравенство (3.4.2) определяет шар $B((x - \sum_{j=1}^{n-1} x_j), \|x\|/2^n)$, внутри которого должен найтись элемент x_n из X_1.

В силу (3.4.2) ряд $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ сходится к x. Оценим нормы элементов x_j :

$$\|x_1\| \leq \|x_1 - x\| + \|x\| \leq 3\|x\|/2,$$

$$\|x_2\| \leq \|x_2 + x_1 - x + x - x_1\| \leq \|x - x_2 - x_1\| + \|x - x_1\| \leq 3\|x\|/4,$$

$$\|x_n\| \leq \left\|\sum_{j=1}^{n} x_j - x + x - \sum_{j=1}^{n-1} x_j\right\| \leq$$

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} x_j - x\right\| + \left\|x - \sum_{j=1}^{n-1} x_j\right\| \leq 3\|x\|/2^n.$$

Лемма доказана. □

Лемма 3.4.3. *В условиях теоремы Банаха, пусть существуют множество $\mathbb{X}_1$, плотное в $\mathbb{X}$ и постоянная $c > 0$ такие, что*

$$\|Ax\|_Y \leq c\|x\|_X \text{ для всех } x \in X_1.$$

Тогда A ограничен.

Доказательство. Пусть $x \in X$. Разложим его в ряд, построенный в лемме 3.4.2:

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j,$$

а последовательность его частичных сумм обозначим через

$$\left\{ s_n = \sum_{j=1}^{n} x_j \right\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

Так как

$$\|Ax_j\|_Y \le c\, \frac{\|x\|_X}{2^{j-1}},$$

то частичные суммы $\{As_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ряда

$$\sum_{j=1}^{\infty} Ax_j$$

образуют фундаментальную последовательность, а значит, сам ряд сходится к некоторому элементу $y \in Y$ в силу полноты пространства $\mathbb{Y}$.

Теперь из замкнутости оператора следует, что точка (x, y) принадлежит графику оператора A, т.е. $y = Ax$. В частности, лемма 3.4.2 позволяет нам заключить, что

$$\|Ax\|_Y \le \sum_{j=1}^{\infty} \|Ax_j\|_Y \le c \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|_X \le 2\|x\|_X.$$

Поскольку $x \in X$ произволен, то A ограничен. Лемма доказана. $\square$

Продолжим доказательство теоремы.

Для каждого $k \in \mathbb{N}$ рассмотрим в пространстве $\mathbb{X}$ множество

$$M_k = \{x \in X : \|Ax\|_Y \le k\|x\|\}.$$

Всякий элемент $x \in X$ попадает в некоторое M_k, т.е. $X = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} M_k$. По теореме Бэра 1.5.2 , хотя бы одно из множеств M_k, скажем, M_n, плотно в некотором шаре $B \subset \mathbb{X}$.

Внутри этого шара B рассмотрим шаровой слой P с центром в точке x_0 из M_n:

$$P = \{x \in B : a < \|x - x_0\|_X < b\}.$$

Перенося слой P так, чтобы его центр попал в нуль, получим шаровой слой

$$P_0 = \{x \in X : a < \|x\|_X < b\}.$$

Покажем, что в P_0 плотно некоторое множество M_N. Пусть $z \in P \cap M_n$. Тогда $z - x_0 \in P_0$ и

$$\|A(z - x_0)\|_Y \leq \|Az\|_Y + \|Ax_0\|_Y \leq n(\|z\|_X + \|x_0\|_X) \leq$$

$$n(\|z - x_0\|_X + 2\|x_0\|_X) = n\|z - x_0\|_X \left(1 + \frac{2\|y_0\|}{\|z - x_0\|_X}\right) \leq$$

$$\leq n\|z - x_0\|_X \left(1 + \frac{2\|x_0\|}{a}\right). \tag{3.4.3}$$

Величина $n(1 + 2\|x_0\|_X/a)$ не зависит z. Положим

$$N = 1 + n\left(1 + 2\|x_0\|_X/a\right).$$

Тогда в силу (3.4.3) мы имеем $z - x_0 \in M_N$, а из того, что M_n плотно в P, следует, что M_N плотно в P_0.

Рассмотрим произвольный ненулевой элемент $x \in X$. Всегда можно подобрать λ так, чтобы было $a < \|\lambda x\| < b$, т.е. $\lambda x \in P_0$. Так как M_N плотно в P_0, то можно построить последовательность $x_k \in M_N$, сходящуюся к λx. Очевидно, что если $x_k \in M_N$, то и $\frac{x_k}{\lambda} \in M_N$ при любом $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Таким образом, M_N плотно в $X \setminus \{0\}$, а потому и в X.

Теперь утверждение теоремы немедленно вытекает из леммы 3.4.2, примененной для $X_1 = M_N$. $\square$

В важности класса замкнутых операторов мы убедимся в следующем параграфе. Именно, мы увидим, что, в отличие от непрерывных операторов они образуют не только кольцо, но и алгебру.

3.5 Лекция 22

3.5.1 Сопряженный оператор

Определение 3.5.1. Оператор $A^* : \mathbb{Y}^* \to \mathbb{X}^*$ называется *сопряженным* к оператору $A : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ если

$$< g, Ax >:= g(Ax) = (A^*g)(x) =< A^*g, x > \tag{3.5.1}$$

для всех $x \in \mathbb{X}$ и $g \in \mathbb{Y}^*$.

Сопряженный оператор всегда существует, поскольку для всякого $g \in \mathbb{Y}^*$ равенство 3.5.1 определяет элемент $\mathbb{X}^*$. В самом деле, по определению,

$$(A^*g)(ax + by) = g(A(ax + by) = g(aAx + bAy) =$$

$$ag(Ax) + bg(Ay) = a(A^*g)(x) + b(A^*g)(y),$$

т.е. функционал A^*g линеен. Он непрерывен, так как

$$|A^*g(x)| = |g(Ax)| \le \|g\|\|A\|\|x\|_X.$$

Пример 3.5.1. Пусть $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$, где $n < \infty$, $m < \infty$. Тогда линейный оператор $A : X \to Y$ задается $(m \times n)$-матрицей (a_{ij}), т.е.

$$y_i = (Ax)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j.$$

Так как всякий линейный функционал $g \in Y^*$ задается в виде

$$g(y) = \sum_{i=1}^{m} g_i y_i,$$

то

$$g(Ax) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} g_i a_{ij} x_j = \sum_{i=1}^{n} x_j \sum_{j=1}^{n} g_i a_{ij}.$$

Значит, $(A^*g)(x) = \sum_{j=1}^{n} g_i a_{ij}$, т.е. A^* задается матрицей (a_{ji}), транспонированной к матрице (a_{ij}).

Предложение 3.5.1. *Если A, B – ограниченные линейные операторы, то $(A+B)^* = A^* + B^*$, $(\alpha A)^* = \alpha A^*$ для всех $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. Вытекает непосредственно из определения:

$$< g, (A+B)x > = < g, Ax > + < g, Bx > =$$

$$< A^*g, x > + < B^*g, x > = < (A+B)^*g, x >,$$

$$< g, \alpha Ax > = \alpha < g, Ax > = < \alpha A^*g, x > .$$

Предложение доказано. □

Теорема 3.5.1. *Пусть A – ограниченный линейный оператор, отображающий банахово пространство X в банахово пространство Y. Тогда оператор A^* линеен, ограничен и $\|A^*\| = \|A\|$.*

Доказательство. Как мы уже видели, в силу свойств нормы

$$|A^*g(x)| = |g(Ax)| \le \|g\|\|A\|\|x\|,$$

т.е. $\|A^*g\| \le \|A\|\|g\|$, а значит, $\|A^*\| \le \|A\|$.

Пусть $x \in X$ и $Ax \ne 0$. Положим $y_0 = \frac{Ax}{\|Ax\|} \in Y$; очевидно, что $\|y_0\| = 1$. По теореме Хана-Банаха существует такой функционал $g \in Y^*$, что $\|g\| = 1$ и $g(y_0) = 1$. Тогда

$$(A^*g)(x) = g(Ax) = \|Ax\| \le \|A^*\|\|g\|\|x\| = \|A^*\|\|x\|.$$

Таким образом, $\|A\| \le \|A^*\|$, а значит, $\|A\| = \|A^*\|$. □

3.5.2 Операторные уравнения

В дальнейшем нас в первую очередь будет интересовать следующая задача.

Задача **3.5.1.** *По заданному* $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Y}$ *найти такой элемент* $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$*, что*

$$\boldsymbol{Ax = y}. \tag{3.5.2}$$

Уравнение (3.5.2) называется линейным *операторным уравнением первого рода.* Как мы уже отмечали в разделе 1, в такой общности данная задача необозрима. Мы ограничимся непрерывными отображениями в полных нормированных пространствах.

Естественно возникают следующие вопросы:

1) Всегда ли и если нет, то при каких условиях существуют решения задачи 3.5.1?

2) Является ли решение единственным и если нет, то при каких условиях это так?

3) Как "малые" изменения "начальных" данных $\boldsymbol{y}$ повлияют на изменение решения $\boldsymbol{x}$?

Определение 3.5.2. Задача 3.5.1 называется *корректной по Адамару,* если выполнены следующие три условия:

1) для всякого $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Y}$ существует ее решение $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$ (существование),

2) задача имеет не более одного решения (единственность),

3) для всяких $\boldsymbol{x_0} \in \boldsymbol{Y}$ и $\boldsymbol{\varepsilon > 0}$ существует $\boldsymbol{\delta > 0}$ такое, что для всех $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$, для которых $\boldsymbol{Ax} \in \boldsymbol{B(x_0, \delta)}$, мы имеем $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}\|_{\boldsymbol{X}} < \boldsymbol{\varepsilon}$ (непрерывная зависимость от начальных данных или *устойчивость*).

Традиционно (и объективно), именно корректные задачи наиболее важны для приложений. Мы постараемся получить информацию и о некорректных задачах.

В целом, описание условий разрешимости операторного уравнения (3.5.2) есть описание образа $\boldsymbol{R(A)}$ этого оператора. Следующее утверждение представляет собой грубую аппроксимацию такого описания и выделяет простое необходимое условие разрешимости данного операторного уравнения.

Лемма 3.5.1. (об аннуляторе ядра) *Пусть* $\boldsymbol{A} : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ – *ограниченный линейный оператор. Тогда* $\overline{\boldsymbol{R(A)}} \subset (\ker \boldsymbol{A}^*)^\perp$, *где*

$$(\ker \boldsymbol{A}^*)^\perp = \{\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Y} : \ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) = 0 \text{ для всех } \boldsymbol{f} \in \ker \boldsymbol{A}^*\}.$$

Доказательство. Покажем сначала, что $\boldsymbol{R(A)} \subset (\ker \boldsymbol{A}^*)^\perp$. Если $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R(A)}$, то существует такой элемент $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$, что $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{y}$, и для всех $\boldsymbol{f} \in \ker \boldsymbol{A}^*$ мы имеем:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{Ax}) = (\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}) = 0(\boldsymbol{x}) = 0,$$

т.е. $\boldsymbol{y} \in (\ker \boldsymbol{A}^*)^\perp$.

Если $\boldsymbol{y} \in \overline{\boldsymbol{R(A)}}$, то найдется такая последовательность $\{\boldsymbol{x}_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \boldsymbol{X}$, что $\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{Ax}_k = \boldsymbol{y}$. Тогда, в силу непрерывности функционала $\boldsymbol{f} \in \ker \boldsymbol{A}^*$,

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{f}\left(\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{Ax}_k\right) = \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{Ax}_k) =$$

$$\lim_{k\to\infty} (\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}_k) = \lim_{k\to\infty} 0(\boldsymbol{x}_k) = 0.$$

Лемма доказана. □

На самом деле верно и обратное включение, т.е. $\overline{\boldsymbol{R(A)}} = (\ker \boldsymbol{A}^*)^\perp$. Однако у нас недостаточно инструментов, чтобы доказать это строго для произвольных банаховых пространств. Мы сделаем это в следующем разделе для операторов в пространствах Гильберта.

3.5.3 Обратный оператор

Перейдем теперь к описанию условий единственности решения операторного уравнения.

Определение 3.5.3. Оператор $\boldsymbol{A} : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ называется *обратимым,* если для любого $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R(A)}$ уравнение

$$\boldsymbol{Ax = y} \tag{3.5.3}$$

имеет единственное решение $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D(A)}$. Оператор, ставящий в соответствие каждому элементу $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R(A)}$ единственный элемент $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D(A)}$, удовлетворяющий уравнению (3.5.3), называется обратным к $\boldsymbol{A}$ и обозначается $\boldsymbol{A^{-1}}$.

Обратите внимание, что обратимость соответствует не условию 1) существования в определении корректности по Адамару, а условию 2) – единственности.

Предложение 3.5.2. *Пусть оператор $\boldsymbol{A} : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ является линейным. Тогда следующие условия являются эквивалентными:*

1) оператор $\boldsymbol{A}$ обратим;

2) оператор $\boldsymbol{A}$ инъективен;

3) $\mathbf{ker}\,\boldsymbol{A} = \mathbf{0}$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{ker}\,\boldsymbol{A} = \mathbf{0}$. Тогда, если $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R(A)}$ и $\boldsymbol{Ax_1 = Ax_2 = y}$, то

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{Ax_1 - Ax_2 = A(x_1 - x_2)},$$

т.е. $\boldsymbol{(x_1 - x_2)} \in \mathbf{ker}\,\boldsymbol{A}$. Значит, $\boldsymbol{x_1 - x_2} = \mathbf{0}$ и оператор $\boldsymbol{A}$ инъективен.

Далее, если оператор A инъективен, то уравнение (3.5.3), очевидно, имеет единственное решение для всех $y \in R(A)$, т.е. оператор A обратим.

Наконец, если A обратим, и $x \in \ker A$, то в силу единственности решения уравнения (3.5.3) мы заключаем, что $x = 0$, т.е. $\ker A = 0$.

Таким образом, мы доказали, что из 3) следует 2), из 2) следует 1), а из 1) следует 3). Значит, эти три условия эквивалентны. $\square$

Теорема 3.5.2. *Если оператор A линеен и обратим, то оператор A^{-1} также линеен.*

Доказательство. Прежде всего, заметим, что $D(A^{-1}) = R(A)$ – линейное многообразие в Y (см. предложение 3.1.2). Пусть $y_1, y_2 \in R(A)$. Для доказательства достаточно проверить, что

$$A^{-1}(ay_1 + by_2) = aA^{-1}y_1 + bA^{-1}by_2 \tag{3.5.4}$$

для всех скаляров a и b.

Пусть $Ax_1 = y_1$, $Ax_2 = y_2$. В силу линейности оператора A имеем

$$A(ax_1 + bx_2) = aAx_1 + bAx_2 = ay_1 + by_2. \tag{3.5.5}$$

Так как по определению обратного оператора $x_1 = A^{-1}y_1$, $x_2 = A^{-1}y_2$, то

$$aA^{-1}y_1 + bA^{-1}y_2 = ax_1 + bx_2.$$

С другой стороны, из (3.5.5) следует, что

$$A^{-1}(ay_1 + by_2) = ax_1 + bx_2,$$

что в совокупности с двумя предыдущими равенствами и дает равенство (3.5.4). $\square$

Теорема 3.5.3. *Если оператор замкнут и обратим, то обратный к нему также замкнут.*

Доказательство. Рассмотрим графики операторов $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{A}^{-1}$:

$$\boldsymbol{\Gamma = \{(x, Ax), \quad x \in D(A)\}, \quad \Gamma^{-1} = \{(y, A^{-1}y), \quad y \in R(A)\}.}$$

Ясно, что график оператора $\boldsymbol{A}^{-1}$ можно переписать в виде

$$\boldsymbol{\Gamma^{-1} = \{(Ax, x), \quad x \in D(A)\},}$$

а значит, его можно отождествить с графиком оператора $\boldsymbol{A}$. $\square$

3.6 Лекция 23

3.6.1 Непрерывная обратимость

Пример 3.6.1. Рассмотрим ситуацию, когда $\mathbb{X} = C[a, b]$, $\mathbb{Y} = C[a, b]$,

$$(Ax)(t) = \int_a^t x(\tau)\, d\tau.$$

Данный оператор линеен в силу линейности интеграла и непрерывен в силу следующей оценки:

$$\|Ax\| = \max_{t\in[a,b]} \left\| \int_a^t x(\tau)\, d\tau \right\| \leq (b-a)\|x\|.$$

Кроме того, $Ax = 0$ влечет за собой $x = d(Ax)/dt = 0$, т.е. оператор инъективен, а значит, обратим. Очевидно, однако, что, решая уравнение $Ax = y$, мы получаем $x = d(Ax)/dt = dy/dt$. Поэтому $A^{-1} = d/dt : C[a, b] \to C[a, b]$ не ограничен.

Пример 3.6.2. В пространстве $C([0, 1])$ рассмотрим линейный оператор

$$y(t) = (Ax)(t) = x(t) - \int_0^1 t\, s\, x(s)\, ds.$$

Заметим, что $x(t) = y(t) + c\ t$, где $c = \int_0^1 s\ x(s)\ ds$. Если $y(t) \equiv 0$, то $x(t) = ct$, откуда либо $c = c\int_0^1 s^2 ds,$ либо $x \equiv 0$. Поскольку $\int_0^1 s^2 ds = 1/3$, то уравнение $Ax = y$ имеет не более одного решения.

Интегрируя равенство $tx(t) = ty(t) + c\,t^2$ на $[0, 1]$, находим

$$c = \frac{3}{2}\int_0^1 sy(s)ds.$$

Следовательно, при любой правой части $y(t)$ решение уравнения $Ax = y$ имеет вид

$$x(t) = y(t) + \frac{3}{2}\int_0^1 sy(s)ds = (A^{-1}x)(t).$$

Легко видеть, что оператор A^{-1} непрерывен.

Определение 3.6.1. Оператор $A : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ называется *непрерывно обратимым,* если он обратим, и оператор $A^{-1} : \mathbb{Y} \longrightarrow \mathbb{X}$ является непрерывным.

Таким образом, непрерывная обратимость соответствует условиям 2) единственности и 3) непрерывной зависимости от начальных данных в определении корректности по Адамару.

Пример 3.6.3. Если одно из пространств X или Y бесконечномерно, то линейный компактный оператор A не является непрерывно обратимым. В самом деле, пусть оператор A^{-1} существует и непрерывен. Тогда по теореме 3.2.3 операторы $AA^{-1} = I_Y$ и $A^{-1}A = I_X$ являются компактными, что противоречит примеру 3.2.3.

Теорема 3.6.1. *Для того чтобы линейный оператор $A : X \longrightarrow Y$ в нормированных пространствах X и Y был непрерывно обратим, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая постоянная $m > 0$, что*

(3.6.1) $$\|Ax\| \geq m\|x\| \text{ для всех } x \in D(A).$$

Доказательство. Если обратный оператор $\boldsymbol{A^{-1}}$ существует и непрерывен, то он ограничен, а значит, существует такая постоянная $\boldsymbol{C > 0}$, что для всех $\boldsymbol{y \in D(A^{-1}) = R(A)}$ мы имеем

$$\|\boldsymbol{A^{-1}y}\| \leq \|\boldsymbol{y}\|.$$

Полагая $\boldsymbol{y = Ax}$, мы получаем (3.6.1), где $\boldsymbol{m = \|x\|/C}$.

Обратно, если выполнено (3.6.1), то из $\boldsymbol{Ax = 0}$ следует, что $\boldsymbol{x = 0}$, т.е. $\boldsymbol{\ker A = 0}$. По предложению 3.5.2 оператор $\boldsymbol{A}$ обратим. Полагая в (3.6.1), $\boldsymbol{x = A^{-1}y}$, мы получаем

$$\|\boldsymbol{A^{-1}y}\| \leq \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{m}}\|\boldsymbol{y}\|$$

для всех $\boldsymbol{y \in R(A) = D(A^{-1})}$, что и требовалось доказать. □

Оказывается, в полных нормированных пространствах для доказательства корректности задачи достаточно доказать только теоремы существования и единственности.

Теорема 3.6.2. *Линейный замкнутый оператор $\boldsymbol{A} : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$, взаимно однозначно отображающий банахово пространство $\mathbb{X}$ на банахово пространство $\mathbb{Y}$, непрерывно обратим.*

Доказательство. В самом деле, из условия теоремы следует, что оператор обратим. Поскольку он замкнут, то обратный к нему тоже замкнут в силу теоремы 3.5.3 и, кроме того, по условию теоремы, он определен на всем пространстве $\mathbb{Y}$. Значит, из теоремы о замкнутом графике следует, что обратный оператор непрерывен. □

Следствие 3.6.1. (Теорема Банаха об обратном операторе) *Линейный ограниченный оператор $\boldsymbol{A} : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$, взаимно однозначно отображающий банахово пространство $\mathbb{X}$ на банахово пространство $\mathbb{Y}$, непрерывно обратим.*

Доказательство. Немедленно следует из теоремы 3.4.1 о замкнутом графике и теоремы 3.6.2. □

3.6.2 Достаточные условия непрерывной обратимости

Перейдем теперь к двум другим важным вопросам:

1) при каких условиях решения операторного уравнения существуют и

2) как их найти?

Пример 3.6.4. В пространстве $\mathbb{R}^n$ рассмотрим линейный оператор $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Ax}$, записанный в матричном виде (см. пример 3.1.6). Пусть $|\boldsymbol{A}| \neq \mathbf{0}$. Тогда согласно правилу Крамера оператор $\boldsymbol{A}^{-1}$ существует и задается обратной к $\boldsymbol{A}$ матрицей.

Следующая теорема выделяет одно простое (хотя и достаточно ограничительное) условие, которое одновременно гарантирует единственность решения, существование решений для всех правых частей и непрерывную обратимость.

Теорема 3.6.3. *Пусть $\boldsymbol{X}$ – банахово пространство, $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{\mathcal{L}}(\boldsymbol{X})$ и $\|\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\| < \mathbf{1}$. Тогда оператор $\boldsymbol{A}$ непрерывно обратим, при этом*

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^j$$

и справедливы оценки

$$\|\boldsymbol{A}^{-1}\| \leq \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} - \|\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\|}, \quad \|\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^{-1}\| \leq \frac{\|\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\|}{\mathbf{1} - \|\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\|}.$$

Доказательство. Докажем сначала, что оператор $\boldsymbol{A}$ обратим, т.е., что $\ker \boldsymbol{A} = \mathbf{0}$. Пусть $\boldsymbol{u} \in \ker \boldsymbol{A}$. Тогда $\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{u}$, а поскольку $\|(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\|<\mathbf{1}$, то $\|\boldsymbol{u}\|<\|(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{u}\|=\|\boldsymbol{u}\|$ для всех $\boldsymbol{u}\neq\mathbf{0}$. Следовательно, $\boldsymbol{u}=\mathbf{0}$, что и требовалось.

Далее, рассмотрим в $\mathcal{L}(\boldsymbol{X})$ операторы

$$\boldsymbol{B}_N=\sum_{j=0}^{N}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^j.$$

Так как $\|(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^j\|\leq\|\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\|^j$, то для всех $\mathbf{1}\leq k\leq m$ мы имеем

$$\|\boldsymbol{B}_k-\boldsymbol{B}_m\|=\Big\|\sum_{j=k}^{N}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^j\Big\|\leq\sum_{j=k}^{m}\|\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\|^j\leq\frac{\|\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\|^k}{\mathbf{1}-\|\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\|}.$$

Значит, последовательность $\{\boldsymbol{B}_N\}$ фундаментальна в $\mathcal{L}(\boldsymbol{X})$ и в силу полноты этого пространства существует предел

$$\boldsymbol{B}=\lim_{N\to\infty}\boldsymbol{B}_N=\sum_{j=0}^{\infty}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^j.$$

При этом

$$\|\boldsymbol{B}\|=\lim_{N\to\infty}\|\boldsymbol{B}_N\|\leq\lim_{N\to\infty}\Big\|\sum_{j=0}^{N}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^j\Big\|\leq\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}-\|\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\|},$$

$$\|\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}\|=\lim_{N\to\infty}\|\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}_N\|\leq\lim_{N\to\infty}\Big\|\sum_{j=1}^{N}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^j\Big\|\leq\frac{\|\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\|}{\mathbf{1}-\|\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\|}.$$

Покажем, что $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$. В самом деле,

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}_N=[\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})]\sum_{j=0}^{N}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^j=\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{N+1}.$$

Следовательно, учитывая непрерывность оператора $\boldsymbol{A}$,

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\lim_{N\to\infty}\boldsymbol{B}_N=\boldsymbol{I}.$$

$\square$

Следствие 3.6.2. *Пусть* $\boldsymbol{Y}$ *– банахово пространство,* $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathcal{L}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$*, оператор* $\boldsymbol{B}$ *непрерывно обратим, и*

$$\|I - AB^{-1}\| < 1.$$

Тогда $\boldsymbol{A}$ *непрерывно обратим и справедливы оценки*

$$\|A^{-1}\| \le \frac{\|B^{-1}\|}{1 - \|I - AB^{-1}\|}, \quad \|B^{-1} - A^{-1}\| \le \frac{\|B^{-1}\|\|I - AB^{-1}\|}{1 - \|I - AB^{-1}\|}.$$

Доказательство. По условию оператор $AB^{-1} \in \mathcal{L}(Y)$. Пользуясь теоремой 3.6.3, мы заключаем, что этот оператор непрерывно обратим.

Лемма 3.6.1. *Пусть* $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, $B \in \mathcal{L}(Y, Z)$ *непрерывно обратимы. Тогда* $BA \in \mathcal{L}(X, Z)$ *непрерывно обратим и* $(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

Доказательство. По условию леммы $A^{-1}B^{-1} \in \mathcal{L}(Z, X)$. В силу ассоциативности композиции операторов $(A^{-1}B^{-1})(BA) = I$. □

Тогда $B^{-1}(AB^{-1})^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$ также непрерывно обратим и

$$(B^{-1}(AB^{-1})^{-1})^{-1} = AB^{-1}B = A.$$

Наконец, поскольку $A^{-1} = B^{-1}(AB^{-1})^{-1}$, то оценки на $\|A^{-1}\|$ и $\|I - A^{-1}\|$ следуют из теоремы 3.6.3. □

Следствие 3.6.3. *Пусть* $\boldsymbol{Y}$ *– банахово пространство,* $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathcal{L}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$*, оператор* $\boldsymbol{B}$ *непрерывно обратим, и*

$$\|B - A\| < \frac{1}{\|B^{-1}\|}.$$

Тогда $\boldsymbol{A}$ *непрерывно обратим и справедливы оценки*

$$\|\boldsymbol{A}^{-1}\| \leq \frac{\|\boldsymbol{B}^{-1}\|}{1-\|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{B}^{-1}\|}, \quad \|\boldsymbol{B}^{-1}-\boldsymbol{A}^{-1}\| \leq \frac{\|\boldsymbol{B}^{-1}\|^2\|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}\|}{1-\|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{B}^{-1}\|}.$$

Доказательство. Вытекает из следствия 3.6.2, поскольку

$$\|\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\| = \|(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}^{-1}\| \leq \|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{B}^{-1}\|.$$

□

3.7 Лекция 24

3.7.1 Спектр оператора. Резольвента

В этом параграфе мы рассмотрим линейный оператор в комплексном нормированном пространстве $\mathbb{X}$. Введение числового параметра позволяет по-новому взглянуть на вопросы разрешимости операторных уравнений и приводит к одному из фундаментальных понятий в теории линейных операторов.

Определение 3.7.1. Число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется *регулярным* для оператора A, если оператор $(A - \lambda I)$ непрерывно обратим. Совокупность всех регулярных $\lambda \in \mathbb{C}$ назовем *резольвентным множеством.* Совокупность всех остальных значений $\lambda \in \mathbb{C}$ называется *спектром* оператора A.

Определение 3.7.2. *Резольвентой* оператора A в нормированном пространстве $\mathbb{X}$ называется оператор $R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$, где λ принадлежит резольвентному множеству.

Обратите внимание, что $R_0 = A^{-1}$, (когда A^{-1} существует), а существование и непрерывность оператора A^{-1} зависят от поведения резольвенты R_λ при $\lambda \to 0$.

В регулярных значениях $\lambda \in \mathbb{C}$ оператор R_λ определен на всем пространстве $\mathbb{X}$. Из теоремы 3.6.2 Банаха об обратном операторе следует, что в точках спектра резольвента либо не существует, либо не определена на всем пространстве $\mathbb{X}$.

Определение 3.7.3. Число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется *собственным значением* оператора A, если $Ax = \lambda x$ для некоторого ненулевого вектора $x \in \mathbb{X}$, называемого собственным вектором оператора A, соответствующим значению λ. Совокупность всех собственных значений называется *точечным спектром* оператора A. Остальная часть спектра называется *непрерывным спектром* оператора A.

Поскольку собственные значения оператора A, соответствующие значению λ, принадлежат ядру оператора $(I - \lambda A)$, то это те и только те значения параметра λ, для которых R_λ не существует.

Пример 3.7.1. Как хорошо известно из курса линейной алгебры (см., например, [10]), спектр всякого линейного оператора в n-мерном пространстве состоит из n собственных значений (с учетом их кратности). Непрерывного спектра такие операторы не имеют.

Предложение 3.7.1. *Спектр ограниченного линейного оператора в банаховом пространстве замкнут.*

Доказательство. Пусть λ – регулярная точка для оператора A, т.е. оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ определен и ограничен на всем пространстве L. Тогда из следствия 3.6.3 вытекает, что оператор $(A-(\lambda+\delta)I)$ непрерывно обратим для всех $|\delta| < \frac{1}{\|R_\lambda\|}$. Таким образом, все точки открытого круга $B(\lambda, \frac{1}{\|R_\lambda\|})$ регулярны. Это означает, что регулярные точки образуют открытое множество, а спектр (т.е. дополнение этого множества) есть множество замкнутое. □

Теорема 3.7.1. *Если A – ограниченный линейный оператор в банаховом пространстве L и $|\lambda| > \|A\|$, то λ – регулярная точка.*

Доказательство. Очевидно, $A - \lambda I = -\lambda(I - \frac{1}{\lambda}A)$. Тогда

$$R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}\left(I - \frac{A}{\lambda}\right)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{\lambda^k}.$$

При $\|A\| < |\lambda|$ этот ряд сходится и задает определенный на всем L ограниченный оператор (см. теорему 3.6.3). Иначе говоря, спектр оператора A содержится в круге $B(0, \|A\|)$. □

Может быть получена и более точная оценка радиуса круга, в котором лежит спектр.

Теорема 3.7.2. *Пусть A – ограниченный линейный оператор в банаховом пространстве L. Тогда существует конечный предел*

$$r_\sigma(A) = \lim_{N\to\infty} \|A^n\|^{1/n},$$

называемый спектральным радиусом *оператора A. Более того, если $|\lambda| > r_\sigma(A)$, то λ – регулярная точка.*

Доказательство.* См., например, [2], с. 257–258. □

3.7.2 Спектр компактного оператора

Для компактных операторов мы можем получить дополнительную информацию о собственных значениях и собственных векторах.

Теорема 3.7.3. *Всякий компактный оператор в банаховом пространстве L имеет при любом $\delta > 0$ лишь конечное число линейно независимых собственных векторов, отвечающих собственным значениям, по модулю превосходящим δ.*

Доказательство. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \ldots$ – какая-либо последовательность собственных значений оператора A (различных или с повторениями) таких, что $|\lambda_k| > \delta$; $x_1, \ldots, x_k, \ldots$ – отвечающая им последовательность собственных векторов.

Если система $\{x_k\}$ линейно независима, то, как мы видели при доказательстве предложения 2.4.4, можно построить такую последовательность векторов $\{y_k\}$, что 1) $y_k \in \mathcal{L}(\{x_k\}_{k=1}^n)$; 2) $\|y_k\| = 1$; 3) $\rho(y_n, \mathcal{L}(\{x_k\}_{k=1}^n) > 1/2$.

Тогда последовательность $\{y_k/\lambda_k\}$ ограничена в силу неравенства $|\lambda_n| > \delta$. Покажем, что из последовательности образов $\{Ay_k/\lambda_k\}$ нельзя выбрать сходящуюся. Действительно, пусть $y_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k$; тогда

$$A\left(\frac{y_n}{\lambda_n}\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha_k \lambda_k x_k}{\lambda_n} + \alpha_n x_n = y_n + z_n,$$

где

$$z_n = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_n} - 1\right) x_k \in \mathcal{L}(\{x_k\}_{k=1}^{n-1}).$$

Поэтому при любых $m > k$

$$\left\|A\left(\frac{y_m}{\lambda_m}\right) - A\left(\frac{y_k}{\lambda_k}\right)\right\| = \|y_m + z_m - y_k - z_k\| =$$

$$\|y_m - (y_k + z_k - z_m)\| > 1/2,$$

поскольку $y_k + z_k - z_m \in \mathcal{L}(\{x_k\}_{k=1}^{n-1})$. Это противоречит компактности оператора A. $\square$

Следствие 3.7.1. *Число линейно независимых собственных векторов, отвечающих данному собственному значению $\lambda \neq 0$ компактного оператора A, конечно. Число собственных значений λ_n компактного оператора A во внешности круга $|\lambda| > |\delta| > 0$ конечно; все собственные значения оператора A можно пронумеровать в порядке невозрастания модулей*

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots$$

Тем не менее, уместно отметить, что компактные операторы в бесконечномерных пространствах могут вообще не иметь ни собственных значений, ни собственных векторов.

Пример 3.7.2. Действительно, пусть оператор $A : l_2 \to l_2$ задан формулой:

$$Ax = A(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = \left(0, x_1, \frac{x_2}{2}, \ldots \frac{x_{n-1}}{n-1} \ldots\right).$$

Этот оператор компактен, поскольку по теореме об ограниченной сходимости

$$\lim_{j\to\infty} \|Ax^{(j)} - Ax^{(0)}\|^2 = \lim_{j\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k^{(j)} - x_k^{(0)}|^2}{k^2} =$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lim_{j\to\infty} \frac{|x_k^{(j)} - x_k^{(0)}|^2}{k^2} = 0$$

для всякой слабо сходящейся к $x^{(0)}$ последовательности $\{x^{(j)}\}_{j=1}^{\infty}$. Покажем, что этот оператор не имеет ни одного собственного значения, а поэтому и ни одного собственного вектора.

Предположим, что существуют такие вектор $x \in X$ и число $\lambda \in \mathbb{C}$, что $Ax = \lambda x$. Тогда

$$\lambda(x_1, x_2, \ldots x_n \ldots) = (0, x_1, \frac{x_2}{2}, \ldots \frac{x_{n-1}}{n-1} \ldots).$$

Если $\lambda = 0$, то немедленно $x = 0$. Если же $\lambda \neq 0$, то $x_1 = 0$, $x_2 = \lambda x_1$, $x_n = \lambda x_{n-1}/(n-1)$, т.е. снова $x = 0$. Таким образом, x не может быть собственным вектором ни при каком $\lambda \in \mathbb{C}$.

Решая уравнение $Ax - \lambda x = y$ видим, что, при $\lambda \neq 0$,

$$x_1 = -y_1/\lambda, \quad x_{k+1} = (x_k/k - y_k)/\lambda, \quad k \in \mathbb{N},$$

т.е.

$$R_\lambda y = (A - I)y/\lambda, \quad \lambda \neq 0.$$

В частности, все точки, кроме начала координат, регулярны.

При $\boldsymbol{\lambda = 0}$ уравнение $\boldsymbol{Ax - \lambda x = y}$ превращается в следующее: $\boldsymbol{Ax = y}$. Последнее не имеет решений, если $\boldsymbol{y}$ отлично от нуля. Значит, оператор $\boldsymbol{R_0}$ не определен на всем пространстве $\mathbb{Y} = \boldsymbol{l_2}$.

Итак, спектр этого оператора состоит только из точки нуль, каковая является точкой непрерывного спектра.

Глава 4

Раздел IV: Операторные уравнения в пространствах Гильберта

4.1 Лекция 25

В этой и следующей лекциях обсуждается интеграл Лебега и пространства интегрируемых по Лебегу функций. Эти понятия необходимы для серьезного обсуждения теории интегральных уравнений в этом разделе. Существует несколько разных подходов к изложению этой теории (см., например, [3], [1], [2]). Выбранный нами подход (см. [2]) опирается на теорию пополнения нормированных пространств. Это позволяет нам быстро прийти к основным определениям и теоремам, но при этом многие важные детали уходят в тень, поэтому знакомство с другими классическими вариантами теории интеграла весьма желательно.

4.1.1 Продолжение линейного непрерывного оператора на пополнение. Пространство Лебега

Напомним, что всякое неполное нормированное пространство $(\boldsymbol{X}, ||\cdot||)$ имеет пополнение $(\bar{\boldsymbol{X}}, ||\cdot||)$, причем, согласно конструкции, восходящей к Г.Кантору (ср. § 1.6, § 2.1.3), элементами пополнения являются классы эквивалентных фундаментальных последовательностей $[\{x_n\}]$ и, по определению, $\{x_n\} \sim \{x'_n\} \Leftrightarrow ||x_n - x'_n|| \to 0$ при $n \to \infty$. Норма в $\bar{X}$ определяется формулой $||[\{x_n\}]|| := \lim_{n\to\infty} ||x_n||$. Отображение $i : X \to \bar{X}$, $i(x) = [\{x, x, x, \ldots, x, \ldots\}]$ — изометрическое вложение X на всюду плотное подмножество в $\bar{X}$, поэтому мы имеем возможность отождествить X с этим подмножеством и считать, что X — всюду плотное подмножество в $\bar{X}$.

Применим эту конструкцию к пространству непрерывных на $[a, b]$ функций $\widetilde{L}_1[a, b]$ с нормой $||x(t)||_{L_1} := \int_a^b |x(t)|\, dt$. Это не полное пространство. Его пополнение обозначается $L_1[a, b]$ и называется *пространством интегрируемых по Лебегу функций на отрезке* $[a, b]$. Название несколько сбивает с толку, так как элементы $L_1[a, b]$ это не функции, а классы эквивалентных фундаментальных последовательностей из непрерывных функций. Одна из целей дальнейшего обсуждения — пояснение этой ситуации.

Вернемся не на долго к абстрактной теории. Следующая важная теорема показывает, как любой линейный непрерывный оператор на неполном пространстве может быть продолжен на его пополнение.

Теорема 4.1.1. *Пусть* $A : (X_1, || \cdot ||_1) \to X_2, || \cdot ||_2)$ *— линейный непрерывный оператор из неполного нормированного пространства* X_1 *в банахово пространство* X_2 *и* $\bar{X}_1$ *— пополнение пространства* X_1*. Тогда существует единственный линейный непрерывный оператор* $\bar{A} : \bar{X}_1 \to X_2$*, продолжающий оператор* A*, то есть,* $\bar{A}|_{X_1} = A$*, причем* $||\bar{A}|| = ||A||$*.*

Доказательство. Пусть $\bar{x} = [\{x_n\}] \in \bar{X}_1$, где $\{x_n\} \subset X_1$ — фундаментальная последовательность. Так как $||Ax_n - Ax_m||_2 \leq ||A||||x_n - x_m||_1 \to 0$ при $n, m \to \infty$, то $\{Ax_n\}$ — фундаментальная последовательность в X_2, и, значит, ввиду полноты X_2, существует

$$\lim_{n\to\infty} Ax_n \in X_2.$$

Положим по определению $\bar{A}\bar{x} = \lim_{n\to\infty} Ax_n$. Убедимся в корректности этого определения. Пусть $\{x_n\} \sim \{x'_n\}$, то есть $||x_n - x'_n|| \to 0$ при $n \to \infty$. Если $y = \lim_{n\to\infty} Ax_n$, $y' = \lim_{n\to\infty} Ax'_n$, то

(4.1.1)

$$0 \le ||y' - y||_2 = ||\lim_{n\to\infty} Ax'_n - \lim_{n\to\infty} Ax_n||_2 = \lim_{n\to\infty} ||A(x'_n - x_n)||_2 \le$$
$$\le \lim_{n\to\infty} ||A||||x'_n - x_n||_1 \to 0, \quad n \to \infty.$$

Значит, $||y' - y||_2 = 0$, то есть, $y' = y$. Линейность оператора $\bar{A}$ легко доказывается на основе определений. Докажем ограниченность $\bar{A}$. Имеем

$$||\bar{A}\bar{x}|| = ||\lim_{n\to\infty} Ax_n||_2 = \lim_{n\to\infty} ||Ax_n||_2 \le ||A|| \lim_{n\to\infty} ||x_n||_1 = ||A||||\bar{x}||_1.$$

Значит, $||\bar{A}|| \le ||A||$. Обратное неравенство очевидно. Единственность $\bar{A}$ легко следует из того, что X_1 всюду плотно в $\bar{X}_1$. □

Так как поля вещественных и комплексных чисел — полные нормированные пространства, то справедливо

Следствие 4.1.1. *Любой линейный непрерывный функционал на неполном нормированном пространстве может быть единственным образом продолжен до линейного непрерывного функционала на пополнение исходного пространства с сохранением нормы.*

Вернемся к теории интегрирования. На пространстве $\widetilde{L}_1[a, b]$ определен интеграл Римана $\int_a^b x(y)\,dt$. Очевидно, что это линейный непрерывный функционал на $\widetilde{L}_1[a, b]$ с единичной нормой (докажите!). Поэтому можно применить следствие 4.1.1 и получить линейный непрерывный функционал на пространстве $L_1[a,b]$. Это продолжение и называется *интегралом Лебега.*

Определение 4.1.1. Пусть $\bar{x} \in L_1[a,b]$. *Интегралом Лебега*

$$\int_a^b \bar{x}\,dt$$

называется $\lim_{n\to\infty} \int_a^b x_n(t)\,dt$, где $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность непрерывных функций, сходящаяся к $\bar{x}$, то есть $\bar{x} = [\{x_n\}]$.

Недостаток этого определения в том, что мы привыкли интегрировать *функции*, а элементы $L_1[a,b]$ — не функции, а достаточно сложно устроенные объекты. Следует отметить, что так же сложно устроены все объекты, полученные в процессе пополнения пространств: иррациональные числа, элементы пространств $L_p[a,b]$, элементы пространств Соболева $W_p^l(G)$ и $H^l(G)$ для области G и т.п. Поэтому важной частью теории является возможно более простое описание элементов этих пространств. Для иррациональных чисел — это теория десятичных дробей, для пространств Соболева — знаменитые теоремы вложения Соболева, для пространств Лебега — теория классов совпадающих почти всюду функций, к которой мы теперь переходим.

4.1.2 Множества меры нуль. Сходимость почти всюду

Определение 4.1.2. Множество $M \subset [a,b]$ называется *множеством меры нуль*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует не более чем счетная система интервалов (α_n, β_n), покрывающая множество M и имеющая суммарную длину меньше ε, то есть 1) $M \subset \cup_n (\alpha_n, \beta_n)$, 2) $\sum_n (\beta_n - \alpha_n) < \varepsilon$.

Пример 4.1.1. Любое счетное множество точек есть множество меры нуль.

Действительно, пусть $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [a,b]$. Для любого $\varepsilon > 0$ и любого n возьмем интервал $\left(x_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}, x_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}\right) = (\alpha_n, \beta_n)$. Ясно, что $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \cup_n(\alpha_n, \beta_n)$ и $\sum(\beta_n - \alpha_n) = \sum_1^\infty \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. □

Существуют примеры множеств меры нуль, имеющие мощность континуума, один из знаменитейших примеров — канторово совершенное множество (см. [[1], стр. 63]).

Далее мы применяем следующее соглашение: если некоторое утверждение справедливо для всех t из $[a,b]$, кроме, быть может, множества точек меры нуль, то мы будем говорить, что утверждение верно.

Пример 4.1.2. 1. Функция $y = \cos t$ почти всюду отлична от нуля;

2. Функция Дирихле

$$D(t) := \begin{cases} 1, & \text{если } t \text{ рационально}, \\ 0, & \text{если } t \text{ иррационально}, \end{cases}$$

равна нулю почти всюду, так как множество рациональных чисел счетно и, значит, имеет меру нуль.

Определение 4.1.3. Две функции $x_1(t)$ и $x_2(t)$ будем называть *эквивалентными* (записываем: $x_1(t) \sim x_2(t)$), если они равны почти всюду.

Например, функция Дирихле эквивалентна нулю.

Определение 4.1.4. Если у последовательности функций $\{x_n(t)\}$ существует предел $x(t)$ почти всюду, то говорят, что x_n *сходится к* x *почти всюду* и записывают это так: $x_n \xrightarrow{\text{п.в.}} x$.

Доказательство следующей теоремы показывает, как у последовательности непрерывных функций, сходящейся по норме $\widetilde{L}_1[a,b]$, извлечь сходящуюся почти всюду подпоследовательность.

Далее, если $A \subset [a,b]$ покрывается множеством интервалов суммарной длины меньше δ, то будем записывать это формулой $|A| < \delta$.

Теорема 4.1.2. *Если* $\{x_n\}$ *— фундаментальная последовательность из* $\widetilde{L}_1[a,b]$, *то существует подпоследовательность* $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$*:*

1) $x_{n_k} \xrightarrow{\text{п.в.}} x_0(t)$ *при* $k \to \infty$, *где* $x_0(t)$ *— некоторая функция на* $[a,b]$*;*

2) найдется $m_0 > 0$ *такое, что для всякого* $m > m_0$ *существует* $B_m \subset [a,b]$, *на котором* $|x_0(t) - x_{n_k}(t)| < \frac{1}{2^{k-1}}$ *для всех* $k \geq m$ *и* $|[a,b] \setminus B_m| < \frac{1}{2^m}$, $B_m \subset B_{m+1}$.

Доказательство. Так как $||x_m - x_n||_{L_1} \to 0$ при $n, m \to \infty$, то существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$:

$$||x_{n_{k+1}} - x_{n_k}||_{L_1} < \frac{1}{2^{5k}}. \tag{4.1.2}$$

Пусть $y_k := x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$. По теореме Вейерштрасса о приближении непрерывной функции многочленом существует такой многочлен $p_k(t)$, что для всех $t \in [a,b]$

$$|p_k(t) - y_k(t)| < \frac{1}{2^{5k}(b-a+1)} \tag{4.1.3}$$

Тогда из неравенств (4.1.2) и (4.1.3) получаем

(4.1.4)

$$||p_k||_{L_1} \le ||y_k||_{L_1} + ||p_k - y_k||_{L_1} < \frac{1}{2^{5k}} + \frac{b-a}{2^{5k}(b-a+1)} < \frac{1}{2^{4k}}$$

Рассмотрим множество

$$A_k := \{t \in [a,b] : \ |p_k(t)| \ge \frac{1}{2^{2k}}\}.$$

Очевидно, что A_k представляет собой либо конечную систему непересекающихся отрезков и точек, либо пустое множество. Поэтому мы можем вычислить интеграл Римана от $|p_k(t)|$ по множеству A_k и получить оценку

$$|A_k|\frac{1}{2^{2k}} \le \int_{A_k} |p_k(t)|\, dt \le ||p_k||_{L_1} < \frac{1}{2^{4k}}. \tag{4.1.5}$$

Значит, $|A_k| < \frac{1}{2^{2k}}$. Положим $\widetilde{A}_m := \cup_{k=m}^{\infty} A_k$ и $B_m := [a,b] \backslash \widetilde{A}_m$. Легко доказать, что $|\widetilde{A}_m| < \frac{1}{2^m}$, а значит, существует m_0 такой, что для всех $m > m_0$, $B_m \ne \emptyset$. Далее, $|[a,b] \setminus B_m| = |\widetilde{A}_m| < \frac{1}{2^m}$, $B_m \subset B_{m+1}$ и для всех $t \in B_m = [a,b] \setminus \cup_{k=m}^{\infty} A_k = \cup_{k=m}^{\infty}\{[a,b] \setminus A_k\}$ при $k \ge m$ $|p_k(t)| < \frac{1}{2^{2k}}$. Учитывая это неравенство и неравенство (4.1.3), получаем

$$|y_k(t)| \le |p_k(t)| + |y_k(t) - p_k(t)| < \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{2^{5k}(b-a+1)} < \frac{1}{2^k}.$$

Тем самым на B_m доказана сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} |y_k(t)| = \sum_{k=1}^{\infty} |x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t)|. \tag{4.1.6}$$

Пусть теперь $U \subset [a,b]$ — множество таких точек, где этот ряд расходится (то есть, его сумма равна бесконечности). Тогда для любого $m > m_0$, $U \subset \{[a,b] \setminus B_m\} = \widetilde{A}_m$. Поэтому, для любого $\varepsilon > 0$ существует m такой, что $\frac{1}{2^m} < \varepsilon$ и $|U| \le |\widetilde{A}_m| < \frac{1}{2^m} < \varepsilon$, то есть ряд (4.1.6) сходится почти всюду. Следовательно, почти всюду сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}(x_{n_{k+1}}(t)-x_{n_k}(t)). \tag{4.1.7}$$

Пусть $f(t)=\sum_{k=1}^{\infty}(x_{n_{k+1}}(t)-x_{n_k}(t))$ в точках сходимости ряда (4.1.7) и равна нулю в остальных точках отрезка $[a,b]$. Тогда

$$f(t)\overset{\text{п.в.}}{=}\lim_{M\to\infty}\sum_{k=1}^{M}(x_{n_{k+1}}(t)-x_{n_k}(t))=\lim_{M\to\infty}x_{n_{M+1}}(t)-x_{n_1}(t)$$

и $\lim_{k\to\infty}x_{n_k}(t)\overset{\text{п.в.}}{=}f(t)+x_{n_1}(t)=:x_0(t)$. Первое утверждение теоремы доказано.

Далее, для всех $t\in B_m$ и $k\geq m$ имеем

$$|x_0(t)-x_{n_k}(t)|=$$
$$\left|f(t)+x_{n_1}(t)-\left(x_{n_1}(t)+\sum_{j=1}^{k-1}(x_{n_{j+1}}(t)-x_{n_j}(t))\right)\right|\leq$$
$$\leq\sum_{j=k}^{\infty}|x_{n_{j+1}}(t)-x_{n_j}(t)|<\sum_{j=k}^{\infty}\frac{1}{2^j}=\frac{1}{2^{k-1}}.$$

□

Следствие 4.1.2. *Если* $\{x_n\}\subset\widetilde{L}_1[a,b]$, $||x_n||_1\to 0$, $n\to\infty$, *то существует такая подпоследовательность* $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, *что* $x_{n_k}\xrightarrow{\text{п.в.}}0$ *при* $k\to\infty$.

Доказательство. Выбирая подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ таким образом, чтобы $||x_{n_k}||_{L_1}<\frac{1}{2^{5k}}$ и повторяя рассуждения, приведшие в доказательстве предыдущей теоремы к выводу о сходимости ряда (4.1.7), докажем, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty}|x_{n_k}(t)|$ сходится почти всюду, откуда сразу следует утверждение. □

4.2 Лекция 26

4.2.1 Функции, интегрируемые по Лебегу

Сейчас мы докажем теоремы, позволяющие установить однозначное соответствие между элементами пространства $L_1[a,b]$ и некоторыми классами эквивалентных (относительно равенства почти всюду) функций.

В следующей теореме доказывается, что предельные функции эквивалентных последовательностей из $\widetilde{L}_1[a,b]$ совпадают почти всюду.

Теорема 4.2.1. *Если* $\bar{x} = [\{x_n\}] = [\{y_n\}] \in L_1[a,b]$ *и, при* $n \to \infty$, $x_n \xrightarrow{\text{п.в.}} x_0(t)$, $y_n \xrightarrow{\text{п.в.}} y_0(t)$, *то* $x_0(t) \sim y_0(t)$.

Доказательство. По условию, $||x_n - y_n||_{L_1} \to 0,\ n \to \infty$, поэтому существует подпоследовательность $\{x_{n_k} - y_{n_k}\}$, (см. следствие 4.1.2), для которой $\lim_{k\to\infty}(x_{n_k} - y_{n_k}) \overset{\text{п.в.}}{=} 0$. Значит,

$$y_0(t) \overset{\text{п.в.}}{=} \lim_{n\to\infty} y_n(t) \overset{\text{п.в.}}{=} \lim_{k\to\infty} y_{n_k}(t) \overset{\text{п.в.}}{=}$$

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k}(t) \overset{\text{п.в.}}{=} \lim_{n\to\infty} x_n(t) \overset{\text{п.в.}}{=} x_0(t).$$

□

Тем самым, мы получаем корректно определенное отображение из пространства $L_1[a,b]$ в множество классов эквивалентных (относительно равенства почти всюду) функций на $[a,b]$. Следующая теорема утверждает, что это отображение инъективно.

Теорема 4.2.2. *Пусть* $\bar{x} = [\{x_n\}]$ *и* $\bar{y} = [\{y_n\}]$ *— две точки из* $L_1[a,b]$. *Если при* $n \to \infty \quad x_n \xrightarrow{\text{п.в.}} x_0$ *и* $y_n \xrightarrow{\text{п.в.}} x_0$, *то* $\bar{x} = \bar{y}$.

Доказательство. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ состоят из многочленов. С помощью оценок, наподобие тех, что были использованы в доказательстве теоремы 4.1.2, докажем, что $||(x_n - y_n)||_{L_1} \to 0$ при $n \to \infty$. Детали см. [2, с. 85–87]. □

Определение 4.2.1. Функция $x(t)$ называется *интегрируемой по Лебегу* на отрезке $[a, b]$, если существует фундаментальная в интегральной норме пространства $L_1[a, b]$ последовательность непрерывных функций $\{x_n(t)\}$ такая, что $x_n \xrightarrow{\text{п.в.}} x(t)$ при $n \to \infty$. В этом случае *интегралом Лебега* функции $x(t)$ по отрезку $[a, b]$ называется $\lim_{n\to\infty} \int_a^b x_n(t)\, dt$.

Доказанные ранее теоремы мы теперь можем переформулировать следующим образом:

Пространство Лебега $L_1[a, b]$ *изометрично фактор-пространству пространства интегрируемых по Лебегу на* $[a, b]$ *функций по отношению эквивалентности "равны почти всюду".*

Понятие интеграла Лебега позволяет существенно расширить понятие длины множества и определить *меру Лебега* множества на прямой, играющую важную роль не только в функциональном анализе и теории функций, но и в теории вероятностей.

Определение 4.2.2. Подмножество A отрезка $[a, b]$ называется *измеримым*, если характеристическая функция χ_A множества A, равная 1 в точках из A и 0 в точках, не принадлежащих A, интегрируема по Лебегу. В этом случае, *мерой Лебега* множества A называется интеграл по $[a, b]$ от характеристической функции χ_A.

Легко доказать, что если функция интегрируема по Риману, то она интегрируема по Лебегу и интеграл Лебега от нее равен интегралу Римана, поэтому мы в дальнейшем все встречающиеся интегралы будем понимать как интегралы Лебега.

Пример 4.2.1. Если функция равна нулю почти всюду, то она интегрируема по Лебегу и интеграл Лебега от нее равен нулю. Например, хорошо известно, что функция Дирихле (см. пример 4.1.2) не интегрируема по Риману, но по Лебегу она интегрируема (так как равна нулю почти всюду) и интеграл от нее равен нулю.

4.2.2 Основные свойства интеграла Лебега

Так как интеграл Лебега расширяет понятие интеграла Римана, то все хорошо известные свойства интеграла Римана остаются справедливыми и для интеграла Лебега. Для полноты картины в следующем предложении мы перечислим эти свойства.

Предложение 4.2.1. *1) Если $x_1(t)$, $x_2(t) \in L_1[a,b]$, то для любых чисел α и β $\alpha x_1 + \beta x_2 \in L_1[a,b]$ и*

$$\int_a^b \alpha x_1 + \beta x_2 \, dt = \alpha \int_a^b x_1 \, dt + \beta \int_a^b x_2 \, dt.$$

2) Если $x(t) \in L_1[a,b]$, то $|x(t)| \in L_1[a,b]$ и

$$\left| \int_a^b x(t) \, dt \right| \leq \int_a^b |x(t)| \, dt.$$

3) Если $x_1(t)$, $x_2(t) \in L_1[a,b]$ и $x_1(t) \leq x_2(t)$ почти всюду, то

$$\int_a^b x_1(t) \, dt \leq \int_a^b x_2(t) \, dt.$$

4) Если $x(t) \in L_1[a,b]$, $x(t) \geq 0$ и $\int_a^b x(t) \, dt = 0$, то $x(t) = 0$ почти всюду.

5) Если $\boldsymbol{x_1(t) \in L_1[a,b]}$, $\boldsymbol{x_2(t) \in L_1[a,b]}$, *то* $\boldsymbol{\max\{x_1(t), x_2(t)\} \in L_1[a,b]}$ *и* $\boldsymbol{\min\{x_1(t), x_2(t)\} \in L_1[a,b]}$.

Докажем свойство 5). Доказательство остальных свойств оставляем в качестве несложного упражнения.

Для заданной функции $\boldsymbol{x(t)}$ определим ее положительную и отрицательную части следующим образом:

$$\boldsymbol{x^+(t) := \begin{cases} x(t), & \text{если } x(t) \geq 0, \\ 0, & \text{если } x(t) < 0, \end{cases}}$$

$$\boldsymbol{x^-(t) := \begin{cases} 0, & \text{если } x(t) > 0, \\ x(t), & \text{если } x(t) \leq 0. \end{cases}}$$

Ясно, что $\boldsymbol{x^+(t) = (|x(t)| + x(t))/2}$ и $\boldsymbol{x^-(t) = (|x(t)| - x(t))/2}$, поэтому по свойствам 1) и 2) $\boldsymbol{x^+(t) \in L_1[a,b]}$ и $\boldsymbol{x^-(t) \in L_1[a,b]}$. Доказываемое утверждение теперь следует из формул

$$\boldsymbol{\max\{x_1(t), x_2(t)\} = (x_1(t) - x_2(t))^+ + x_2(t),}$$
$$\boldsymbol{\min\{x_1(t), x_2(t)\} = -\max\{-x_1(t), -x_2(t)\}.}$$

□

Следующая теорема обобщает 4.1.2. Ее несложное доказательство мы оставляем в качестве упражнения (см. также [2], с. 92).

Теорема 4.2.3. *Если* $\boldsymbol{\{x_n(t)\} \subset L_1[a,b]}$ *и* $\boldsymbol{||x_n(t) - x(t)||_{L_1} \to 0}$ *при* $\boldsymbol{n \to \infty}$, *то существует подпоследовательность* $\boldsymbol{\{x_{n_k}(t)\}}$ *такая, что* $\boldsymbol{x_{n_k}(t) \xrightarrow{\text{п.в.}} x(t)}$ *при* $\boldsymbol{k \to \infty}$.

Теорема 4.2.4. (Теорема Беппо Леви о монотонной сходимости) *Если* $\boldsymbol{\{x_n(t)\}}$ *— неубывающая последовательность интегрируемых по Лебегу функций, причем интегралы от* $\boldsymbol{x_n(t)}$ *рав-*

номерно ограничены, $\int_a^b x_n(t)\,dt \le C$, *то* $x_n(t)$ *почти всюду сходится к интегрируемой по Лебегу функции* $x(t)$ *и*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b x_n(t)\,dt = \int_a^b x(t)\,dt.$$

Доказательство. Из свойства 3) предложения 4.2.1 и условия теоремы следует, что последовательность интегралов $\{\int_a^b x_n(t)\,dt\}$ сходится, как монотонная, ограниченная сверху числовая последовательность. А так как для любого $p \ge 1$, $x_{n+p}(t) - x_n(t) \ge 0$, то $\int_a^b |x_{n+p}(t) - x_n(t)|\,dt \to 0,\ n \to \infty$, то есть, $\{x_n(t)\}$ — ф.п. в $L_1[a,b]$. Но $L_1[a,b]$ — полно, значит, найдется $x_0(t) \in L_1[a,b]$ такая, что $x_n(t) \to x_0(t)$ в $L_1[a,b]$. Следовательно, по теореме 4.2.3 существует сходящаяся почти всюду подпоследовательность $x_{n_k}(t) \xrightarrow{\text{п.в.}} x_0(t)$. Утверждение теоремы теперь легко следует из простого факта: если сходится подпоследовательность монотонной последовательности, то сходится и сама последовательность. □

Следствие 4.2.1. *Пусть* $\{x_n(t)\} \in L_1[a,b]$ *— такая невозрастающая последовательность, что найдется* K *такой, что для всех* n, $\int_a^b x_n(t)\,dt \ge K$, *тогда существует функция* $x(t) \in L_1[a,b] : x_n(t) \xrightarrow{\text{п.в.}} x(t)$ *при* $n \to \infty$ *и* $\int_a^b x(t)\,dt = \lim_{n\to\infty}\int_a^b x_n(t)\,dt$.

Теорема 4.2.5. (теорема Лебега об ограниченной сходимости) *Пусть* $x_n(t)$ *— последовательность интегрируемых по Лебегу функций и* $|x_n(t)| \le y(t)$, *где* $y(t) \in L_1[a,b]$. *Если* $x_n(t) \xrightarrow{\text{п.в.}} x(t)$ *при* $n \to \infty$, *то* $x(t) \in L_1[a,b]$ *и* $\int_a^b x(t)\,dt = \lim_{n\to\infty}\int_a^b x_n(t)\,dt$.

Доказательство. Положим

$$\varphi_n(t) = \inf\{x_n(t), x_{n+1}(t), \ldots\} = \lim_{k\to\infty}\min\{x_n(t), x_{n+1}(t), \ldots, x_{n+k}(t)\}.$$

По следствию из теоремы Беппо Леви и свойству 5) предложения 4.2.1 $\varphi_n(t) \in L_1[a,b]$. Далее, 1) $\{\varphi_n(t)\}$ не убывает; 2) $\varphi_n(t) \leq x_n(t)$ и 3) $|\varphi_n(t)| \leq y(t) \in L_1[a,b]$.

Аналогичными свойствами обладает последовательность

$$\psi_n(t) = \sup\{x_n(t), x_{n+1}(t), \ldots\},$$

то есть, 1) $\{\psi_n(t)\}$ не возрастает; 2) $x_n(t) \leq \psi_n(t)$; 3) $|\psi_n(t)| \leq y(t) \in L_1[a,b]$.

Пусть теперь $x_n(t_0) \to x(t_0),\ n \to \infty$, тогда для всех $\varepsilon > 0$ существует N такой, что для любого $n > N$,

$$x(t_0) - \varepsilon < x_n(t_0) < x(t_0) + \varepsilon,$$

поэтому

$$x(t_0) - \varepsilon \leq \psi_n(t_0) = \sup_{k \geq n > N} \{x_k(t_0)\} \leq x(t_0) + \varepsilon,$$

$$x(t_0) - \varepsilon \leq \varphi_n(t_0) = \inf_{k \geq n > N} \{x_k(t_0)\} \leq x(t_0) + \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) \overset{\text{п.в.}}{=} \lim_{n\to\infty} \psi_n(t) \overset{\text{п.в.}}{=} x(t) \overset{\text{п.в.}}{=} \lim_{n\to\infty} x_n(t).$$

Значит, по теореме Беппо Леви

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(t)\, dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \psi_n(t)\, dt = \int_a^b x(t)\, dt,$$

а так как

$$\int_a^b \varphi_n(t)\, dt \leq \int_a^b x_n(t)\, dt \leq \int_a^b \psi_n(t)\, dt,$$

то $\lim_{n\to\infty} \int_a^b x_n(t)\, dt = \int_a^b x(t)\, dt$ □

Следствие 4.2.2. (Теорема Фату) *Пусть $x_n(t)$ — последовательность интегрируемых по Лебегу, неотрицательных на $[a,b]$*

функций с равномерно ограниченными интегралами, $\int_a^b x_n(t)\,dt \le C$. *Если* $x_n \xrightarrow{\text{п.в.}} x(t)$ *при* $n \to \infty$, *то* $x(t) \in L_1[a,b]$ *и* $\int_a^b x(t)\,dt \le C$.

Доказательство. Как в доказательстве теоремы Лебега об ограниченной сходимости, положим

$$\varphi_n(t) = \inf\{x_n(t), x_{n+1}(t), \dots\}.$$

Тогда $\{\varphi_n(t)\}$ — неубывающая последовательность,

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) \overset{\text{п.в.}}{=} \lim_{n\to\infty} x_n(t) \overset{\text{п.в.}}{=} x(t)$$

и $\int_a^b \varphi_n(t)\,dt \le \int_a^b x_n(t)\,dt \le C$. Значит, по теореме Беппо Леви, $x(t) \in L_1[a,b]$ и $\int_a^b x(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(t)\,dt \le C$. □

4.2.3 Кратный интеграл Лебега

Если при построении пространства и интеграла Лебега начать не с пространства $\widetilde{L}_1[a,b]$, а с пространства непрерывных функций $\widetilde{L}_1(P)$, где $P = [a_1,b_1] \times \dots \times [a_n,b_n]$ — прямоугольный параллелепипед в $\mathbb{R}^n$, а норма задается формулой

$$||x(t_1,\dots,t_n)|| = \int\int\cdots\int_P |x(t_1,\dots,t_n)|\,dt_1\cdots dt_n,$$

то мы получим пространство интегрируемых по Лебегу функций нескольких переменных $L_1(P)$, а интеграл Римана на $\widetilde{L}_1(P)$ продолжится до интеграла Лебега на $L_1(P)$. Все доказанные выше теоремы для случая интеграла Лебега на $[a,b]$ либо дословно переносятся, либо легко обобщаются на случай кратного интеграла Лебега. Но следующая важная теорема описывает новую, часто встречающуюся в приложениях, ситуацию.

Теорема 4.2.6. (Фубини) *Если* $x(t,s) \in L_1([a_1,b_1] \times$

$[a_2, b_2])$, *то при почти всех* $t \in [a_1, b_1]$ *существует интеграл* $\int_{a_2}^{b_2} x(t,s)\,ds$ *и соответствие* $t \mapsto \int_{a_2}^{b_2} x(t,s)\,ds$ *определяет интегрируемую на* $[a_1, b_1]$ *функцию, причем*

$$\int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} x(t,s)\,ds \right) dt = \int\int_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]} x(t,s)\,dt\,ds.$$

Аналогичная теорема справедлива и для интегрируемых функций большего числа переменных, их можно интегрировать последовательно по каждой переменной или по отдельным группам переменных или по всем переменным, как и в классическом анализе.

4.3 Лекция 27

4.3.1 Сопряженный оператор. Случай евклидовых пространств

Перейдем к рассмотрению операторных уравнений в евклидовых пространствах. Поскольку в конечномерных пространствах линейные операторы задаются матрицами, то все основные вопросы поведения таких операторов решены в рамках стандартного курса линейной алгебры. Поэтому в данном разделе мы в первую очередь преследуем цель изучить операторные уравнения в пространствах Гильберта.

Пусть $A : H_1 \to H_2$ – ограниченный оператор в евклидовых пространствах H_i.

Задача **4.3.1.** *По заданному элементу $y \in H_2$ найти такой элемент $x \in H_1$, что*

$$Ax = y. \tag{4.3.1}$$

Наличие в этих пространствах скалярного произведения и ортогональных базисов позволит нам более конструктивно описать условия разрешимости уравнений и построить их точные и приближенные решения.

Мы начнем с описания образа линейных операторов в полных евклидовых пространствах. Как и в случае пространств Банаха нам понадобится сопряженный оператор, но адаптированный к новой ситуации.

Согласно теореме об общем виде линейного непрерывного функционала, отображения $\tau_i : H_i \to H_i^*$, сопоставляющие каждому $y \in H_i$ линейный функционал $(\tau_i y)(x) = (x, y)$ есть изоморфизмы (или сопряженные изоморфизмы, если H_i комплексно) на H_i^*.

Тогда отображение $\tilde{A}^* = \tau_1^{-1}A^*\tau_2 : H_2 \to H_1$ есть линейный ограниченный оператор, удовлетворяющий соотношению:

$$(x, \tilde{A}^*y)_1 = \tau_1(\tilde{A}^*y)(x) = (A^*\tau_2 y)(x) = (\tau_2 y)(Ax) = (Ax, y)_2$$

для всех $x \in H_1$, $y \in H_2$. Поскольку τ_i изометрии, то

$$\|\tilde{A}^*\| = \|A^*\| = \|A\|.$$

Учитывая вышеизложенное, в гильбертовых пространствах H_i более естественно называть сопряженным к оператору $A : H_1 \to H_2$ оператор $\tilde{A}^* : H_2 \to H_1$. Чтобы не усложнять обозначений, мы будем обозначать оператор $\tilde{A}^*$ через A^*. Другими словами, мы будем называть оператор $A^* : H_2 \to H_1$ сопряженным к оператору $A : H_1 \to H_2$ в евклидовых пространствах H_i, если

$$(Ax, y)_2 = (x, A^*y)_1 \quad \text{для всех } x \in H_1, y \in H_2.$$

Предложение 4.3.1. *Если $A, B \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ в евклидовых пространствах H_i, то $(aA + bB)^* = \overline{a}A^* + \overline{b}B^*$, $(AB)^* = B^*A^*$, $(A^*)^* = A$, $I^* = I$.*

Доказательство. Доказать самостоятельно. □

Лемма 4.3.1. (об аннуляторе ядра) *Пусть A – ограниченный линейный оператор, отображающий евклидово пространство H_1 в евклидово пространство H_2. Тогда $\overline{R(A)} = (\ker A^*)^\perp$, где*

$$(\ker A)^\perp = \{y \in H_2 : \ (z, y)_2 = 0 \textit{ для всех } z \in \ker A^*\}.$$

Доказательство. Покажем сначала, что $R(A) \subset (\ker A^*)^\perp$. Если $y \in R(A)$, то существует такой элемент $x \in H_1$, что $Ax = y$, и для всех $z \in \ker A^*$ мы имеем:

$$(z, y)_2 = (z, Ax)_2 = (A^*z, x)_1 = 0,$$

т.е. $y \in \ker A^*$.

Если же $y \in \overline{R(A)}$, то найдется такая последовательность $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset H_1$, что $\lim_{k\to\infty} Ax_k = y$. Тогда, в силу непрерывности функционала f_z, определенного элементом $z \in \ker A^*$,

$$(z, y)_2 = f_z(y) = f_z\left(\lim_{k\to\infty} Ax_k\right) = \lim_{k\to\infty} f_z(Ax_k) = \lim_{k\to\infty}(z, Ax_k)_2$$

$$\lim_{k\to\infty}(A^*z, x_k) = \lim_{k\to\infty} 0(x_k) = 0.$$

Обратно, так как $\overline{R(A)} \subset (\ker A^*)^{\perp}$, то $\ker A^* \oplus \overline{R(A)} \subset H_2$.

Пусть $y \in H_2$ ортогонален $\ker A^* \oplus \overline{R(A)}$. Тогда $y \in H_2$ ортогонален как $\ker A^*$ так и $\overline{R(A)}$. Следовательно, $(A^*y, x)_{H_1} = (y, Ax)_{H_2} = 0$ для всех $x \in H_1$, т.е. $A^*y = 0$, а значит, $y \in \ker A^*$. Поскольку $y \in (\ker A^*)^{\perp}$, то $y = 0$.

Таким образом, мы доказали, что $\ker A^* \oplus \overline{R(A)} = H_2$. С другой стороны, $\ker A^*$ является замкнутым подпространством в H_2, и $H_2 = \ker A^* \oplus (\ker A^*)^{\perp}$. В силу единственности разложения мы заключаем, что $\overline{R(A)} = (\ker A)^{\perp}$. □

Из предложения 4.3.1 и леммы 4.3.1 следует, что справедливы следующие ортогональные разложения:

$$H_1 = \ker A \oplus \overline{R(A^*)}, \quad H_2 = \ker A^* \oplus \overline{R(A)}. \tag{4.3.2}$$

Итак, для разрешимости задачи 4.3.1 необходимо, чтобы элемент был ортогонален $\ker A^*$. В частности, нам нужно уметь строить оператор A^* и находить его ядро.

Лемма 4.3.1 позволяет прояснить, что означает корректность по Адамару применительно к задаче 4.3.1. На языке операторов это означает, что

1а) $R(A) = H_2$;

2а) $\ker A = \{0\}$;

3а) оператор A^{-1} непрерывен (причем 3а) вытекает из 1а), 2а) и теоремы Банаха об обратном операторе, если пространства полны).

Замечание 4.3.1. Если образ оператора A незамкнут, то задача 4.3.1 некорректна (не может непрерывно зависеть от начальных данных).

Если же $R(A)$ замкнут, то, заменяя H_1 на $\tilde{H}_1 = (\ker A)^{\perp}$, а H_2 на $\tilde{H}_2 = (\ker A^*)^{\perp}$, мы получаем корректную задачу с оператором $\tilde{A} = A|_{\tilde{H}_1}$, эквивалентную исходной.

В самом деле, оператор $\tilde{A}$ инъективен, так как $\tilde{A}x = 0$ означает, что $x \in (\ker A)^{\perp} \cap \ker A = \{0\}$. Кроме того, из замкнутости образа оператора и леммы 4.3.1 вытекает, что $R(\tilde{A}) = \overline{R(A)} = \tilde{H}_2$.

Что касается эквивалентности задач, то из разрешимости операторного уравнения $\tilde{A}x = y \in \tilde{H}_2$ в пространстве $\tilde{H}_1$ следует разрешимость операторного уравнения $Ax = y \in \tilde{H}_2$ и существование элемента $y \in \tilde{H}_2 \subset H_2$.

Обратно, из существования решения операторного уравнения $Ax = y \in H_2$ и леммы 4.3.1 следует, что $y \in \tilde{H}_2$. А разложение (4.3.2) гарантирует нам, что $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in \ker A$, $x_2 \in \tilde{H}_1$. В частности, $\tilde{A}x_2 = A(x - x_1) = y$, а значит, операторное уравнение $\tilde{A}x = y$ разрешимо.

Таким образом, для корректности задачи по Адамару ключевой является замкнутость образа оператора. Такие операторы называются нормально разрешимыми. Ниже мы выделим достаточно широкий класс операторов, которые имеют замкнутый образ.

4.3.2 Самосопряженные операторы

Выделим очень важный класс линейных операторов в пространствах Гильберта.

Определение 4.3.1. Ограниченный линейный оператор A, действующий в евклидовом пространстве $\boldsymbol{H}$ будем называть *самосопряженным,* если $(\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Ay})$ для всех $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{H}$.

Оказывается, задачу 4.3.1 можно всегда свести к ситуации, когда оператор самосопряжен.

Лемма 4.3.2. *Задача (4.3.1) разрешима в том и только том случае, когда*

1) $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{0}$ *для всех* $\boldsymbol{z} \in \ker \boldsymbol{A}^*$;

2) разрешимо уравнение $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{y}$.

Доказательство. Необходимость условия 1) немедленно вытекает из леммы 4.3.1 об аннуляторе ядра, согласно которой $(\ker \boldsymbol{A}^*)^\perp = \overline{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})}$. Необходимость условия 2) очевидна.

Обратно, пусть выполнены условия 1) и 2), и $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{H}_1$ есть какое-нибудь решение уравнения $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{y}$ тогда $\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{y} \in \ker \boldsymbol{A}^*$. Поскольку в силу условия 2) вектор $\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{y}$ ортогонален $\ker \boldsymbol{A}^*$, то $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{y}$. $\square$

Заметим, что каждое из условий 1) и 2) по отдельности является только необходимым, но не достаточным, поскольку образ оператора $\boldsymbol{A}$ может быть неплотен и незамкнут в $\boldsymbol{H}_2$.

4.4 Лекция 28

4.4.1 Собственные значения самосопряженных операторов

Предложение 4.4.1. *Все собственные значения самосопряженного оператора A в евклидовом пространстве H действительны. Все собственные векторы самосопряженного оператора, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.*

Доказательство. В самом деле, пусть $Ax = \lambda x$, $\|x\| \neq 0$, тогда

$$\lambda(x, x) = (Ax, x) = (x, Ax) = \overline{\lambda}(x, x),$$

откуда $\lambda = \overline{\lambda}$.

Далее, если $Ax = \lambda x$, $Ay = \mu y$, причем $\mu \neq \lambda$, то

$$\lambda(x, y) = (Ax, y) = (x, Ay) = \mu(x, y),$$

откуда $(x, y) = 0$. □

4.4.2 Теорема Гильберта-Шмидта

Как мы видели в разделе 3, не всякий оператор имеет собственные вектора. Мы выделим один важный класс операторов, которые имеют достаточный запас собственных векторов, чтобы построить из них базис.

Докажем теперь спектральную теорему для компактного самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве.

Теорема 4.4.1. (Гильберт-Шмидт) *Для любого компактного самосопряженного линейного оператора A в гильбертовом про-*

странстве $\boldsymbol{H}$ *существует ортонормированная система* $\{\phi_n\}$ *собственных векторов, отвечающих ненулевым собственным значениям* $\{\lambda_n\}$*, такая что каждый элемент* $x \in H$ *записывается единственным образом в виде*

$$x = \sum_k c_k \phi_k + u'$$

где $x' \in \ker A$*; при этом*

$$Aux = \sum_k c_k \lambda_k \phi_k$$

и если система $\{\phi_k\}$ *бесконечна, то* $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$.

Доказательство. Для доказательства теоремы нам потребуется несколько вспомогательных утверждений.

Сначала нам потребуется следующий простой критерий компактности оператора в гильбертовом пространстве.

Лемма 4.4.1. *Оператор* $A : H_1 \to H_2$ *в полных евклидовых пространствах* H_1*,* H_2 *компактен тогда и только тогда, когда он всякую слабо сходящуюся последовательность переводит в сильно сходящуюся.*

Доказательство. Пусть $A : H_1 \to H_2$ – компактный оператор, а $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H_1$ – какая-нибудь слабо сходящаяся последовательность. Так как всякая слабо сходящаяся последовательность ограничена, то $\{Ax_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ содержит сильно сходящуюся подпоследовательность. С другой стороны, если $x \in H$ есть слабый предел $\{x_n\}$, то

$$\lim_{n\to\infty}(Ax_n, y) = \lim_{n\to\infty}(x_n, A^*y) = (x, A^*y) = (Ax, y)$$

для всех $y \in H$. Значит, $\{Ax_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ слабо сходится к Ax. Так как слабый предел совпадает с сильным, если последний существует, то

$\{Ax_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ не может иметь более одной предельной точки. Другими словами, если какая-нибудь подпоследовательность $\{Ax_{n_k}\}$ последовательности $\{Ax_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ сходится, то она сходится к Ax.

Предположим теперь, что $\{Ax_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ не сходится к Ax. Это значит, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $\mu \in \mathbb{N}$ найдется $\nu_\mu \in \mathbb{N}$

$$\|Ax_{\nu_\mu} - Ax\| \geq \varepsilon. \tag{4.4.1}$$

Так как последовательность $\{x_{\nu_\mu}\}$ ограничена, то она содержит такую подпоследовательность $\{x_{\nu_{\mu_k}}\}$, что $\{Ax_{\nu_{\mu_k}}\}$ фундаментальна. Из полноты пространства следует, что $\{Ax_{\nu_{\mu_k}}\}$ сходится (очевидно, к Ax). Поскольку это невозможно в силу (4.4.1), то $\{Ax_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ сходится сильно.

Обратно, пусть $M \subset H$ – ограниченное множество. Согласно следствию 2.7.1 оно содержит слабо сходящуюся подпоследовательность. Если A переводит ее в сильно сходящуюся, то $A(M)$ предкомпактно, а значит, A компактен. □

Лемма 4.4.2. *Если $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ слабо сходится к $x \in H$, то*

$$\lim_{n\to\infty} Q(x_n) = \lim_{n\to\infty} (Ax_n, x_n) = (Ax, x) = Q(x).$$

Доказательство. В самом деле, для всякого $n \in \mathbb{N}$

$$|(Ax_n, x_n) - (Ax, x)| \leq |(Ax_n, x_n) - (Ax_n, x)| + |(Ax_n, x) - (Ax, x)|.$$

Но

$$|(Ax_n, x_n) - (Ax_n, x)| \leq \|x_n\|\|A(x_n - x)\|,$$

$$|(Ax, x_n) - (Ax, x)| = |(x, A(x - x_n))| \leq \|x\|\|A(x_n - x)\|,$$

и так как числа $\|x_n\|$ ограничены, а $\lim_{n\to\infty} \|A(x_n - x)\|$, то

$$\lim_{n\to\infty} (Ax_n, x_n) = (Ax, x),$$

что и требовалось доказать. □

Лемма 4.4.3. *Если функционал* $|Q(x)| = |(Ax, x)|$, *где* A *самосопряжен, линеен, ограничен и достигает на единичном шаре максимума в точке* x_0, *то из* $(x_0, y) = 0$ *вытекает, что*

$$(Ax_0, y) = (x_0, Ay) = 0.$$

Доказательство. Ясно, что $\|x_0\| = 1$. В самом деле, если $\|x_0\| < 1$, то $Q(x_0/\|x_0\|) = \frac{1}{\|x_0\|^2}Q(x_0) > Q(u_0)$, а это противоречит тому, что функционал Q достигает на единичном шаре максимума в точке x_0.

Положим

$$x = \frac{x_0 + ay}{\sqrt{1 + |a|^2\|y\|^2}},$$

где a – произвольное комплексное число. Так как $\|x_0\| = 1$, а $(x_0, y) = 0$, то

$$\|x\|^2 = \left\| \frac{x_0 + ay}{\sqrt{1 + |a|^2\|y\|^2}} \right\|^2 = 1.$$

Далее,

$$Q(x) = \frac{1}{1 + |a|^2\|y\|^2} \Big(Q(x_0) + \overline{a}(Ax_0, y) + a\overline{(Ax_0, y)} + |a|^2 Q(y) \Big).$$

Ясно, что число a можно выбрать сколь угодно малым по модулю и таким, что $\overline{a}(Ax_0, y) \in \mathbb{R}$ и отрицательно. Тогда, домножая правую и левую части предыдущего равенства на $1 + |a|^2\|v\|^2$, мы заключаем, что

$$Q(x) = Q(x_0) + 2\overline{a}(Ax_0, y) + O(|a|^2).$$

Из последнего равенства ясно, что если $(Ax_0, y) \neq 0$, то $a \in \mathbb{C}$ может быть выбрано настолько малым, что $|Q(x)| > |Q(x_0)|$, что противоречит условию леммы. $\square$

Из леммы 4.4.3 непосредственно вытекает, что если функционал $|Q(x)|$ достигает максимума при $x = u_0$, то x_0 есть собственный вектор оператора A. В самом деле, согласно следствию 2.3.2 вектор x_0 может быть включен в некоторый ортонормированный базис, скажем, $\{x_0, b_1, \dots, b_k, \dots\}$ в H. Тогда согласно лемме 4.4.3 из $(x_0, b_k) = 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$ следует $(Ax_0, b_k) = 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Значит, Ax_0 пропорционален вектору x_0, т.е. $Ax_0 = \lambda x_0$.

Продолжим теперь доказательство теоремы. Будем строить элементы ϕ_k по индукции, в порядке убывания абсолютных величин соответствующих собственных значений

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots$$

Для построения элемента ϕ_1 рассмотрим выражение $|Q(x)| = |(Ax, x)|$ и докажем, что оно на единичном шаре достигает максимума. Пусть

$$S = \sup_{\|x\| \leq 1} |(Ax, x)|$$

и $\{x_k\} \subset \overline{B}(0, 1)$ – такая последовательность, что

$$S = \lim_{k \to \infty} |(Ax_k, x_k)|.$$

Так как единичный шар слабо компактен в H (см. следствие 2.7.1), то из $\{x_k\}$ можно извлечь слабо сходящуюся к некоторому элементу $x_0 \in H$ подпоследовательность $\{x_{k_j}\}$. При этом

$$\|x_0\|^2 = \lim_{k_j \to \infty} (x_0, x_{k_j}) \leq \lim_{k_j \to \infty} \|x_0\| \|x_{k_j}\| \leq \|x_0\|,$$

т.е. $\|x_0\| \leq 1$. В силу леммы 4.4.2

$$|(Ax_0, x_0)| = \lim_{k_j \to \infty} |(Ax_{k_j}, x_{k_j})| = S.$$

Таким образом, функционал $|Q(x)|$ достигает максимума при $x = x_0$, а значит x_0 есть собственный вектор оператора A и $\|x_0\| = 1$.

Элемент $\boldsymbol{x_0}$ мы и примем за $\boldsymbol{\phi_1}$. Заметим также, что если $\boldsymbol{\lambda_1}$ суть соответствующее собственное значение, то $\boldsymbol{A\phi_1 = \lambda_1\phi}$ и

$$|\boldsymbol{\lambda_1}| = \frac{|(\boldsymbol{A\phi_1, \phi_1})|}{|(\boldsymbol{\phi_1, \phi_1})|} = \boldsymbol{S}.$$

Пусть теперь собственные векторы

$$\boldsymbol{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n},$$

отвечающие собственным значениям

$$\boldsymbol{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n}$$

построены. Пусть $\boldsymbol{\mathcal{L}(\{\phi_k\}_{k=1}^n)}$ – линейная оболочка этой системы векторов. Рассмотрим функционал $|(\boldsymbol{Ax, x})|$ на $\overline{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{0,1}) \cap (\boldsymbol{\mathcal{L}(\{\phi_k\}_{k=1}^n)})^{\perp}$, где $(\boldsymbol{\mathcal{L}(\{\phi_k\}_{k=1}^n)})^{\perp}$ есть ортогональное дополнение $\boldsymbol{\mathcal{L}(\{\phi_k\}_{k=1}^n)}$ в $\boldsymbol{H}$. Ясно, что $(\boldsymbol{\mathcal{L}(\{\phi_k\}_{k=1}^n)})^{\perp} = \boldsymbol{H_n}$ является (замкнутым) подпространством в $\boldsymbol{H}$. Покажем, что $\boldsymbol{A : H_n \to H_n}$. В самом деле, если $\boldsymbol{x} \in (\boldsymbol{\mathcal{L}(\{\phi_k\}_{k=1}^n)})^{\perp}$, то

$$(\boldsymbol{Ax, \phi_k}) = (\boldsymbol{x, A\phi_k}) = (\boldsymbol{x, \lambda_k\phi_k}) = \boldsymbol{0}$$

для всех $\boldsymbol{1 \le k \le n}$, т.е. $\boldsymbol{Ax \in H_n}$. Применяя к $\boldsymbol{H_n}$ проведенные выше рассуждения, получим, что в $\boldsymbol{H_n}$ найдется вектор $\boldsymbol{\phi_{n+1}}$, собственный для оператора $\boldsymbol{A}$.

4.5 Лекция 29

4.5.1 Окончание доказательства теоремы Гильберта-Шмидта и следствия из нее

Продолжим доказательство теоремы.

Мы научились строить искомые вектора ϕ_k по индукции в порядке убывания абсолютных величин соответствующих собственных значений

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots$$

Теперь возможны два случая:

1) после конечного числа шагов мы получим линейное подпространство H_{n_0}, в котором $(Ax, x) \equiv 0$;

2) $(Ax, x) \not\equiv 0$ на H_n для всех $n \in \mathbb{N}$.

В первом случае из леммы 4.4.3 вытекает, что $H_{n_0} \subset \ker A$. В самом деле, пусть $(Ax, x) \equiv 0$ на H_{n_0}. Тогда, зафиксировав какой-нибудь произвольный элемент $x_0 \in H_{n_0}$ на единичной сфере, мы получим, что функционал $|(Ax, x)|$ достигает максимума в этой точке и $(Ax_0, x_0) = 0$. В силу леммы 4.4.3 $(Ax_0, Ax_0) = 0$, а значит, $Ax_0 = 0$. Таким образом, из произвольности x_0 следует, что $Ax = 0$ для всех $x \in H_{n_0}$, лежащих на единичной сфере, а значит, и для всех $x \in H_{n_0}$.

Итак, в первом случае H_{n_0} состоит из собственных векторов, отвечающих $\lambda = 0$, а система $\{\phi_k\}$ состоит из конечного числа элементов. По построению справедливо ортогональное разложение

$$H = \mathcal{L}(\{\phi_k\}_{k=1}^{n_0-1}) \oplus H_{n_0},$$

а следовательно, каждый элемент $x \in H$ записывается единственным образом в виде

$$x = x'' + x',$$

где $x'' \in \mathcal{L}(\{\phi_k\}_{k=1}^{n_0-1})$, а $x' \in H_{n_0} \subset \ker A$; при этом

$$x'' = \sum_{k=1}^{n_0-1} c_k\phi_k, \qquad Ax = Ax'' = \sum_{k=1}^{n_0-1} c_k\lambda_k\phi_k.$$

Во втором случае получаем последовательность $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ собственных векторов, для каждого из которых $\lambda_n \neq 0$. Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$. Последовательность $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ортонормирована, а значит, слабо стремится к нулю в H. Поэтому в силу компактности оператора A элементы $A\phi_n = \lambda_n\phi_n$ сходятся к нулю по норме, откуда $\lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = \lim_{n\to\infty} \|A\phi_n\| = 0$.

Пусть

$$H_\infty = \cap_{n=1}^{\infty} H_n = \left(\mathcal{L}(\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty})\right)^{\perp}.$$

Если $x \in H_\infty$ и $x \neq 0$, то для всех $n \in \mathbb{N}$

$$\left|\left(A\frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|}\right)\right| \le |(A\phi_n, \phi_n)| = |\lambda_n|,$$

откуда

$$|(Ax, x)| \le |\lambda_n|\|x\|^2 \text{ для всех } n \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, $(Ax, x) = 0$ для всех $x \in H_\infty$. Применяя к H_∞ те же рассуждения, что и к H_{n_0}, мы заключаем, что $H_\infty \subset \ker A$.

Снова по построению справедливо ортогональное разложение

$$H = \mathcal{L}(\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}) \oplus H_\infty,$$

а следовательно, каждый элемент $x \in H$ записывается единственным образом в виде

$$x = x'' + x'$$

где $x'' \in \mathcal{L}(\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty})$, а $x' \in H_\infty \subset \ker A$; при этом

$$x'' = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\phi_k, \qquad Ax = Ax'' = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\lambda_k\phi_k.$$

Теорема доказана. □

Следствие 4.5.1. *Для всякого компактного самосопряженного оператора $A : H \to H$ в полном сепарабельном евклидовом пространстве H существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов.*

Доказательство. В самом деле, построенную в теореме 4.4.1 систему векторов $\{\phi_k\}$ достаточно дополнить произвольным базисом подпространства H_{n_0} (в случае конечного числа векторов $\{\phi_k\}$) или подпространства H_∞ (в случае бесконечного числа векторов $\{\phi_k\}$). □

Замечание 4.5.1. Если $\dim H < \infty$, то следствие 4.5.1 есть не что иное, как теорема о приведении матрицы самосопряженного оператора к диагональному виду в ортогональном базисе (см., например, [10]). Для несамосопряженных компактных операторов такое приведение, вообще говоря, невозможно (пример 3.7.2). Тем не менее справедливо следующее утверждение: всякое линейное преобразование конечномерного пространства имеет хотя бы один собственный вектор.

Пример 4.5.1. Пусть $H = L_2[0,1]$, $(Ax)(t) = tx(t)$. Оператор A, очевидно, линеен. Он ограничен в силу оценки

$$\|Ax\| = \left(\int_0^1 |tx(t)|^2\,dt\right)^{1/2} \le \left(\int_0^1 t|x(t)|^2\,dt\right)^{1/2} = \|x\|.$$

Кроме того,

$$(Ax, y) = \int_0^1 tx(t)y(t)\,dt = (x, Ay),$$

т.е. оператор самосопряжен. Он не компактен, так как переводит ограниченную последовательность $\{x_k = \sqrt{2k+1}\, t^k\}$ в непредкомпактную $\{y_k\sqrt{2k+1}\, t^{k+1}\}$. В самом деле, $\|\sqrt{2k+1}\, t^k\| = 1$, а

$$\|y_{j^2} - y_j\|^2 = \frac{2j^2+1}{2j^2+3} + \frac{2j+1}{2j+3} - \sqrt{\frac{(2j^2+1)(2j+1)}{(j^2+j+1)^2}}.$$

Поэтому $\|y_{j^2} - y_j\|^2 \geq 1$ начиная с некоторого $j_0 \in \mathbb{N}$.

Наконец, если $Ax = \lambda x$, то $x(t) = 0$ для всех $t \neq \lambda$, что в пространстве Лебега означает $x = 0$. Таким образом, собственных значений этот оператор не имеет.

4.5.2 Базисы со свойством двойной ортогональности

Пусть оператор A компактен, а $A^* : H_2 \to H_1$ – сопряженный оператор для оператора A. Тогда, очевидно, оператор $A^*A : H_1 \to H_1$ является самосопряженным и компактным. В случае бесконечномерных пространств оператор A не может быть непрерывно обратимым согласно лемме. Иначе говоря, образ компактного оператора в бесконечномерных пространствах незамкнут. Тем не менее, спектральная теорема 4.4.1 дает нам возможность получить условия разрешимости и построить решения соответствующего операторного уравнения.

Лемма 4.5.1. *Пусть A компактен. Если система собственных векторов $\{b_\nu\}$ оператора A^*A есть ортонормированный базис пространства H_1, то система $\{Ab_\nu\}_{Ab_\nu \neq 0}$ является ортогональным базисом подпространства $\overline{R(A)}$.*

Доказательство. В самом деле,

$$(Ab_\nu, Ab_\mu)_2 = (A^*Ab_\nu, b_\mu)_1 = \lambda_\nu (b_\nu, b_\mu)_1 = 0, \quad \nu \neq \mu.$$

С другой стороны, если вектор $\boldsymbol{y}$ принадлежит $\overline{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})}$, то найдется такая последовательность $\{\boldsymbol{x}_N\}_{N\in\mathbb{N}} \subset \boldsymbol{H}_1$, что $\lim_{N\to\infty} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{y}$. Так как $\{\boldsymbol{b}_\nu\}$ является базисом в $\boldsymbol{H}_1$, то

$$\boldsymbol{x}_N = \sum_{\nu=1}^{k} c_\nu^{(N)} \boldsymbol{b}_\nu, \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_N = \sum_{\nu=1}^{k} c_\nu^{(N)} \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_\nu.$$

для каждого $N \in \mathbb{N}$. Значит, линейная оболочка системы $\{\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_\nu\}_{\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_\nu\neq 0}$ – плотна в $\overline{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})}$. Теперь по теореме 2.2.2, система $\{\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_\nu\}_{\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_\nu\neq 0}$ есть ортогональный базис подпространства $\overline{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})}$. □

Такие базисы называются *базисами с двойной ортогональностью.*

Теорема 4.5.1. *Пусть оператор $\boldsymbol{A}$ компактен. Тогда задача 4.3.1 разрешима в том и только том случае, когда:*

(1) $\boldsymbol{y} \in (\ker \boldsymbol{A}^*)^\perp$;

(2) $\sum\limits_{\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_\nu\neq 0} \left| \frac{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_\nu)_1}{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_\nu\|_1^2} \right|^2 < \infty$.

Доказательство. В самом деле, необходимость условия (1) нами уже установлена (см. лемму об аннуляторе ядра). Кроме того, если $\boldsymbol{x}$ – одно из решений задачи 4.3.1, то, согласно спектральной теореме Гильберта-Шмидта,

$$\boldsymbol{x} = \sum_{\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_\nu\neq 0} c_\nu \boldsymbol{b}_\nu + \boldsymbol{x}', \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \sum_{\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_\nu\neq 0}^{\infty} c_\nu \boldsymbol{L}\boldsymbol{b}_\nu.$$

Неравенство Бесселя гарантирует нам сходимость ряда $\sum_{\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_\nu\neq 0} |c_\nu|^2$.

Наконец, в силу леммы 4.5.1

$$\boldsymbol{y} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_\nu)_1}{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_\nu\|_1^2} \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_\nu \tag{4.5.1}$$

и, так как $Ax = y$, то единственность коэффициентов Фурье гарантирует нам, что $c_\nu = \frac{(y, Ab_\nu)_1}{\|Ab_\nu\|_1^2} Ab_\nu$.

Обратно, пусть $y \in (\ker A^*)^\perp$. Тогда, в силу леммы 4.5.1, справедливо разложение (4.5.1). Далее, согласно теореме Рисса-Фишера, условие (2) означает, что ряд $x_0 = \sum_{Ab_\nu \neq 0} \frac{(y, Ab_\nu)_1}{\|Ab_\nu\|^2} b_\nu$ сходится в H_1 и принадлежит $(\ker A)^\perp$. Наконец, по построению $Ax_0 = y$. □

Из доказательства теоремы 4.5.1 видим, что, зная "базис с двойной ортогональностью" $\{b_\nu\}$, соответствующий оператору A, легко найти решение уравнения $Au = y$.

Следствие 4.5.2. *Если задача 4.3.1 разрешима, то ряд*

$$x_0 = \sum_{Ab_\nu \neq 0} \frac{(y, Ab_\nu)_1}{\|Ab_\nu\|^2} b_\nu$$

сходится в H_1, принадлежит $(\ker A)^\perp$ и является единственным решением задачи 4.3.1 в этом подпространстве.

Доказательство. В силу теоремы 4.5.1 нужно проверить только единственность. В самом деле, если два решения, скажем, x_1, x_2 задачи 4.3.1 лежат в $(\ker A)^\perp$, то их разность $(x_1 - x_2)$ также лежит в этом подпространстве. С другой стороны, $A(x_1 - x_2) = y - y = 0$, т.е. разность $(x_1 - x_2)$ принадлежит $\ker A$, а значит, $x_1 = x_2$. □

Частичные суммы $x_0^{(N)} = \sum\limits_{Ab_\nu \neq 0,\, 1 \leq \nu \leq N} \frac{(y, Ab_\nu)_1}{\|Ab_\nu\|^2} b_\nu$ ряда x_0 можно трактовать как приближенные решения задачи 4.3.1.

Отметим, что приведенный метод построения решений некорректных задач называется *методом регуляризации.* Он имеет один существенный недостаток – нужно искать не только оператор A^*, но и собственные вектора и собственные значения оператора A^*A, что есть очень трудоемкая, а в общем случае и необозримая задача. Алгоритм, приведенный при доказательстве теоремы Гильберта-

Шмидта, дает возможность построить *конечное* число собственных векторов и собственных значений, но, к сожалению, некорректность задачи не позволяет указать нужное количество собственных векторов и собственных значений для заданной точности вычислений.

4.6 Лекция 30

4.6.1 Теорема об итерациях операторов

Пусть $B : H \to H$ – самосопряженный ограниченный оператор в гильбертовом пространстве H.

Определение 4.6.1. Будем говорить, что оператор $B : H \to H$ *неотрицателен,* если $(Bx, x)_H \ge 0$ для всех $x \in H$.

Ясно, что если $A : H_1 \to H_2$ ограниченный оператор, то

$$(A^* Ax, x) = (Ax, Ax) = (x, A^* Ax) \ge 0 \text{ для всех } x \in H_1.$$

Поэтому оператор $A^* A$ всегда самосопряжен и неотрицателен.

Как и ранее, обозначим через $\pi(H_1)$ оператор ортогонального проектирования на подпространство H_1 в H (см. пример 3.1.3).

Теорема 4.6.1. (теорема об итерациях) *Пусть H – гильбертово пространство и $B : H \to H$ – самосопряженный неотрицательный линейный компактный оператор в H с не более чем единичной нормой. Тогда в смысле поточечной сходимости в пространстве $\mathcal{L}(H)$ существуют пределы:*

$$\lim_{\nu\to\infty} B^\nu = \pi(\ker (I - B)), \qquad \lim_{\nu\to\infty} (I - B)^\nu = \pi(\ker B).$$

Доказательство. Следствие 4.5.1 из спектральной теоремы гарантирует нам существование ортонормированной системы $\{b_\nu\}$ в $x \in H$, состоящей из собственных векторов оператора B, соответствующих собственным значениям $\{\lambda_\nu\} \subset \mathbb{R}$. Поскольку $\|B\| \le 1$, то из теоремы 3.7.1 следует, что $\{\lambda_\nu\} \subset [-1, 1]$. Кроме того, неотрицательность оператора B означает, что

$$\lambda_\nu = (Bb_\nu, b_\nu) \ge 0,$$

т.е. $\{\lambda_\nu\} \subset [0,1]$.

Тогда, используя теорему Гильберта-Шмидта, для всякого элемента $x \in H$ получаем:

(4.6.1)

$$B^\nu x = \sum_{Bb_\mu \neq 0} (x, b_\mu)_H \lambda_\mu^\nu b_\mu, \quad (I-B)^\nu x = \sum_{Bb_\mu \neq 0} (x, b_\mu)_H (1-\lambda)_\mu^\nu b_\mu + x'.$$

С другой стороны, $x \in \ker(I-B)$ в том и только том случае, когда $Bx = x$. Поэтому $x \in \ker(I-B)$ состоит из собственных векторов оператора, соответствующих собственному значению $\lambda = 1$. Таковых по следствию 3.7.1 конечное число. Значит, снова используя теорему Гильберта-Шмидта и предложение 4.4.1, получаем:

$$\pi(\ker(I-B))x = \sum_{\lambda_\mu = 1} (x, b_\mu)_H b_\mu, \quad \pi(\ker A)x = x'. \tag{4.6.2}$$

Теперь из (4.6.1), (4.6.2) и неравенства Бесселя следует, что:

$$\lim_{\nu\to\infty} \|(\pi(\ker(I-A)) - A^\nu)x\| =$$

$$\lim_{\nu\to\infty} \left(\sum_{0<\lambda_\mu<1} |(x, b_\mu)_H|^2 \lambda_\mu^{2\nu} \right)^{1/2} \leq$$

$$\left(\sum_{0<\lambda_\mu<1} |(x, b_\mu)_H|^2 \right)^{1/2} \leq \|x\|.$$

Значит, по теореме об ограниченной сходимости,

$$\lim_{\nu\to\infty} \left(\sum_{0<\lambda_\mu<1} |(x, b_\mu)_H|^2 \lambda_\mu^{2\nu} \right)^{1/2} =$$

$$\left(\sum_{0<\lambda_\mu<1} \lim_{\nu\to\infty} |(x, b_\mu)_H|^2 \lambda_\mu^{2\nu}\right)^{1/2} = 0.$$

Второй предел вычисляется аналогично. □

Следствие 4.6.1. *В смысле поточечной сходимости в линейном пространстве $\mathcal{L}(H)$ мы имеем*

$$I = \pi(\ker (I - B)) + \sum_{\mu=0}^{\infty} B^\mu (I - B), \tag{4.6.3}$$

$$I = \pi(\ker (B)) + \sum_{\mu=0}^{\infty} (I - B)^\mu B. \tag{4.6.4}$$

Доказательство. Тождество $B + (I - B) = I$ влечет, что

$$I = B^\nu + \sum_{\mu=0}^{\nu-1} B^\mu (I - B) = (I - B)^\nu + \sum_{\mu=0}^{\nu-1} (I - B)^\mu B \tag{4.6.5}$$

для всех $\nu \in \mathbb{N}$.

Используя теорему 4.6.1, перейдем к пределу по $\nu \to \infty$ в (4.6.5) и получим (4.6.3) и (4.6.4). □

4.6.2 Условия разрешимости уравнений первого рода

Доказанная выше теорема об итерациях и ее следствия позволяют получить условия разрешимости операторных уравнений первого рода с компактными операторами и их точные и приближенные решения.

В самом деле, рассмотрим компактный ненулевой оператор $A : H_1 \to H_2$. Мы уже отмечали, что оператор A^*A самосопряжен и неотрицателен. Он компактен, как композиция компактного и непрерывного операторов. Кроме того, так как оператор $\boldsymbol{A}$ ненулевой, то его норма отлична от нуля. Значит, оператор $\boldsymbol{B} = \frac{A^*A}{\|A\|^2}$ компактен, самосопряжен и неотрицателен, а его норма не превосходит единицы в силу теоремы 3.5.1.

Следствие 4.6.2. *Пусть $\boldsymbol{H_1}, \boldsymbol{H_2}$ – гильбертовы пространства и $\boldsymbol{A : H_1 \to H_2}$ – линейный компактный оператор. Тогда в смысле поточечной сходимости в пространстве $\boldsymbol{\mathcal{L}(H_1)}$ существует предел:*

$$\lim_{\nu\to\infty} \left(I - \frac{A^*A}{\|A\|^2} \right)^{\nu} = \pi(\ker A).$$

Доказательство. Из теоремы 4.6.1 вытекает существование предела

$$\lim_{\nu\to\infty} \left(I - \frac{A^*A}{\|A\|^2} \right)^{\nu} = \pi \left(\ker \frac{A^*A}{\|A\|^2} \right).$$

Поскольку $\|A\|$ отлична от нуля, то $\ker \frac{A^*A}{\|A\|^2} = \ker A^*A$. Осталось убедиться, что $\ker A = \ker A^*A$.

Ясно, что $\ker A \subset \ker A^*A$. Если же $x \in \ker A^*A$, то

$$0 = (A^*Ax, x) = (Ax, Ax),$$

а значит, $x \in \ker A$, т.е. $\ker A^*A \subset \ker A$. □

Следствие 4.6.3. *В условиях следствия 4.6.2, в смысле поточечной сходимости в пространствах $\boldsymbol{\mathcal{L}(H_2)}$ и $\boldsymbol{\mathcal{L}(H_1)}$ соответственно мы имеем*

$$I_1 = \pi(\ker A) + \sum_{\mu=0}^{\infty} \left(I_1 - \frac{A^*A}{\|A\|^2} \right)^{\mu} \frac{A^*A}{\|A\|^2}, \tag{4.6.6}$$

$$I_2 = \pi(\ker A^*) + \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{A}{\|A\|} \left(I_1 - \frac{A^*A}{\|A\|^2} \right)^{\mu} \frac{A^*}{\|A\|}. \tag{4.6.7}$$

Доказательство. Формула (4.6.6) вытекает из следствия 4.6.1. Применяя ее к оператору AA^*, мы заключаем, что

$$I_2 = \pi(\ker A^*) + \sum_{\mu=0}^{\infty} \left(I_2 - \frac{AA^*}{\|A^*\|^2}\right)^{\mu} \frac{AA^*}{\|A^*\|^2}. \tag{4.6.8}$$

Однако, $\|A^*\| = \|A\|$, кроме того,

$$\left(I_2 - \frac{AA^*}{\|A^*\|^2}\right) \frac{A}{\|A^*\|} = \frac{A}{\|A^*\|} \left(I_1 - \frac{A^*A}{\|A^*\|^2}\right). \tag{4.6.9}$$

Таким образом, формула (4.6.7) следует из (4.6.8) и (4.6.9). □

С помощью следствия 4.6.3 легко получаются еще одно условие разрешимости и формула для решения задачи 4.3.1.

Следствие 4.6.4. *Если оператор A компактен, то задача 4.3.1 разрешима в том и только том случае, когда:*

(1) $y \in (\ker A^*)^{\perp}$;

(2) *ряд* $x_1 = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(I - \frac{A^*A}{\|A\|^2}\right)^{\nu} \frac{A^*y}{\|A\|^2}$ *сходится в* H_1.

Доказательство. Пусть задача 4.3.1 имеет решение $x \in H_0$. Тогда из следствия 4.6.3 вытекает, что ряд $\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(I_1 - \frac{A^*A}{\|A\|^2}\right)^{\nu} \frac{A^*y}{\|A\|^2}$ сходится в H_1.

Обратно, пусть ряд x_0 сходится в H_1. Так как $y \in (\ker A^*)^{\perp}$, то, по следствию 4.6.3,

$$y = \sum_{\nu=0}^{\infty} A\left(I - \frac{A^*A}{\|A\|^2}\right)^{\nu} \frac{A^*y}{\|A\|^2} = Ax_0,$$

т.е. задача 4.3.1 разрешима. □

Следствие 4.6.5. *Если задача 4.3.1 разрешима, то ряд*

$$x_1 = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(I - \frac{A^*A}{\|A\|^2}\right)^{\nu} \frac{A^*y}{\|A\|^2}$$

сходится в $\boldsymbol{H_1}$*, принадлежит* $(\ker \boldsymbol{A})^{\perp}$ *и является единственным решением задачи 4.3.1 в этом подпространстве.*

Доказательство. В силу следствия 4.6.4 ряд $\boldsymbol{x_1}$ сходится в $\boldsymbol{H_1}$. Кроме того, так как

$$\left(\boldsymbol{I} - \frac{\boldsymbol{A^*A}}{\|\boldsymbol{A}\|^2}\right)^{\nu} \frac{\boldsymbol{A^*y}}{\|\boldsymbol{A}\|^2} = \frac{\boldsymbol{A^*}}{\|\boldsymbol{A}\|^2}\left(\boldsymbol{I} - \frac{\boldsymbol{AA^*}}{\|\boldsymbol{A}\|^2}\right)^{\nu} \boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{\nu} \in \mathbb{Z}_+,$$

то

$$\left(\left(\boldsymbol{I} - \frac{\boldsymbol{A^*A}}{\|\boldsymbol{A}\|^2}\right)^{\nu} \frac{\boldsymbol{A^*y}}{\|\boldsymbol{A}\|^2}, \boldsymbol{z}\right)_{\boldsymbol{1}} = \left(\left(\boldsymbol{I} - \frac{\boldsymbol{AA^*}}{\|\boldsymbol{A}\|^2}\right)^{\nu} \boldsymbol{y}, \frac{\boldsymbol{Ay}}{\|\boldsymbol{A}\|^2}\right)_{\boldsymbol{2}} = \boldsymbol{0}$$

для всех $\boldsymbol{z} \in \ker \boldsymbol{A}$. Значит, каждое слагаемое ряда $\boldsymbol{x_1}$, а, следовательно, и его сумма, принадлежат $(\ker \boldsymbol{A})^{\perp}$.

Наконец, единственность решения задачи 4.3.1 в этом подпространстве нами уже доказана (см. следствие 4.5.2). □

4.7 Лекция 31

4.7.1 Операторные уравнения второго рода

Пусть $\boldsymbol{B}$ – произвольный компактный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве $\boldsymbol{H}$. Мы будем исследовать разрешимость уравнения (4.3.1) для $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}$, т.е. уравнения

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \tag{4.7.1}$$

(ср. с теоремой о сжимающем отображении!). Такие уравнения называются *операторными уравнениями второго рода* или *уравнениями Фредгольма.*

Мы уже знаем, что для исследования разрешимости операторных уравнений нужно изучать ядро оператора, а также сопряженный оператор и его ядро (см. лемму об аннуляторе ядра). Так как $\boldsymbol{A}^* = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B})^* = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}^*$, то, наряду с уравнением (4.7.1), мы будем рассматривать однородное уравнение

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \tag{4.7.2}$$

и сопряженные уравнения

$$\boldsymbol{z} - \boldsymbol{B}^*\boldsymbol{z} = \boldsymbol{\zeta} \tag{4.7.3}$$

$$\boldsymbol{z} - \boldsymbol{B}^*\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}. \tag{4.7.4}$$

Мы получим гораздо более сильное утверждение, чем лемма об аннуляторе ядра, используя специальный вид оператора $\boldsymbol{A}$.

4.7.2 Теоремы Фредгольма

Теорема 4.7.1. *I. Неоднородное уравнение (4.7.1) разрешимо при тех и только тех $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{H}$, которые ортогональны каждому решению сопряженного однородного уравнения (4.7.4).*

II. Либо уравнение (4.7.1) имеет при любом $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{H}$ *одно и только одно решение, либо однородное уравнение (4.7.2) имеет ненулевое решение.*

III. Однородные уравнения (4.7.2) и (4.7.4) имеют одно и то же, и притом конечное, число линейно независимых решений.

Доказательство. Докажем сначала, что образ оператора $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B})$ замкнут. Пусть $\boldsymbol{y_n} \in \boldsymbol{R}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B})$ и $\boldsymbol{y} = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{y_n}$. По предположению существуют такие $\boldsymbol{x_n} \in \boldsymbol{H}$, что

$$\boldsymbol{y_n} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B})\boldsymbol{x_n}. \tag{4.7.5}$$

Мы можем считать, что $\boldsymbol{x_n} \in (\ker(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}))^{\perp}$, вычитая, если необходимо, из $\boldsymbol{x_n}$ его проекцию на $\ker(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B})$.

Далее, можно считать, что $\|\boldsymbol{x_n}\|$ ограничены в совокупности. Действительно, в противном случае, переходя к подпоследовательности, мы имели бы $\lim_{n\to\infty} \|\boldsymbol{x_n}\| = \infty$ и, разделив (4.7.5) на $\|\boldsymbol{x_n}\|$, получили бы $\lim_{n\to\infty}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B})\frac{\boldsymbol{x_n}}{\|\boldsymbol{x_n}\|} = \boldsymbol{0}$. Но так как оператор $\boldsymbol{B}$ компактен, то, снова переходя к подпоследовательности, можно считать последовательность $\left\{\frac{\boldsymbol{Bx_n}}{\|\boldsymbol{x_n}\|}\right\}$ сходящейся. Поэтому и $\left\{\frac{\boldsymbol{x_n}}{\|\boldsymbol{x_n}\|}\right\}$ сходится, скажем, к вектору $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{H}$. Ясно, что $\|\boldsymbol{z}\| = \boldsymbol{1}$ и $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B})\boldsymbol{z} = \lim_{n\to\infty}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B})\boldsymbol{x_n}/\|\boldsymbol{x_n}\| = \boldsymbol{0}$, т.е. $\boldsymbol{z} \in \ker(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B})$. Однако мы считаем, что $\boldsymbol{x_n} \in (\ker(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}))^{\perp}$, и, следовательно, $\boldsymbol{z} \in (\ker(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}))^{\perp}$. В частности, это означает, что $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$. Полученное противоречие и позволяет считать, что $\|\boldsymbol{x_n}\|$ ограничены в совокупности.

Теперь в силу компактности $\boldsymbol{B}$ можно считать последовательность $\{\boldsymbol{Bx_n}\}$ сходящейся, а тогда, как это следует из (4.7.5), будет сходящейся и последовательность $\{\boldsymbol{x_n}\}$. Если через $\boldsymbol{x}$ обозначить предел этой последовательности, то из (4.7.5) вытекает, что $\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B})\boldsymbol{x}$.

Отсюда и из леммы 4.3.1 об аннуляторе ядра сразу следует первая теорема Фредгольма.

Для дальнейших рассуждений нам понадобится еще несколько лемм.

Лемма 4.7.1. *Сопряженный к компактному оператору компактен.*

Доказательство. Это утверждение справедливо и для операторов в пространствах Банаха, но нам оно нужно только для случая евклидовых пространств.

Итак, пусть $C : H_1 \to H_2$ – какой-нибудь компактный оператор в гильбертовых пространствах. Согласно лемме 4.4.1 нам нужно проверить, что C^* переводит всякую слабо сходящуюся последовательность в сходящуюся. Зафиксируем последовательность $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in H_2$ слабо сходящуюся к некоторому элементу $y \in H_2$. Тогда последовательность $\{C^*y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in H_1$ слабо сходится к $C^*y \in H_1$. В силу компактности оператора $C : H_1 \to H_2$ и леммы 4.4.1, последовательность $\{C^*y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in H_2$ сходится к $C^*y \in H_1$. Кроме того, из неравенства Коши-Буняковского следует, что

$$\|C^*y_n - C^*y\|_1^2 = (CC^*(y_n - y), (y_n - y))_2 \leq$$

$$\|CC^*y_n - CC^*y\|_2 \, \|y_n - y\|_2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Наконец, поскольку всякая слабо сходящаяся последовательность ограничена, мы заключаем, что $\|C^*y_n - C^*y\|_1^2 \to 0$ при $n \to \infty$, что и требовалось. $\square$

Далее, для каждого $k \in \mathbb{N}$ положим $(I-B)^k = (I-B)\dots(I-B)$ (k раз) и $H^k = Im\ (I-B)^k$, так что, в частности, $H^1 = Im\ (I-B)$. По доказанному, множества H^k образуют цепочку вложенных (замкнутых!) подпространств

$$H \supset H^1 \supset H^2 \supset \dots;$$

при этом $(I-B)(H^k) = H^{k+1}$.

Лемма 4.7.2. *Существует такой номер j, что $H^{k+1} = H^k$ для всех $k \geq j$.*

Доказательство. Если такого номера j не существует, то, очевидно, все H^k различны. В этом случае найдется такая ортонормированная последовательность $\{x_k\} \subset H$, что $x_k \in H^k \cap (H^{k+1})^\perp$. Пусть $m > k$. Тогда $(x_m + (I - B)x_k - (I - B)x_m) \in H^{k+1}$,

$$\|Bx_m - Bx_k\|^2 = \| - x_k + (x_m + (I - B)x_k - (I - B)x_m)\| =$$

$$\|x_k\| + \|(x_m + (I - B)x_k - (I - B)x_m)\| \geq 1.$$

Поэтому из последовательности $\{Bx_k\}$ нельзя извлечь фундаментальную подпоследовательность, что противоречит компактности оператора A. Лемма доказана. $\square$

Лемма 4.7.3. *Если $\ker(I - B) = 0$, то $R(I - B) = H$.*

Доказательство. Если $\ker(I - B) = 0$, то оператор $(I - B)$ взаимно однозначен. Если при этом $R(I - B) \neq H$, то цепочка $\{H^k\}$ состоит из различных подпространств. В самом деле, тогда $R(I - B) = H_1 \neq H$, т.е. существует $y \in H \setminus H_1$, а значит, $(I - B)y \in H^1 \setminus H^2$, $(I - B)^k y \in H^k \setminus H^{k+1}$. Поскольку это противоречит лемме 4.7.2, то лемма 4.7.3 доказана. $\square$

Лемма 4.7.4. *Если $R\ (I - B) = H$, то $\ker(I - B) = 0$.*

Доказательство. Так как $Im\ (I - B) = H$, то по лемме 3.5.1 об аннуляторе ядра $\ker(I - B)^* = 0$. Так как оператор B^* также компактен, то применяя лемму 4.7.3 к оператору $I - B^* = (I - B)^*$, заключаем, что если $\ker(I - B)^* = 0$, то $R(I - B)^* = H$. Снова по лемме 3.5.1 об аннуляторе ядра мы видим, что $\ker(I - B) = 0$. $\square$

Совокупность лемм 4.7.3 и 4.7.4 составляет содержание второй теоремы Фредгольма.

Докажем, наконец, третью теорему Фредгольма.

Предположим, что подпространство $\mathbf{ker}(I-B)$ бесконечномерно. Тогда в нем найдется бесконечная ортонормированная система $\{x_k\}$. При этом $Bx_k = x_k$ и, следовательно, при $m \neq k$ имеем $\|Bx_m - Bx_k\| = \sqrt{2}$. Но тогда из последовательности $\{Bx_k\}$ нельзя извлечь фундаментальную подпоследовательность, что противоречит компактности оператора B, т.е. $\mathbf{ker}(I-B)$ конечномерно.

Рассуждая аналогичным образом для оператора $I - B^* = (I-B)^*$, мы заключаем, что и подпространство $\mathbf{ker}(I-B)^*$ конечномерно.

Пусть теперь $\mathbf{dim}\ \mathbf{ker}(I-B) = \mu$, $\mathbf{dim}\ \mathbf{ker}(I-B)^* = \nu$. Предположим, что $\mu < \nu$. Пусть $\{\phi_k\}_{k=1}^{\mu}$ – ортонормированный базис в $\mathbf{ker}(I-B)$ и $\{\psi_k\}_{k=1}^{\nu}$ – ортонормированный базис в $\mathbf{ker}(I-B)^*$. Положим $Cx = Bx - \sum_{j=1}^{\mu}(x,\phi_j)\psi_j.$ Так как оператор C получается из B прибавлением конечномерного оператора, то он компактен. Таким образом, для оператора $(I-C)$ справедливы первая и вторая теоремы Фредгольма. Покажем, что уравнение $(I-C)$ имеет только тривиальное решение. Действительно, пусть $(I-C)x = 0$. Так как в силу леммы об аннуляторе ядра векторы $\psi_j \in \mathbf{ker}(I-B)^*$ ортогональны всем векторам вида $(I-B)x$, то из равенства

$$0 = (I-C)x = (I-B)x + \sum_{j=1}^{\mu}(x,\phi_j)\psi_j$$

и ортогональности векторов ψ_j следует, что $(I-B)x = 0$ и $(x,\phi_j) = 0$ при $1 \leq j \leq \mu$. Поэтому $x \in \mathbf{ker}(I-B) \cap (\mathbf{ker}(I-B))^{\perp}$, а значит, $x = 0$.

Теперь из второй теоремы Фредгольма вытекает, что существует такой вектор $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{H}$, что $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{C})\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{\mu}+1}$ и

$$\mathbf{1} = \|\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{m}+1}\|^2 = ((\boldsymbol{I}-\boldsymbol{C})\boldsymbol{y}, \boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{\mu}+1}) = \mathbf{0},$$

поскольку $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})\perp \mathbf{ker}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})^*$. Следовательно, $\boldsymbol{\mu} \geq \boldsymbol{\nu}$.

Рассуждая аналогичным образом для оператора $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}^* = (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})^*$, мы заключаем, что $\boldsymbol{\nu} \geq \boldsymbol{\mu}$. Теорема доказана. $\square$

4.8 Лекция 32

4.8.1 Замечания к теоремам Фредгольма

Замечание 4.8.1. В теоремах Фредгольма по речь существу идет об условиях обратимости оператора $(I - B)$ и эти теоремы означают, что $\lambda = 1$ – или регулярная точка для A, или собственное значение конечной кратности. Так как $(B - \lambda I) = \lambda(\frac{1}{\lambda}B - I)$, если $\lambda \neq 0$, то все, что утверждается в этих теоремах справедливо и для операторов $(B - \lambda I)$, при $\lambda \neq 0$. Поэтому всякая отличная от нуля точка спектра компактного оператора является его собственным значением конечной кратности (ср. с теоремой 3.7.3). Кроме того, мы знаем, что множество таких собственных значений не более чем счетно. Таким образом, нуль всегда принадлежит спектру компактного оператора в бесконечномерном пространстве, но не обязан, вообще говоря, быть собственным значением.

Замечание 4.8.2. Мы доказали теоремы Фредгольма для уравнений вида $(I - B)x = y$, где B – компактный оператор в гильбертовом пространстве H. Эти теоремы могут быть перенесены без существенных изменений и на случай произвольного банахова пространства $\mathbb{X}$. При этом, разумеется, сопряженное уравнение $(I - B)^* z = \zeta$ будет уравнением в пространстве X^*, условие "ортогональности" нужно понимать как обращение в нуль на элементе $y \in \mathbb{X}$ каждого функционала из подпространства $\ker(I - B)^* \subset \mathbb{X}^*$.

4.8.2 Следствия из теорем Фредгольма

Пусть оператор B компактен. Тогда операторы $C = B + B^* - B^* B$, $\tilde{C} = B + B^* - BB^*$ компактны и самосопряжены, а операторы

$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})^*(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{C}$, $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})^*=\boldsymbol{I}-\tilde{\boldsymbol{C}}$ являются операторами Фредгольма второго рода. Пусть $\{\boldsymbol{b}_k\}$, $\{\tilde{\boldsymbol{b}}_k\}$ – ортонормированные базисы в $\boldsymbol{H}$, состоящие из собственных векторов операторов $\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{C}^*$ соответственно, а $\{\boldsymbol{\lambda}_k\}$ и $\{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_k\}$ – соответствующие им собственные значения.

Следствие 4.8.1. *Неоднородное уравнение (4.7.1) разрешимо при тех и только тех* $\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{H}$, *которые ортогональны каждому собственному вектору оператора* $\tilde{\boldsymbol{C}}$, *соответствующему собственному значению* $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}=\mathbf{1}$. *Либо уравнение (4.7.1) имеет при любом* $\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{H}$ *одно и только одно решение, либо* $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}=\mathbf{1}$ *является собственным значением.*

Доказательство. Следует немедленно из теорем Фредгольма, поскольку

$$\mathbf{ker}\,(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})^*=\mathbf{ker}\,(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})^*=\mathbf{ker}\,(\boldsymbol{I}-\tilde{\boldsymbol{C}}),$$

а ядро оператора $(\boldsymbol{I}-\tilde{\boldsymbol{C}})$ как раз и состоит из собственных векторов оператора $\tilde{\boldsymbol{C}}$, соответствующих собственному значению $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}=\mathbf{1}$. $\square$

Более того, теоремы Фредгольма означают, что оператор

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})|_{(\mathbf{ker}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}))^\perp}:(\mathbf{ker}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}))^\perp\to(\mathbf{ker}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})^*)^\perp$$

непрерывно обратим. Укажем способы построения соответствующего обратного оператора.

Следствие 4.8.2. *Ряд*

$$\boldsymbol{x}_0=\sum_{k=1}^{\infty}\boldsymbol{c}_k\boldsymbol{b}_k \qquad (4.8.1)$$

сходится и является решением уравнения (4.7.1), если $(\boldsymbol{y},\tilde{\boldsymbol{b}}_k)=\mathbf{0}$ *для всех* $\tilde{\boldsymbol{b}}_k$, *соответствующих собственному значению* $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}=\mathbf{1}$

оператора $\tilde{C}$, *где*

$$c_k = \begin{cases} \frac{(y,(I-B)b_k)}{1-\lambda_k}, & \lambda_k \neq 1; \\ 0, & \lambda_k = 1. \end{cases}$$

Доказательство. Так как $(y, \tilde{b}_k) = 0$ для всех $\tilde{b}_k$, соответствующих собственному значению $\tilde{\lambda} = 1$ оператора $\tilde{C}$, то существует единственное решение уравнения (4.7.1), скажем, x_0, ортогональное ядру оператора $(I - B)$. Как мы уже отмечали, $\ker(I - C) = \ker(I - B)$, а ядро оператора $(I - C)$ как раз и состоит из собственных векторов оператора C, соответствующих собственному значению $\tilde{\lambda} = 1$. Поэтому

$$x_0 = \sum_{\lambda_k \neq 1} (x_0, b_k) b_k,$$

Более того,

$$(I - C)x_0 = (I - C) \sum_{k=1}^{\infty} (x_0, b_k) b_k =$$

$$\sum_{\lambda_k \neq 1} (1 - \lambda_k)(x_0, b_k) b_k = (I - B)^* y.$$

С другой стороны,

$$(I - B)^* y = \sum_{k=1}^{\infty} ((I - B)^* y, b_k) b_k = \sum_{\lambda_k \neq 1} (y, (I - B) b_k) b_k,$$

откуда, учитывая ортогональность векторов $\{b_k\}$, мы заключаем, что $(y, (I - B) b_k) = (1 - \lambda_k)(x_0, b_k)$ при $\lambda_k \neq 1$. □

В силу того, что собственные вектора оператора C, соответствующие собственному значению $\lambda = 1$, суть базис ядра оператора $(I - B)$, то из следствия 4.8.2 немедленно вытекает общий вид решения операторного уравнения (4.7.1):

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k b_k, \tag{4.8.2}$$

где

$$c_k = \begin{cases} \frac{(y,(I-B)b_k)}{1-\lambda_k}, & \lambda_k \neq 1; \\ \text{произвольны}, & \lambda_k = 1. \end{cases}$$

Таким образом, для полного исследования операторного уравнения (4.7.1) достаточно знать все собственные векторы оператора $\tilde{C}$, соответствующие собственному значению $\tilde{\lambda} = 1$, и все собственные векторы оператора C, соответствующие собственным значениям $\lambda \neq 1$. Однако последних бесконечно много, а значит, задача об их нахождении может стать необозримой. К счастью, задача о нахождении решений уравнения Фредгольма второго рода является нормально разрешимой (см. первую теорему Фредгольма), а значит, частичные суммы

$$x^{(N)} = \sum_{k=1}^{N} c_k b_k$$

ряда x_0 всегда сходятся к x_0 и могут рассматриваться как приближенные решения операторного уравнения.

Тем не менее, мы укажем еще один способ построения (точных и приближенных) решений, не требующий решения задачи на собственные значения для оператора C. Он основан на применении итераций самосопряженных операторов.

Следствие 4.8.3. *Ряд*

$$\tilde{x}_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\|I-C\| - I + C)^k (I-B)^* y}{\|I-C\|^{k+1}} \tag{4.8.3}$$

сходится и является решением уравнения (4.7.1), если $(y, z) = 0$ *для всех* $\tilde{b}_k$*, соответствующих собственному значению* $\tilde{\lambda} = 1$ *оператора* $\tilde{C}$*.*

Доказательство. Так как $(y, \tilde{b}_k) = 0$ для всех $\tilde{b}_k$, соответствующих собственному значению $\tilde{\lambda} = 1$ оператора $\tilde{C}$, то существует единственное решение уравнения (4.7.1), скажем, x_0, ортогональное ядру оператора $(I - B)$. Как мы уже отмечали, $\ker(I - C) = \ker(I - B)$, а ядро оператора $(I - C)$ как раз и состоит из собственных векторов оператора C, соответствующих собственному значению $\tilde{\lambda} = 1$.

Воспользуемся следствием 4.6.1 для оператора $(I - C)/\|I - C\|$. Согласно ему,

$$x_0 = \sum_{k=0}^{\infty} (I - (I - C)/\|I - C\|)^k \frac{(I - C)x}{\|I - C\|} =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\|I - C\| - I + C)^k (I - B)^* y}{\|I - C\|^{k+1}},$$

что и требовалось. □

Снова вспоминаем, что задача о нахождении решений уравнения Фредгольма второго рода является нормально разрешимой, а значит, частичные суммы

$$\tilde{x}^{(N)} = \sum_{k=0}^{N} \frac{(\|I - C\| - I + C)^k (I - B)^* y}{\|I - C\|^{k+1}}$$

ряда $\tilde{x}_0$ всегда сходятся к x_0 и могут рассматриваться как приближенные решения операторного уравнения.

Кроме того, из следствия 4.8.2 и формулы (4.8.2) немедленно вытекает еще одна запись для общего вида решений операторного уравнения (4.7.1):

$$x = \sum_{\lambda_j = 1} c_j b_j + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\|I - C\| - I + C)^k (I - B)^* y}{\|I - C\|^{k+1}}, \tag{4.8.4}$$

где коэффициенты c_j произвольны (в этом равенстве первая сумма конечна в силу компактности оператора C!).

4.9 Лекция 33

4.9.1 Линейные интегральные уравнения второго рода

В этом параграфе мы рассмотрим в качестве примера применения теории, разработанной выше, к интегральным уравнениям "второго рода":

$$x(s) - \int_a^b K(s,t)x(t)dt = y(s), \quad (s \in [a,b]) \tag{4.9.1}$$

где $y(s)$ – заданная функция на отрезке $[a,b]$, $K(s,t)$ – заданная функция на квадрате $[a,b] \times [a,b]$, а $x(s)$ – неизвестная функция. Функция $K(s,t)$ называется ядром уравнения (4.9.1), а функция $y(s)$ – его правой частью.

Для того чтобы применить теоремы Фредгольма к исследованию уравнения (4.9.1), нам необходимо подходящим образом выбрать полное евклидово пространство, в котором действует соответствующий уравнению оператор.

4.9.2 Операторы Гильберта-Шмидта в $L^2[a,b]$

Мы положим $H = L^2[a,b]$; относительно ядра и правой части уравнения (4.9.1) мы будем предполагать, что они измеримы и принадлежат $L^2([a,b] \times [a,b])$ и $L^2[a,b]$ соответственно:

$$\int_a^b \int_a^b |K(s,t)|^2 dt\, ds < \infty, \tag{4.9.2}$$

$$\int_a^b |y(t)|^2 dt < \infty.$$

Ядра класса L^2 называются ядрами Гильберта-Шмидта.

Сопоставим уравнению (4.9.1) оператор в пространстве $H = L^2[a,b]$:

$$(Ax)(s) = \int_a^b K(s,t)x(t)\,dt \quad (s \in [a,b]). \tag{4.9.3}$$

Операторы с ядрами класса L^2 называются операторами Гильберта-Шмидта.

Теорема 4.9.1. *Если ядро $K(s,t)$ удовлетворяет условию (4.9.2), то равенство (4.9.3) определяет в пространстве $L^2[a,b]$ компактный линейный оператор A, норма которого удовлетворяет неравенству*

$$\|A\|^2 \le \int_a^b \int_a^b |K(s,t)|^2 dt\, ds. \tag{4.9.4}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что в силу теоремы Фубини и условия (4.9.2) интеграл

$$\int_a^b |K(s,t)|^2 dt.$$

существует для почти всех $s \in [a,b]$. Иначе говоря, $K(s,t)$ как функция от t принадлежит $L^2[a,b]$. Так как произведение функций класса $L^2[a,b]$ принадлежит $L^1[a,b]$, то интеграл $(Ax)(s)$ существует для почти всех $s \in [a,b]$, если только $x \in L^2[a,b]$. Покажем, что $(Ax) \in L^2[a,b]$. В силу неравенства Коши-Буняковского

$$|(Ax)(s)|^2 = \left| \int_a^b K(s,t)x(t)\,dt \right| \le$$

$$\int_a^b |K(s,t)|^2 dt \int_a^b |x(t)|^2 dt = \|x\|^2 \int_a^b |K(s,t)|^2 dt.$$

Интегрируя по s и заменяя повторный интеграл двойным, получим

$$\|(Ax)(s)\|^2 = \int\limits_a^b \left| \int\limits_a^b K(s,t)x(t)\,dt \right|^2 ds \le \|x\|^2 \int_a^b \int\limits_a^b |K(s,t)|^2 dt,$$

которое дает и интегрируемость $|(Ax)(s)|^2$ и оценку (4.9.4) для нормы оператора $\|A\|$. Поскольку линейность оператора A, очевидно, следует из линейности интеграла, то остается доказать, что оператор A компактен.

Пусть $\{b_k\}$ – какой-нибудь ортонормированный базис в пространстве $L^2[a,b]$. Тогда система $\{g_{km}(s,t) = b_k(s)b_m(t)\}$ является ортонормированным базисом в $L^2([a,b] \times [a,b])$. В самом деле, в силу теоремы Фубини

$$\int\limits_a^b \int\limits_a^b g_{km}(s,t)g_{ij}(s,t)ds\,dt = \delta_{ki}\delta_{mj},$$

откуда следует ортонормированность. Предположим, что система $\{g_{km}\}$ неполна в $L^2([a,b] \times [a,b])$. Тогда найдется функция $f \in L^2([a,b] \times [a,b])$, ортогональная всем функциям g_{km}. Положим

$$F_m(s) = \int\limits_a^b f(s,t)b_m(t)dt.$$

Ясно, что $F_m \in L^2[a,b]$ и (по теореме Фубини)

$$\int\limits_a^b F_m(s)b_k(s)dt = 0$$

для всех $k \in \mathbb{N}$. Из полноты системы $\{b_k\}$ следует, что $F_m(s) = 0$ почти всюду на $[a,b]$. Но тогда

$$\int\limits_a^b f(s,t)b_m(t)dt = 0$$

для всех $m \in \mathbb{N}$. Снова из полноты системы $\{b_k\}$ следует, что $f(s,t)=0$ для почти всех $t \in [a,b]$ почти при каждом $s \in [a,b]$. Тогда по теореме Фубини $f(s,t)=0$ почти всюду на $[a,b]\times[a,b]$.

Следовательно,

$$K(s,t)=\sum_{k,m=1}^{\infty} a_{km}b_k(s)b_m(t).$$

Положим теперь

$$K_N(s,t)=\sum_{k,m=1}^{N} a_{km}b_k(s)b_m(t), (A_N x)(s)=\int\limits_a^b K_N(s,t)x(t)\,dt.$$

Оператор A_N компактен, поскольку переводит $L^2[a,b]$ в конечномерное пространство $\mathcal{L}(\{b_k\}_{k=1}^N)$. Действительно, если $L^2[a,b] \ni x=\sum_{k=1}^{\infty}(x,b_k)b_k$,

$$(A_N x)(s)=\int\limits_a^b \sum_{k,m=1}^{N} a_{km}b_k(s)b_m(t)\sum_{j=1}^{\infty}(x,b_j)b_j(t)\,dt=$$

$$\sum_{k=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} a_{km}(x,b_k)b_k(s).$$

Далее, $K_N(s,t)$ представляет собой частичную сумму ряда Фурье функции $K(s,t)$, поэтому

$$\lim_{N\to\infty}\int\limits_a^b\int\limits_a^b |K(s,t)-K_N(s,t)|^2 ds\,dt=0.$$

Отсюда, применив оценку (4.9.4)к оператору $(A-A_N)$, имеем

$$\lim_{N\to\infty}\|A-A_N\|=0.$$

Поскольку подпространство $\sigma(H)$ замкнуто в $\mathcal{L}(H)$, то оператор A компактен. $\square$

Ясно, что всякое ядро Гильберта-Шмидта однозначно определяет некоторый оператор Гильберта-Шмидта. Верно и обратное, т.е. если A_1 и A_2 – два оператора Гильберта-Шмидта, и $A_1u = A_2u$ для всех $u \in L^2[a,b]$, то их ядра $K_1(s,t)$ и $K_2(s,t)$ совпадают почти всюду на $[a,b] \times [a,b]$. В самом деле, если

$$A_1u - A_2u = \int\limits_a^b (K_1(s,t) - K_2(s,t))u(t)\,dt = 0$$

для всех $u \in L^2[a,b]$, то почти для всех $s \in [a,b]$

$$\int\limits_a^b |K_1(s,t) - K_2(s,t))|^2\,dt = 0.$$

Значит,

$$\int\limits_a^b \int\limits_a^b |K_1(s,t) - K_2(s,t))|^2\,dtds = 0.$$

Таким образом, если мы не будем различать эквивалентные между собой суммируемые функции, то можно сказать, что соответствие между ядрами Гильберта-Шмидта и операторами Гильберта-Шмидта взаимно однозначно.

Теорема 4.9.2. *Пусть A – оператор Гильберта-Шмидта, определяемый ядром $K(s,t)$. Тогда сопряженный ему оператор A^* определяется сопряженным ядром $\overline{K(t,s)}$.*

Доказательство. Используя теорему Фубини, получаем

$$(Au,v) = \int\limits_a^b \left(\int\limits_a^b K(s,t)u(t)dt \right) \overline{v}(s)ds =$$

$$\int_a^b \int_a^b K(s,t)u(t)\overline{v}(s)dsdt = \int_a^b \left(\int_a^b K(s,t)\overline{v}(s)ds \right) u(t)dt =$$

$$\int_a^b u(t)\overline{\left(\int_a^b \overline{K(s,t)}v(s)ds \right)}dt = (u, A^*v),$$

откуда и следует утверждение теоремы. □

Таким образом, данная теорема позволяет легко применять теорему об итерациях для построения решений операторных уравнений как первого, так и второго рода для операторов Гильберта-Шмидта в пространстве $L^2[a,b]$ (см. следствия 4.6.5 и 4.8.3).

Замечание 4.9.1. В частности, оператор Гильберта-Шмидта самосопряжен в $L^2[a,b]$ тогда и только тогда, когда $\overline{K(s,t)} = K(t,s)$.

4.10 Лекция 34

4.10.1 Уравнения с вырожденными ядрами

В качестве одного из примеров рассмотрим уравнения с вырожденными ядрами, т.е. ядрами вида

$$K(s,t) = \sum_{i=1}^{n} P_i(s) Q_i(t),$$

где P_i, Q_i – функции из $L^2[a,b]$. Оператор с таким ядром переводит всякую функцию $u \in L^2[a,b]$ в сумму

$$v(s) = \sum_{i=1}^{n} P_i(s) \int_a^b Q_i(t) u(t)\, dt,$$

т.е. в элемент конечномерного пространства, порожденного системой $\{P_i\}$. Следовательно, этот оператор компактен.

Систему функции $P_1, \ldots, P_n$ можно считать линейно независимой. Действительно, если это не так, то, представив каждую из функций P_i как линейную комбинацию линейно независимых $\tilde{P}_i$ $(1 \leq i \leq k < n)$, мы получим, что то же самое ядро $K(s,t)$ можно записать в виде

$$K(s,t) = \sum_{i=1}^{k} \tilde{P}_i(s) \tilde{Q}_i(t).$$

Аналогичную редукцию можно провести и для функций Q_i, т.е. систему функции $Q_1, \ldots, Q_n$ также можно считать линейно независимой.

Итак, будем решать уравнение Фредгольма второго рода (4.9.1) с вырожденным ядром $K(s,t)$, в котором системы $\{P_i\}$ и $\{Q_i\}$ линейно независимы. Подставив в уравнение (4.9.1) выражение для ядра $\boldsymbol{K(s,t)}$, мы получим:

$$x(s) = \sum_{i=1}^{n} P_i(s) \int_a^b Q_i(t)x(t)\,dt + y(s).$$

Введя обозначение $q_i = \int_a^b Q_i(t)x(t)\,dt$, перепишем последнее уравнение в виде

$$x(s) = \sum_{i=1}^{n} P_i(s)q_i + y(s). \tag{4.10.5}$$

Найдем теперь неизвестные постоянные q_i. Для этого подставим последнее выражение в уравнение (4.9.1)и получим

$$\sum_{i=1}^{n} P_i(s)q_i + y(s) = \sum_{i=1}^{n} P_i(s) \int_a^b Q_i(t) \left(\sum_{j=1}^{n} P_j(t)q_j + y(t) \right) dt + y(s).$$

Положив

$$\int_a^b Q_i(t)P_j(t)dt = a_{ij}, \quad \int_a^b Q_i(t)y(t) = b_i,$$

мы получим

$$\sum_{i=1}^{n} P_i(s)q_i = \sum_{i=1}^{n} P_i(s) \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}q_j + b_i \right).$$

Система $\{P_i\}$, по предположению, линейно независима, поэтому отсюда следует равенство коэффициентов:

$$q_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}q_j + b_i \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{4.10.6}$$

Функция (4.10.5) с коэффициентами q_i, удовлетворяющими этой системе линейных уравнений, является решением интегрального уравнения (4.9.1), поскольку все выкладки, с помощью которых мы пришли от интегрального уравнения к системе (4.10.6) , можно проделать в обратном порядке.

Итак, решение интегрального уравнения с вырожденным ядром сводится к решению соответствующей ему системы линейных алгебраических уравнений (4.10.6). Для систем линейных алгебраических уравнений хорошо известны условия существования и единственности решений.

4.10.2 Уравнения Вольтерра

Еще одним важным примером являются уравнения Вольтерра второго рода (см. пример 1.7.3):

$$x(s) = \int_a^s \tilde{K}(s,t)x(t)\,dt + y(s),$$

где $\tilde{K}(s,t)$ – ограниченная измеримая функция. Это уравнение можно рассматривать как частный случай уравнения Фредгольма (4.9.1) с ядром

$$K(s,t) = \begin{cases} \tilde{K}(s,t), & s \le t; \\ 0, & s > t, \end{cases}$$

поэтому к нему применимы и теоремы Фредгольма. Однако для уравнения Вольтерра эти теоремы могут быть уточнены следующим образом: уравнение Вольтерра имеет одно и только одно решение при любой функции $y \in L^2[a,b]$.

Действительно, дословно повторяя рассуждения из примера 1.7.3, мы видим, что некоторая степень оператора

$$Ax = \int_a^s \tilde{K}(s,t)x(t)\,dt$$

является сжатием и, следовательно, однородное операторное уравнение (т.е. для $y = 0$) имеет единственное (нулевое) решение. В силу теорем Фредгольма отсюда и следует наше утверждение.

4.10.3 Заключительные замечания

Уместно отметить, что за рамками данного курса остались значительная часть линейного и почти весь нелинейный анализ.

В линейном анализе мы практически не затронули теорию топологических (векторных) пространств, реализующую анализ в векторных пространствах без привлечения метрики, а только с использованием систем открытых (замкнутых) множеств для определения предела. В рамках этого подхода все еще можно определить сопряженные пространства и сопряженное отображение, играющие ключевую роль в теории операторных уравнений (см., например [1]). Кроме того, нами не изучена спектральная теория для произвольных (непрерывных) операторов в пространствах Гильберта, дающая мощный инструмент для изучения операторных уравнений. Основная причина – большой объем материала, связанный с теорией "интегрирования" операторно–значных функций в пространствах Банаха, и технические трудности построения спектральной функции.

Что касается нелинейного функционального анализа, то это прежде всего теория Лере-Шаудера о неподвижных точках, позволяющая получить (достаточные) условия существования неподвижных точек для, вообще говоря, нелинейных отображений в банаховых пространствах, не являющихся сжатиями. Уже изученный нами материал позволяет сформулировать, понять и даже доказать соответствующие утверждения. К сожалению, их доказательства очень сложны технически и занимают много времени, которое у нас уже вышло.

Наконец, совсем без внимания осталась теория "дифференцируемости" операторов, позволяющая доказывать аналоги теоремы "о неявном операторе (функции)" в произвольных (банаховых) пространствах, а значит, локально разрешать операторные уравнения в них. Основополагающим здесь является понятие "дифференциала" отображения.

Предметный указатель

Список литературы

[1] Колмогоров А.Н. *Элементы теории функций и функционального анализа*/А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Физматлит, 2004.

[2] Треногин В.А. *Функциональный анализ*/ В.А. Треногин. – М.: Наука, 1980.

[3] Натансон И.П. *Теория функций вещественной переменной*/ И.П. Натансон. – М.: Гостехиздат, 1957.

[4] Шилов Г.Е. *Математический анализ. Второй специальный курс*/ Г.Е. Шилов. – М.: МГУ, 1984.

[5] Робертсон А. *Топологические векторные пространства*/ А. Робертсон, В. Робертсон. – М.: Мир, 1967.

[6] Лаврентьев М.М. *Линейные операторы и некорректные задачи*/ М.М. Лаврентьев, Л.Я. Савельев. – М.: Наука, 1991.

[7] Иосида К. *Функциональный анализ*/К. Иосида. – М.: Мир, 1967.

[8] Канторович А.В. *Функциональный анализ в нормированных пространствах*/ А.В. Канторович, Г.П. Акилов. – М.: Физматгиз, 1959.

[9] Треногин В.А. *Задачи и упражнения по функциональному анализу*/ В.А. Треногин, Б.М. Писаревский, Т.С. Соболева. – М.: Физматлит, 2002.

[10] Беклемишев Д.В. *Курс аналитической геометрии и линейной алгебры*/ Д.В. Беклемишев. – М.: Наука, 1984.

[11] Владимиров В.С. *Обобщенные функции в математической физике*/ В.С. Владимиров. – М.: Наука, 1979.

[12] Владимиров В.С. *Сборник задач по уравнениям математической физики*/ В.С. Владимиров, А.А. Вашарин. – М.: Физматлит, 2001.

[13] Пуляев В.Ф. *Задачи по функциональному анализу*/ В.Ф. Пуляев, З.Б. Цалюк. – Краснодар: изд-во КубГУ, 1983.