Вопросы по АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ к минисессии
29 октября 2013 г.

A.V.Timofeenko62@mail.ru

1. Точка, прямая, плоскость. Группы аксиом Гильберта. Инварианты параллельного проектирования.

2. Чертежи плоских фигур. Теорема о существовании главных направлений при проектировании плоскости на плоскость.

3. Теорема Польке-Шварца (без доказательства). Чертежи куба, правильных тетраэдра и октаэдра. Построение ортогональной проекции куба (без доказательства).

4. Вектор. Равенство векторов. Коллинеарные и компланарные векторы.

5. Линейные операции над векторами и их свойства. Линейное пространство над полем действительных чисел.

6. Линейная комбинация векторов. Линейная независимость системы векторов. Необходимые и достаточные условия линейной зависимости системы векторов.

7. Базис линейного пространства. Разложение вектора по базису на прямой, плоскости, в пространстве. Построение данного вектора в виде линейной комбинации данных векторов базиса.

8. Декартова система координат. Координаты вектора, линейно независимые системы векторов. Необходимые и достаточные условия линейной независимости векторов.

9. Линейная зависимость векторов и свойства коллинеарности и компланарности.

10. Декартовы прямоугольные системы координат на плоскости и в пространстве. Координаты вектора и точки. Построение проекций вектора на координатные оси.

11. Деление отрезка в данном отношении. Золотое сечение. Алгебраические модели и чертежи правильных икосаэдра и додекаэдра.

12. Полярные, цилиндрические, сферические системы координат, связь с декартовыми координатами.

13. Координаты точки, делящей отрезок в данном отношении. Координаты точки центра тяжести системы материальных точек.

14. Связь координат точек в полярной, цилиндрической, сферической системах координат с ее декартовыми координатами.

15. Проекция вектора и его числовая проекция. Свойства этих проекций.

16. Скалярное произведение векторов и его свойства.

17. Ортонормированный базис. Выражение скалярного произведения через координаты данных векторов, угол между векторами. Условие ортогональности двух векторов.

18. Левая и правая пары и тройки векторов. Векторное произведение. Свойства векторного произведения.

19. Координаты векторного произведения в ортонормированном базисе. Выражение через векторное произведение условия компланарности векторов. Примеры алгебр Ли.

20. Тождество Якоби.

21. Смешанное произведение трёх векторов. Нахождение смешанного произведения векторов через их координаты в ортонормированном и произвольном базисе.

22. Свойства смешанного произведения. Вычисление объёма тетраэдра по координатам его вершин.

23. Замена системы координат.

Типовые задачи

1. В треугольнике ABC проведены медианы AD, BE и CF. Представить векторы $\vec{AD}$, $\vec{BE}$ и $\vec{CF}$. в виде линейных комбинаций векторов $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$.

2. Точки E и F служат серединами сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$ (плоского или пространственного). Доказать, что $EF = \frac{BC+AD}{2}$. Вывести отсюда теорему о средней линии трапеции.

3. Точки K и L служат серединами сторон BC и CD параллелограмма $ABCD$. Выразить векторы $\vec{BC}$ и $\vec{CD}$ через векторы $\vec{AK}$ и $\vec{AL}$.

4. На стороне AD параллелограмма $ABCD$ отложен отрезок $AK = \frac{1}{5}AD$, а на диагонали AC — отрезок $AL = \frac{1}{6}AC$. Доказать, что векторы $\vec{KL}$ и $\vec{LB}$ коллинеарны, и найти отношение $\frac{\vec{KL}}{\vec{LB}}$.

5. Доказать утверждения: 1) конечная система векторов, содержащая нулевой вектор, линейно зависима; 2) конечная система векторов, содержащая два равных вектора, линейно зависима.

6. Даны три вектора $a(1, 2)$, $b(-5, -1)$, $c(-1, 3)$. Найти координаты векторов $2a + 3b - c$, $16a + 5b - 9c$.

7. Проверить, что векторы $a(4, 1, 1)$, $b(1, 2, -5)$ и $c(-1, 1, 1)$ образуют базис в пространстве. Найти координаты векторов $l(4, 4, -5)$, $m(2, 4, -10)$ и $n(0, 3, -4)$ в этом базисе.

8. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Принимая за базисные векторы $\vec{AB}$ и $\vec{AF}$, найти в этом базисе координаты векторов $\vec{BC}, \vec{CD}, \vec{EF}, \vec{BD}, \vec{CF}, \vec{CE}$.

9. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Принимая за начало координат вершину A, а за базисные векторы $\vec{AB}$, $\vec{AD}$ и $\vec{AA_1}$, найти координаты:

1) вершин C, D_1 и C_1;

2) точек K и L — середин ребер A_1B_1 и CC_1 соответственно;

3) точек M и N пересечения диагоналей граней $A_1B_1C_1D_1$ и ABB_1A_1 соответственно;

4) точки O пересечения диагоналей параллелепипеда.

10. Найти прямоугольные координаты точки, лежащей на шаре радиуса 1, зная ее широту 45° и долготу 330°.

11. Найти цилиндрические координаты точек по их прямоугольным координатам: $A(3, -4, 5), B(1, -1, -1), C(6, 0, 8)$.

12. В треугольнике ABC проведены медианы AD, BE, CF. Вычислить выражение

$$(\vec{DC}, \vec{AD}) + (\vec{CA}, \vec{BE}) + (\vec{AB}, \vec{CF}).$$

13. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:

1) $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 1, \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 45°$;

2) $|\vec{a}| = 6, |\vec{b}| = 7, \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 120°$;

3) $|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 2, \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90°$;

4) $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 1$, $\vec{a}$ и $\vec{b}$) сонаправлены;

5) $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 2$, $\vec{a}$ и $\vec{b}$) $= 45°$ противоположно направлены.

14. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, заданных своими координатами:
1) $\vec{a}(3, 2, -5)$, $\vec{b}(10, 1, 2)$;
2) $\vec{a}(1, 0, 3)$, $\vec{b}(-4, 15, 1)$;
3) $\vec{a}(2, 1, 5)$, $\vec{b}(7, -9, -1)$.

15. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, заданными своими координатами:
1) $\vec{a}(1, -1, 1)$, $\vec{b}(5, 1, 1)$;
2) $\vec{a}(1, -1, 1)$, $\vec{b}(-2, 2, -2)$.

16. Дан вектор $\vec{a}(3, 3, 6)$. Найти ортогональную проекцию вектора $\vec{b}$ на прямую, направление которой определяется вектором $\vec{a}$, и ортогональную составляющую вектора $\vec{b}$ относительно этой прямой, если вектор $\vec{b}$ имеет координаты: 1)(2,-2,4), 2)(1,1,2), 3(4,0,-2).

17. Объяснить геометрический смысл всех решений векторного уравнения $(\vec{x}, \vec{a}) = p$ для некоторого числа p, а также его частного решения, коллинеарного вектору $\vec{a}$: 1) в плоском случае; 2) в пространственном случае.

18. Найти векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, заданных своими координатами: 1) $\vec{a}(3, -1, 2)$, $\vec{b}(2, -3, -5)$;
2) $\vec{a}(2, -1, 1)$, $\vec{b}(-4, 2, -2)$;
3) $\vec{a}(6, 1, 0)$, $\vec{b}(3, -2, 0)$.

19. Параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$ задан координатами вершин ребер, выходящих из вершины A с координатами $A(1, 2, 3)$, $B(9, 6, 4)$, $C(3, 0, 4)$ и $A'(5, 2, 6)$. Найти длину ребра AB, угол между ребром AB и AC; площадь основания $ABCD$, объем параллелепипеда и вычислить высоту, опущенную из вершины A'. Система координат прямоугольная.

20. Найти необходимые и достаточные условия того, чтобы уравнение

$$[\vec{a}, \vec{x}] = \vec{b},$$

где $\vec{a} = \vec{0}$, имело решение. Найти общее решение этого уравнения.

21. Найти координаты точки в системе координат $O(1, 3, 3), \vec{e_1}(3, 3, 1), \vec{e_2}(3, 5, 2)$, $\vec{e_3}(1, 2, 1)$ в пространстве, если известны ее координаты x', y', z' в системе координат $O'(-1, 0, 2)$, $\vec{e'_1}(1, -2, 1), \vec{e'_2}(4, 2, 1), \vec{e'_3}(2, = 1, 3)$.

22. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Найти координаты точки плоскости в системе координат $A, \vec{AB}, \vec{AF}$, если известны ее координаты x', y' в системе координат $C, \vec{CB}, \vec{CE}$.

23. На чертеже даны проекции трех вершин правильного шестиугольника. Построить изображение шестиугольника.

24. Дан произвольный треугольник ABC, который является чертежом правильного треугольника $A_1B_1C_1$. На сторонах AB и AC даны точки M и N, изображающие точки M_1 и N_1. Постройте изображение центра окружности, описанной около треугольника $A_1M_1N_1$.

25. Дан чертеж ABC треугольника $A_1B_1C_1$ и сам треугольник $A_1B_1C_1$. Через вершину A_1 проведите перпендикулярные прямые, которые на чертеже

изобразятся перпендикулярными.

26. Постройте ортогональную проекцию куба, если дан отрезок, равный ребру куба.

27. Сделайте чертеж правильной пирамиды с равными ребрами. Постройте на чертеже центр сферы, описанной около пирамиды.

Кафедра алгебры и математической логики
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ
Билет №17

1. Ортонормированный базис. Выражение скалярного произведения через координаты данных векторов, угол между векторами. Условие ортогональности двух векторов.
2. Задача.