ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ
Минисеместр 4

Содержание разделов и тем лекционного курса

0. Компактные множества в пространстве непрерывных функций. Теорема Арцела.

1. Линейные операторы. Критерий непрерывности. Теорема о непрерывности и ограниченности. Примеры: линейные операторы в конечномерных пространствах, интегральный оператор в $L^2(a,b)$, оператор дифференцирования в $C[a,b]$ и $C^1[a,b]$.

2. Норма оператора. Пространства линейных операторов. Операции с линейными операторами. Теорема о нормированном пространстве линейных ограниченных операторов. Теорема о композиции операторов.

3. Компактные операторы. Теорема о подпространстве компактных операторов. Некомпактность тождественного оператора в бесконечномерном нормированном пространстве. Теорема о композиции компактного и непрерывного операторов.

4. Операторные уравнения. Постановка задачи. Корректность по Адамару. Обратный оператор. Условия обратимости.

5. Непрерывная обратимость. Достаточные условия непрерывной обратимости: ряд Неймана. Примеры обратных операторов.

6. Спектр оператора. Резольвента. Собственные значения и непрерывный спектр. Теорема о спектре непрерывного линейного оператора (замкнутость и граниченность спектра).

7. Сопряженный оператор. Определение, линейность, непрерывность сопряженного оператора (для линейного). Теорема о норме сопряженного оператора.

8. Сопряженный оператор в евклидовых пространствах Теорема об аннуляторе ядра.

9. Компактность сопряженного к компактному. Теорема о критерии компактности оператора в полном евклидовом пространстве.

10. Самосопряженные операторы. Собственные значения и собственные векторы самосопряженного оператора. Спектральная теорема (Гильберта-Шмидта) для компактного самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве

11. Теоремы Фредгольма в евклидовых пространствах.

12. Интегральные уравнения с вырожденными ядрами.

Содержание тем и разделов практических занятий

1. Линейные операторы в нормированных пространствах. Линейные операторы. Непрерывность и ограниченность, норма оператора.

2. Компактные операторы. Определение. Применение теоремы Хаусдорфа и теоремы Арцела.

3. Сопряженный оператор.

4. Обратные операторы. Непрерывная обратимость.

5. Спектр оператора. Резольвента.

6. Операторные уравнения в пространствах Банаха.

7. Теоремы Фредгольма.
8. Интегральные уравнения с вырожденными ядрами.
9. Самосопряженные операторы. Теорема Гильберта-Шмидта

Список литературы

[1] Колмогоров А.Н. *Элементы теории функций и функционального анализа*/А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Физматлит, 2004.

[2] Треногин В.А. *Функциональный анализ*/ В.А. Треногин. – М.: Наука, 1980.

[3] Натансон И.П. *Теория функций вещественной переменной*/ И.П. Натансон. – М.: Гостехиздат, 1957.

[4] Шилов Г.Е. *Математический анализ. Второй специальный курс*/ Г.Е. Шилов. – М.: МГУ, 1984.

[5] Робертсон А. *Топологические векторные пространства*/ А. Робертсон, В. Робертсон. – М.: Мир, 1967.

[6] Лаврентьев М.М. *Линейные операторы и некорректные задачи*/ М.М. Лаврентьев, Л.Я. Савельев. – М.: Наука, 1991.

[7] Иосида К. *Функциональный анализ*/К. Иосида. – М.: Мир, 1967.

[8] Канторович А.В. *Функциональный анализ в нормированных пространствах*/ А.В. Канторович, Г.П. Акилов. – М.: Физматгиз, 1959.

[9] Треногин В.А. *Задачи и упражнения по функциональному анализу*/ В.А. Треногин, Б.М. Писаревский, Т.С. Соболева. – М.: Физматлит, 2002.

[10] Беклемишев Д.В. *Курс аналитической геометрии и линейной алгебры*/ Д.В. Беклемишев. – М.: Наука, 1984.

[11] Владимиров В.С. *Обобщенные функции в математической физике*/ В.С. Владимиров. – – М.: Наука, 1979.

[12] Владимиров В.С. *Сборник задач по уравнениям математической физики*/ В.С. Владимиров, А.А. Вашарин. – М.: Физматлит, 2001.

[13] Пуляев В.Ф. *Задачи по функциональному анализу*/ В.Ф. Пуляев, З.Б. Цалюк. – Краснодар: изд-во КубГУ, 1983.

Замечание. Базовым учебником является книга [1]. В тех случаях, когда предпочтительнее использовать другой источник, это отмечено особо.

Функциональный анализ, типовые задания к минисессии 4, Вариант 1.

1. Дайте определение компактного оператора (2 балла).
2. Сформулируйте и докажите теорему о спектре (2+2=4 балла).
3. Выясните, является ли множество $M = \{t^k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ в пространстве $C[0,1]$

а) ограниченным, б) замкнутым, в) предкомпактным, г) компактным (5 баллов).

4. Выясните, является ли оператор $A : C[0,1] \to C[0,1]$,

$$(Ax)(t) = \int_0^1 (10\,t^4 s + 11\,s^4 t)x(s)\,ds$$

1) линейным,
2) непрерывным,
3) компактным.

Найдите его норму (4 балла).

5. Решите интегральное уравнение

$$x(t) - \lambda \int_0^1 (10\,t^4 s + 11\,s^4 t)x(s)\,ds = t$$

в пространстве $C[0,1]$. Укажите сколько линейно независимых решений оно имеет при каждом $\lambda \in \mathbb{R}$ (5 баллов).

Функциональный анализ, типовые задания к минисессии 4, Вариант 2.

1. Дайте определение компактного оператора (2 балла).
2. Сформулируйте и докажите вторую теорему Фредгольма (2+2=4 балла).
3. Выясните, является ли множество $M = \{\cos kt\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ в пространстве $L_2[-\pi,\pi]$

а) ограниченным, б) замкнутым, в) предкомпактным, г) компактным (5 баллов).

4. Выясните, является ли оператор $A : L_2[-\pi,\pi] \to L_2[-\pi,\pi]$,

$$(Ax)(t) = \int_{-\pi}^{\pi} (10\,\cos(t)\sin(4s) + 11\,\cos(4t)\sin(s))x(s)\,ds$$

1) линейным,
2) непрерывным,
3) компактным.

Найдите его норму (4 балла).

5. Решите интегральное уравнение

$$x(t) - \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (10\,\cos(t)\sin(4s) + 11\,\cos(4t)\sin(s))x(s)\,ds = \sin(t)$$

в пространстве $L_2[-\pi,\pi]$. Укажите сколько линейно независимых решений оно имеет при каждом $\lambda \in \mathbb{R}$ (5 баллов).