

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Минисеместр 3

Содержание разделов и тем лекционного курса

0. Непрерывные линейные функционалы на нормированных пространствах. Критерий непрерывности линейного функционала. Норма функционала.

1. Сопряженное пространство. Операции с непрерывными линейными функционалами. Алгебраическое сопряженное пространство. Нормированное пространство, сопряженное к нормированному.

2. Теорема Рисса об общем виде непрерывного линейного функционала на полном евклидовом пространстве.

3. Второе сопряженное пространство к нормированному пространству. Естественное отображение второго сопряженного в исходное пространство. Рефлексивность.

4. Слабая сходимость в нормированном пространстве.

Ограниченность слабо сходящейся последовательности. Критерий слабой сходимости.

*-слабая сходимость в сопряженном пространстве. Ограниченность *-слабо сходящейся последовательности. Критерий *-слабой сходимости.

5. Обобщенные функции и их основные свойства.

Гладкие функции с компактным носителем. Примеры. Сходимость в пространстве финитных функций.

6. Обобщенные функции и их основные свойства.

Регулярные и нерегулярные обобщенные функции. Примеры. Операции с обобщенными функциями. Умножение распределений.

7. Производная обобщенной функции. Первообразная обобщенной функции.

8. Предкомпактные и компактные множества в метрических пространствах. Основные свойства компактов и предкомпактов.

Максимумы (минимумы) функционалов, теорема Вейерштрасса.

9. Теорема об ε -сети. Некомпактность шара в бесконечномерном нормированном пространстве.

Содержание тем и разделов практических занятий

1. Сопряженное пространство. Сопряженные к пространствам \mathbb{R}^n и l_p .
2. Теорема Рисса об общем виде непрерывного линейного функционала на полном евклидовом пространстве.
3. Второе сопряженное пространство к нормированному пространству. Рефлексивность.
4. Слабая сходимость и *-слабая сходимость.
5. Гладкие функции с компактным носителем. Сходимость в пространстве финитных функций.
6. Производная обобщенной функции. Первообразная обобщенной функции.

Список литературы

- [1] Колмогоров А.Н. *Элементы теории функций и функционального анализа*/А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Физматлит, 2004.
- [2] Треногин В.А. *Функциональный анализ*/ В.А. Треногин. – М.: Наука, 1980.
- [3] Натансон И.П. *Теория функций вещественной переменной*/ И.П. Натансон. – М.: Гостехиздат, 1957.
- [4] Шилов Г.Е. *Математический анализ. Второй специальный курс*/ Г.Е. Шилов. – М.: МГУ, 1984.
- [5] Робертсон А. *Топологические векторные пространства*/ А. Робертсон, В. Робертсон. – М.: Мир, 1967.
- [6] Лаврентьев М.М. *Линейные операторы и некорректные задачи*/ М.М. Лаврентьев, Л.Я. Савельев. – М.: Наука, 1991.
- [7] Иосида К. *Функциональный анализ*/К. Иосида. – М.: Мир, 1967.
- [8] Канторович А.В. *Функциональный анализ в нормированных пространствах*/ А.В. Канторович, Г.П. Акилов. – М.: Физматгиз, 1959.
- [9] Треногин В.А. *Задачи и упражнения по функциональному анализу*/ В.А. Треногин, Б.М. Писаревский, Т.С. Соболева. – М.: Физматлит, 2002.
- [10] Беклемишев Д.В. *Курс аналитической геометрии и линейной алгебры*/ Д.В. Беклемишев. – М.: Наука, 1984.
- [11] Владимиров В.С. *Обобщенные функции в математической физике*/ В.С. Владимиров. – М.: Наука, 1979.
- [12] Владимиров В.С. *Сборник задач по уравнениям математической физики*/ В.С. Владимиров, А.А. Вашарин. – М.: Физматлит, 2001.
- [13] Пуляев В.Ф. *Задачи по функциональному анализу*/ В.Ф. Пуляев, З.Б. Цалюк. – Краснодар: изд-во КубГУ, 1983.

Замечание. Базовым учебником является книга [1]. В тех случаях, когда предпочтительнее использовать другой источник, это отмечено особо.

Функциональный анализ, типовые задания к минисессии 3.

1. Докажите, что любой шар положительного радиуса в бесконечномерном нормированном пространстве не является предкомпактным.

2. Докажите, что функционал $f(x, y) = x + y$ является непрерывным и линейным на прямой $3x + 7y = 0$ в пространстве \mathbb{R}^2 . Возможно ли продолжить его на все пространство \mathbb{R}^2 не увеличивая норму? Если да, то найдите какое-нибудь такое продолжение. Выясните, является ли оно единственным. Ответы обосновать (1+2+1+1=5 баллов).

3. Выясните, сходится ли последовательность $\{\cos(kt)\}_{k \in \mathbb{N}}$ в пространстве $L_2[0, \pi]$. Сходится ли она слабо в этом пространстве? (2+2=4 балла).

4. Докажите, что функционалы принадлежат

$$f_k(u) = \int_0^1 \cos(\pi kt)u(t)dt, \quad u \in L_2[-1, 1],$$

пространству $(L_2[0, 1])^*$. Найдите нормы этих непрерывных линейных функционалов. Сходится ли эта последовательность в пространстве $(L_2[-1, 1])^*$? Сходится ли она в нем *-слабо (1+1+1+1=4 балла)?

5. Найдите вторую обобщенную производную функции

$$f(x) = \begin{cases} \sin(2x), & x \geq 0, \\ 0 & x < 0, \end{cases}$$

(2+2=4 балла)