УДК 517.55

Д.П. Федченко, А.А. Шлапунов [1]

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО ОПЕРАТОРА КОШИ – РИМАНА В ПРОСТРАНСТВЕ ЛЕБЕГА L^2 В ОБЛАСТИ

Аннотация

Пусть D – ограниченная область в $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 1)$, имеющая бесконечно гладкую границу ∂D. В работе описаны необходимые и достаточные условия разрешимости задачи Коши в пространстве Лебега $L^2(D)$ в области D для многомерного оператора Коши – Римана $\overline{\partial}$. В качестве примера рассмотрена ситуация, когда область D есть часть шарового слоя $\Omega(r, R) = B(R) \setminus \overline{B}(r)$ $(0 < r < R < \infty)$ в $\mathbb{C}^n$, где $B(R)$ – шар с центром в нуле и радиуса R, отсекаемая гладкой гиперповерхностью Γ, ориентированной как ∂D. В этом случае, используя разложение Лорана для гармонических функций в шаровом слое $\Omega(r, R)$, мы строим формулу Карлемана, восстанавливающую функцию из класса Лебега $L^2(D)$, по ее значениям на Γ и значениям $\overline{\partial} u$ в области D, если последние принадлежат $L^2(\Gamma)$ и $L^2(D)$ соответственно.

Задача Коши для голоморфных функций одного комплексного переменного является одним из классических примеров некорректной по Адамару задачи. Она естественно возникает в многочисленных приложениях – гидродинамике, теории передачи сигнала и т.д. (см., например, [1], [2] и библиографию к ней). Эта задача активно изучалась в течении XX века и стала одним из стимулов для построения теории условно корректных задач.

В 80-90 годы XX века, в связи с развитием многомерного комплексного анализа и его приложений, во многих научных центрах, в том числе и Красноярской школой комплексного анализа, были проведены серьезные исследования задачи Коши для голоморфных функций многих комплексных переменных в различных функциональных пространствах (см., например, [3], [4], а также [5] и библиографию к ней).

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ N 08-01-00844 и гранта Сибирского федерального университета по научно-методическому проекту N 45.2007

Как оказалось, полученные для системы Коши – Римана результаты могут быть естественным образом обобщены в контексте общих линейных переопределенных эллиптических систем (см., например, [5]). Это в вою очередь позволило по новому взглянуть на задачу Коши для голоморфных функций. Именно, стало ясно, что требует изучения более общая задача – задача Коши для многомерной (неоднородной!) системы Коши – Римана. Конечно, в случае одного комплексного переменного эти задачи, как легко видеть, эквивалентны. Однако в многомерной ситуации доказательство эквивалентности задач требует информации о разрешимости $\overline{\partial}$-уравнения (см, например, [6]) или, другими словами, о когомологиях комплекса Дольбо в степени 1 в различных классах функций, а значит, такая эквивалентность не имеет места для областей, не обладающих некоторыми свойствами выпуклости относительно оператора Коши – Римана.

В этой работе мы рассматриваем следующую (обобщенную) постановку задачи Коши для оператора Коши-Римана в классах Лебега и не налагаем никаких условий на "выпуклость" области, где ищется решение.

Задача 1. *Пусть D – ограниченная область в $\mathbb{C}^n$, $n \geq 1$, с гладкой границей ∂D, а Γ – измеримое подмножество ∂D). По заданным функции u_0 из класса Лебега $L^2(\Gamma)$ и дифференциальной форме f бистепени $(0,1)$ с коэффициентами из класса $L^2(D)$, найти такую функцию $u \in L^2_{loc}(D \cup \Gamma)$, что*

$$\int_D u\overline{\partial}\phi = \int_\Gamma u_0\phi - \int_D f \wedge \phi \tag{1}$$

для всех дифференциальных форм ϕ бистепени $(n, n-1)$ с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами в $\overline{D}$, носители которых компактны в $(D \cup \Gamma)$.

Мы покажем, что эта задача имеет не более одного решения и сведем ее к задаче гармонического продолжения из меньшей области в большую, обобщая тем самым теорему Айзенберга – Кытманова (см. [3, теорема 4]) о задаче Коши для голоморфных функций (ср. также [4, теорема 4.1]). В случае, когда D есть часть шарового слоя в $\mathbb{C}^n$, отсеченная гладкой гиперповерхностью Γ, мы строим точные и приближенные решения задачи Коши 1 с помощью разложения Лорана для гармонических функций. Для функций одной комплексной переменной на этом пути получается известная формула Голузина – Крылова (см. [2, теорема 1.1]).

1 Постановка задачи

Пусть $\mathbb{R}^n$ – n-мерное евклидово пространство, а $\mathbb{C}^n$ - n-мерное комплексное пространство, точками которого являются упорядоченные наборы n комплексных чисел $z = (z_1, ..., z_n)$, где $z_j = x_j + \sqrt{-1}x_{j+n}$, $j = 1, ..., n$, $\sqrt{-1}$ - мнимая единица, $x = (x_1, ..., x_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n}$. Мы предполагаем, что $n > 1$, хотя основные теоремы справедливы и для $n = 1$.

Пусть D – ограниченная область в $\mathbb{R}^{2n}$, то есть открытое связное множество, а $\overline{D}$ – ее замыкание. Всюду далее для простоты предполагается, что граница ∂D области D является бесконечно гладкой. Ограничения на гладкость границы используются прежде всего для работы со слабыми граничными значениями гармонических функций конечного порядка роста. Однако, поскольку мы работаем с распределениями конечного порядка (порядка не более 1 на открытых подмножествах $\mathbb{C}^n$ и порядка не более 3/2 на гиперповерхностях), то все утверждения работы справедливы для областей с границами некоторой (возможно, достаточно высокой) конечной гладкости.

Кроме того, пусть Γ – связное открытыое (в топологии ∂D) подмножество границы области D. Мы предполагаем, что граница $\partial\Gamma$ поверхности Γ является кусочно-гладкой.

Для открытого множества $D \subset \mathbb{C}^n$ обозначим через $C^\infty(D)$ пространство бесконечно дифференцируемых функций в D, а через $C^\infty(\overline{D})$ – пространство бесконечно дифференцируемых функций в D, (любые) производные которых непрерывно продолжаются на $\overline{D}$. Также обозначим через $C^{\infty}_{comp}(D\cup\Gamma)$ множество функций из $C^{\infty}(\overline{D})$, имеющих компактный носитель в $D\cup\Gamma$.

Далее, пусть $L^2(D)$ будет пространство Лебега т.е. множество (комплекснозначных) функций в области D, квадрат которых интегрируем по Лебегу в D. Как известно, это гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(u,v)_{L^2(D)} = \int_D u(z)\overline{v}(z)\frac{d\overline{z}\wedge dz}{(2\pi\sqrt{-1})^n}.$$

Как обычно, пространство Соболева $H^s(D)$ $(s\in\mathbb{N})$ состоит из измеримых функций, чьи частные производные до порядка s включительно принадлежат пространству Лебега $L^2(D)$, а пространство Соболева $H^s_{loc}(D\cup\Gamma)$, состоит из измеримых функций, принадлежащих $H^s(\sigma)$ для каждого измеримого множества σ в D с $\overline{\sigma}\subset D\cup\Gamma$. Пространства Соболева $H^s(D)$ с $s\in\mathbb{R}_+$, иногда упоминающиеся в работе, определяются стандартным образом, например с помощью подходящей процедуры интерполяции (см., [7]).

Обозначим через $\overline{\partial}$ оператор Коши – Римана в $\mathbb{C}^n$. Как известно, оператор Коши – Римана индуцирует дифференциальный комплекс совместности

$$0\longrightarrow\Lambda^{(0,0)}\xrightarrow{\overline{\partial}}\Lambda^{(0,1)}\xrightarrow{\overline{\partial}_1}\Lambda^{(0,2)}\xrightarrow{\overline{\partial}_2}\ldots\xrightarrow{\overline{\partial}_{n-1}}\Lambda^{(0,n)}\longrightarrow 0,$$

который называется комплексом Дольбо (см., например, [6] или [8]). Здесь $\Lambda^{(q,r)}$- множество дифференциальных форм бистепени (q,r), а $\overline{\partial}_j$ суть операторы комплексного дифференцирования дифференциальных форм; как обычно, если это не приводит к недоразумениям, мы будем писать просто $\overline{\partial}$ вместо $\overline{\partial}_j$. Пространство дифференциальных форм бистепени (q,r) с коэффициентами из какого-нибудь пространства $\mathfrak{S}(D)$ обозначим через $\mathfrak{S}(D,\Lambda^{(q,r)})$.

Нашей ближайшей целью будет "оправдание" такой постановки задачи, да и самого названия "задача Коши" для задачи 1.

Мы выбрали в качестве пространства данных Коши в области D пространство Лебега потому, что пространство Лебега $L^2(D)$ является достаточно широким и, в то же время, не выходит за рамки "обычных" функций. Кроме того, такая постановка позволяет в дальнейшем привлекать методы теории гильбертовых пространств, при этом немаловажно, что пространство Лебега $L^2(D)$ имеет очень простое скалярное произведение.

Заметим теперь, что $C^\infty_{comp}(D, \Lambda^{(n,n-1)}) \subset C^\infty_{comp}(D \cup \Gamma, \Lambda^{(n,n-1)})$. Поэтому условие (1) в частности означает, что, если решение задачи существует, то

$$\overline{\partial} u = f \text{ в смысле распределений в области } D. \tag{2}$$

Для $n = 1$ уравнение (2) с правой частью из $L^2(D)$ всегда разрешимо в пространстве Соболева $H^1(D)$; при этом "хорошее" решение для непрерывных функций задается (несобственным) интегралом Коши – Грина (ср., например, [8, §1]):

$$u(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_D \frac{f(\zeta) d\overline{\zeta} \wedge d\zeta}{\zeta - z},$$

а для произвольных функций из $L^2(D)$ это решение задается с помощью сингулярного интегрального оператора, индуцированного интегралом Коши – Грина. Конечно, существуют и менее регулярные решения.

Ситуация при $n > 1$ более сложна. Во-первых, как видно из (1), необходимым условием разрешимости задачи 1 является равенство

$$\overline{\partial} f = 0 \text{ в смысле распределений в области } D. \tag{3}$$

Во-вторых, как стало ясно еще в 60-х годах прошлого столетия, $\overline{\partial}$-задача в многомерном случае субэллиптична. Например, не для всех дифференциальных форм $f \in L^2(D, \Lambda^{(0,1)})$, удовлетворяющим (3), найдется решение уравнения (2) в пространстве Соболева $H^s(D)$ для $s > 1/2$, даже если D- шар (ср. [9]). По этой причине решение задачи Коши 1 мы ищем в пространстве $L^2_{loc}(D \cup \Gamma)$, т.е. предполагаем некоторую потерю регулярности (ср. [10]).

Напомним теперь определение слабых предельных значений на Γ (см. [11], а также [8, §11], [4, (2.1)]). Зафиксируем какую-нибудь определяющую функцию $\rho \in C^\infty$ для области D, т.е. вещественнозначную бесконечно гладкую функцию с $|d\rho| \neq 0$ на ∂D и такую, что

$$D = \{z \in \mathbb{C}^n : \rho(z) < 0\}.$$

Положим $D_\varepsilon = \{x \in D : \rho(x) < -\varepsilon\}$. Тогда для достаточно малых $\varepsilon > 0$ множества $D_\varepsilon \Subset D \Subset D_{-\varepsilon}$ суть области с бесконечно гладкими границами $\partial D_{\pm\varepsilon}$ класса C^∞, а векторы $x + \nu^{\mp}_\varepsilon(x)$ принадлежат $\partial D_{\pm\varepsilon}$ для каждой точки $x \in \partial D$ (здесь $\nu^{\mp}_\varepsilon(x)$ – внешняя и внутренняя нормали к поверхности ∂D в точке x длины ε). Всюду далее ds_ε – форма объема на ∂D_ε индуцированная из $\mathbb{C}^n$, $ds = ds_0$.

Определение 1. Пусть $u \in H^1_{loc}(D)$, а $u_0 \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ – распределение на Γ. Будем говорить, что $u = u_0$ в смысле *слабых граничных значений на* Γ, если

$$< u_0, v >= \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\partial D} v(y) u(y + \nu^+_\varepsilon(y)) ds(y) \text{ для всех } v \in C^\infty_{comp}(\Gamma).$$

Лемма 1. *Если $u \in H^1_{loc}(D)$, а $u_0 \in \mathcal{D}'(\Gamma)$, то $u = u_0$ в смысле слабых граничных значений на Γ тогда и только тогда, когда*

$$< u_0, \phi >= \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\partial D_\varepsilon} u\phi \textit{ для всех } \phi \in C^\infty_{comp}(D \cup \Gamma, \Lambda^{(n,n-1)}). \quad (4)$$

Доказательство. Как известно, см., например, [8, лемма 3.5],

$$d\bar{\zeta}[k] \wedge d\zeta = 2^{n-1} \sqrt{-1}^n (-1)^{k-1} \bar{\rho}_k(\zeta) ds \text{ на } \partial D, \quad (5)$$

где

$$\rho_k(\zeta) = \frac{\partial \rho}{\partial \zeta_k} \frac{1}{\left(\sum_{j=1}^n |\frac{\partial \rho}{\partial \zeta_k}|^2\right)^{1/2}}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Так как $\rho_\varepsilon = \rho + \varepsilon$ является определяющей функцией области D_ε, то

$$d\bar{\zeta}[k] \wedge d\zeta = 2^{n-1}\sqrt{-1}^n(-1)^{k-1}\overline{\rho}_k(\zeta)ds_\varepsilon \text{ на } \partial D_\varepsilon.$$

Поэтому, если $u = u_0$ в смысле слабых граничных значений на Γ, то справедливо также и (4).

Обратно, так как $|d\rho| \neq 0$ в окрестности ∂D, то для каждой точки $\zeta_0 \in \partial D$ найдется номер k такой, что $\rho_k \neq 0$ в некоторой окрестности ζ_0. Поэтому, с помощью разбиения единицы, для всякой $v \in C^\infty_{comp}(\Gamma)$ легко построить форму $\phi \in C^\infty_{comp}(D \cup \Gamma, \Lambda^{(n,n-1)})$, сужение которой на ∂D совпадает с vds. Значит, из из теоремы Банаха – Штейнгауза и (4) следует, что $u = u_0$ в смысле слабых граничных значений на Γ. $\square$

Замечание 1. *Если V – какая-нибудь относительно компактная подобласть D, то из теоремы Банаха – Штейнгауза и леммы 1 следует, что $u = u_0$ в смысле слабых граничных значений на Γ тогда и только тогда, когда*

$$< u_0, \phi >= \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\partial D_\varepsilon} u\phi \text{ для всех } \phi \in C^\infty_{comp}((D \cup \Gamma) \setminus V, \Lambda^{(n,n-1)}). \quad (6)$$

Заметим, что для однородной задачи Коши естественным пространством граничных значений в задаче Коши 1 является одна из разновидностей пространства Соболева $H^{-1/2}(\Gamma)$ (ср. [11], [4, §2]). Это пространство понимается как двойственное к пространству $H^{1/2}(\Gamma)$ относительно спаривания в $L^2(\Gamma)$. Вопрос о том, какие функции класса $L^2(D \cup \Gamma)$ имеют следы (в каком-нибудь смысле) на Γ в пространстве $H^{-1/2}(\Gamma)$ требует отдельного обстоятельного исследования. В нашей ситуации все упрощается, поскольку решение u задачи 1 не только принадлежит $L^2_{loc}(D \cup \Gamma)$, но и $\overline{\partial} u \in L^2(D, \Lambda^{(0,1)})$.

Лемма 2. *Всякая функция v класса Лебега $L^2(D)$ такая, что $\overline{\partial} u \in L^2(D, \Lambda^{(0,1)})$, принадлежит $H^1_{loc}(D)$ и имеет в смысле слабых граничных значений следы на ∂D в классе $H^{-1/2}(\partial D)$.*

Доказательство. Обозначим через $H^1_0(D)$ замыкание линейного подмножества $C^\infty_{comp}(D)$ в пространстве $H^1(D)$. Зафиксируем какую-нибудь функцию $v \in L^2(D)$ такую, что $\overline{\partial} v \in L^2(D, \Lambda^{(0,1)})$. Ясно, что выражение

$$4(\overline{\partial} w, \overline{\partial} v)_{L^2(D)}, \quad w \in H^1_0(D),$$

определяет непрерывный линейный функционал на пространстве $H^1_0(D)$. Поэтому из [12, гл. 3, §5, теорема 6]) и теоремы Рисса об общем виде непрерывного линейного функционала на пространствах Гильберта следует, что существует единственная функция $V \in H^1_0(D)$, для которой

$$\Delta V = \Delta v \text{ в смысле распределений в } D.$$

В частности, функция $v - V \in L^2(D)$ гармонична в области D, а v есть сумма функции $V \in H^1_0(D)$ и $v - V$. Поэтому $v \in H^1_{loc}(D)$.

Кроме того гармоническая функция $v - V \in L^2(D)$ имеет конечный порядок роста, а значит имеет слабые предельные значения на ∂D, принадлежащие пространству $H^{-1/2}(\partial D)$, см., [11].

Наконец, поскольку функция $V \in H^1_0(D)$ имеет следы на ∂D в обычном смысле, то она имеет и (нулевые) слабые предельные значения на ∂D. Поэтому функция $v = (v - V) + V$ также имеет слабые предельные значения на ∂D, принадлежащие классу $H^{-1/2}(\partial D)$. В частности, это означает, что решение u задачи 1 имеет слабые предельные значения на Γ, принадлежащие классу $H^{-1/2}_{loc}(\Gamma)$. □

Однако работать в пространствах Соболева с отрицательной гладкостью не очень удобно на практике, Поэтому мы рассматривать задачу Коши с граничными данными из пространства $H^{-1/2}(\Gamma)$ не будем.

Лемма 3. *Тождество* (1) *выполнено для всех дифференциальных форм* ϕ *бистепени* $(n, n-1)$ *с коэфффициентами из пространства* $C^\infty_{comp}(D \cup \Gamma)$ *в том и только том случае, когда выполнено* (2) *и*

$$u = u_0 \text{ в смысле слабых граничных значений на } \Gamma. \qquad (7)$$

Доказательство. Пусть задана форма $f \in L^2(D, \Lambda^{(0,1)})$. Как мы уже отмечали выше, условие (1) означает, что $\overline{\partial} u = f$ в смысле распределений в области D. Таким образом, из леммы 2 следует, что решение задачи 1, когда существует, принадлежит еще и пространству Соболева $H^1_{loc}(D)$.

Кроме того, для $\phi \in C^\infty_{comp}(D \cup \Gamma, \Lambda^{(n,n-1)})$ по формуле Стокса мы имеем:

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\partial D_\varepsilon} u\phi = \lim_{\varepsilon \to +0} \left(\int_{D_\varepsilon} f \wedge \phi + \int_{D_\varepsilon} u \overline{\partial} \phi \right) =$$
$$\int_D f \wedge \phi + \int_D u \overline{\partial} \phi,$$

поскольку $u \in L^2(D)$, $f \in L^2(D, \Lambda^{(0,1)})$. Наконец, применяя (1), мы видим, что

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\partial D_\varepsilon} u\phi = \int_\Gamma u_0 \phi \text{ для всех } \phi \in C^\infty_{comp}(D \cup \Gamma, \Lambda^{(n,n-1)}).$$

Обратно, из (2) и леммы 2 следует, что $u \in H^1_{loc}(D)$, а значит, интегралы в определении 1 имеют смысл для u. Более того, снова применяя формулу Стокса мы имеем, для всех $\phi \in C^\infty_{comp}(D \cup \Gamma, \Lambda^{(n,n-1)})$:

$$\int_\Gamma u_0 \phi = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\partial D_\varepsilon} u\phi = \int_D f \wedge \phi + \int_D u \overline{\partial} \phi,$$

т.е. выполнено (1). □

Итак, лемма 3 означает, что для достаточно гладких данных f и u_0 задача 1 превращается в классическую задачу Коши для оператора Коши – Римана.

Продолжим обсуждение необходимых условий разрешимости задачи Коши. При $n > 1$ оператор $\overline{\partial}$ индуцирует еще и касательный оператор $\overline{\partial}_\tau$ на ∂D (см., например, [6] или [8, §18]), а значит, данные Коши u_0 и f должны быть согласованы. Именно, поскольку $\overline{\partial}^2 = 0$, то для разрешимости задачи 1 необходимо, чтобы

$$\int_\Gamma u_0 \wedge \overline{\partial} \psi - \int_D f \wedge \overline{\partial} \psi = 0 \text{ для всех } \psi \in C^\infty_{comp}(D \cup \Gamma, \Lambda^{(n,n-2)}). \qquad (8)$$

Ясно, что для $n = 1$ условие (8) всегда выполнено. При $n > 1$ и $f = 0$, условие (8) означает, что u_0 есть CR-функция на Γ (см., например, [6], [8, §18]).

Лемма 4. *Если $f \in H^1(D, \Lambda^{(0,1)})$, то условие (8) выполнено в том и только том случае, когда $\overline{\partial} f = 0$ в смысле распределений в области D и*

$$\int_\Gamma f \wedge \psi + \int_\Gamma u_0 \wedge \overline{\partial}\psi = 0 \text{ для всех } \psi \in C^\infty_{comp}(D \cup \Gamma, \Lambda^{(n,n-2)}). \qquad (9)$$

Доказательство. Немедленно следует из формулы Стокса и того факта, что $C^\infty_{comp}(D) \subset C^\infty_{comp}(D \cup \Gamma)$. □

Поскольку первый интеграл в (9) зависит только от касательной части формы f, а второй индуцирует касательный оператор Коши-Римана $\overline{\partial}_\tau$ на Γ, то условие (9) можно интерпретировать как "$\overline{\partial}_\tau u_0 = \tau(f)$ в смысле слабых граничных значений на Γ".

2 Теорема единственности

Обозначим через $\mathfrak{U}(\zeta, z)$ ядро Мартинелли – Бохнера в $\mathbb{C}^n$:

$$\mathfrak{U}(\zeta, z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \frac{\overline{\zeta}_j - \overline{z}_j}{|\zeta - z|^{2n}} d\overline{\zeta}[j] \wedge d\zeta, \quad \zeta \neq z.$$

В силу (5), ядро Мартинелли – Бохнера может быть записано в следующем виде:

$$\mathfrak{U}(\zeta, z) = \mathfrak{R}_z(\zeta) ds(\zeta), \quad z \notin \partial D, \quad \zeta \in \partial D.$$

Теперь через $M_{\partial D} v(z)$, $z \notin \partial D$, обозначим преобразование Мартинелли – Бохнера с плотностью $v \in \mathcal{D}'(\partial D)$ (см., например, [3, §2]), т.е. результат действия распределения $v \in \mathcal{D}'(\partial D)$ на функцию $\mathbb{R}_z(\zeta)$. Как известно, $M_{\partial D} v(z)$ является гармонической функцией относительно переменной z всюду в $\mathbb{C}^n$ вне носителя распределения v (см., например, [3, §2]).

В частности, для $v \in L^2(\Gamma)$ определен интеграл типа Мартинелли – Бохнера $M_\Gamma v$:

$$M_\Gamma v(z) = \int_\Gamma v(\zeta) \mathfrak{U}(\zeta, z), \qquad z \notin \Gamma.$$

Если $\partial D \in C^2$, то интеграл типа Мартинелли – Бохнера индуцирует ограниченный линейный оператор

$$M_\Gamma : L^2(\Gamma) \to L^2(D)$$

(см., например, [4, следствие 1.3]).

Далее, для дифференциальной формы $f \in L^2(D, \Lambda^{(0,1)})$ обозначим через $T_D f$ следующий сингулярный интеграл:

$$T_D f(z) = -\int_D f(\zeta) \wedge \mathfrak{U}(\zeta, z).$$

Как хорошо известно, T_D индуцирует ограниченный линейный оператор

$$T_D : L^2(D, \Lambda^{(0,1)}) \to H^1(\tilde{D})$$

для всякой ограниченной области $\tilde{D} \supset D$ с достаточно гладкой границей $\partial\tilde{D}$ (см., например, [8, §16.1]).

Уместно отметить, что потенциал $T_D f$ совпадает с интегралом Коши – Грина при $n = 1$, однако он не является, вообще говоря, решением уравнения (2), даже если $\overline{\partial} f = 0$ в D.

Лемма 5. *Для любой функции $v \in L^2(D)$ такой, что $\overline{\partial} v \in L^2(D, \Lambda^{(0,1)})$, справедлива формула Мартинелли-Бохнера-Грина:*

$$M_{\partial D} v + T_D \overline{\partial} v = \chi_D v \ \text{в } \mathbb{C}^n, \tag{10}$$

где χ_D – характеристическая функция области D.

Доказательство. Мы уже отмечали, что в условиях леммы $v \in H^1_{loc}(D)$. Как хорошо известно, для всякой функции класса $H^1(D)$ формула Мартинелли – Бохнера справедлива, см., например, [8, теорема 1.3]. Поскольку для каждого $\varepsilon > 0$ функция v принадлежит $H^1(D_\varepsilon)$, то

$$M_{\partial D_\varepsilon} v + T_{D_\varepsilon} \overline{\partial} v = \chi_{D_\varepsilon} v. \tag{11}$$

Переходя в (11) к пределу при $\varepsilon \to +0$, с учетом замечания 1 и леммы 2, мы и заключаем, что формула (10) справедлива в $\mathbb{C}^n \setminus \partial D$. Наконец, так как ∂D есть множество меры нуль, то формула верна в $\mathbb{C}^n$. $\square$

Приведем еще один довод в пользу задачи 1: из обобщеной формулировки мы легко получаем, что задача 1 не может иметь более одного решения.

Лемма 6. *Задача 1 имеет не более одного решения.*

Доказательство. В самом деле, полагая $u_0 = 0$, $f = 0$, и используя лемму 3, мы видим, что решение задачи Коши 1 есть в этом случае голоморфная функция класса $L^2_{loc}(D \cup \Gamma)$, у которой $u_{|\Gamma} = u_0 \in L^2(D)$ в смысле слабых предельных значений. Возьмем какую-нибудь область $G \subset D$ с бесконечно гладкой границей ∂G такую, что $\partial G \cap \partial D = \Gamma_1 \Subset \Gamma$ имеет хотя бы одну внутреннюю точку. Для этой области справедлива формула Мартинелли – Бохнера (10):

$$M_{\partial G} v(z) = (\chi_D v)(z), \quad z \notin \partial G. \tag{12}$$

Так как преобразование Мартинелли – Бохнера $M_{\partial G} v$ гармонично всюду в $D^+ \cup \Gamma_1 \cup G$ и зануляется в D^+, то, по теореме единственности для гармонических функций, оно равно нулю тождественно. В силу (12) функция v также исчезает в G, а значит, и в D (по теореме единственности для голоморфных функций). $\square$

3 Критерий разрешимости задачи

Ясно, что интегралы $M_\Gamma u_0$ и $T_D f$ являются гармоническими всюду вне $\overline{D}$ как интегралы, зависящие от параметров. Поэтому и функция

$$F = M_\Gamma u_0 + T_D f$$

является гармонической всюду вне $\overline{D}$. С учетом формулы Мартинелли – Бохнера (10), функция F может содержать достаточно много информации о решении задачи Коши 1, если оно существует.

Нашей дальнейшей целью будет получение критерия разрешимости задачи Коши 1 с помощью функции F. Для этого выберем область D^+

так, чтобы множество $\Omega = D \cup \Gamma \cup D^+$ было бы областью с кусочно-гладкой границей. Пусть $D^- = D$. Обозначим через $F^\pm$ сужение F на $D^\pm$. В силу вышесказанного, F^+ гармонична в D^+. Кроме того, если $\partial D \in C^\infty$, то интеграл типа Мартинелли – Бохнера индуцирует ограниченный линейный оператор

$$M_\Gamma^+ : L^2(\Gamma) \to L^2(B(0,R) \setminus D),$$

(см., например, [4, следствие 1.3]).

Итак, по построению, $F^\pm \in L^2(D^\pm)$.

Теорема 1. *Задача Коши* 1 *разрешима тогда и только тогда выполнено условие* (8) *и функция* F^+ *гармонически продолжается из* D^+ *на* Ω.

Доказательство. Пусть задача 1 разрешима, а u – ее решение. Необходимость условия (8) нами уже отмечена выше.

Положим

$$\mathcal{F} = F - \chi_D u \tag{13}$$

По определению функция $\mathcal{F}$ гармонична в D^+ и принадлежит $L^2(D^+)$ и $L^2_{loc}(D \cup \Gamma)$.

Возьмем какую-нибудь область $G \subset D$ с кусочно-гладкой границей, для которой $\overline{G} \cap \partial D = \Gamma_1 \Subset \Gamma$ имеет хотя бы одну внутреннюю точку $x_0 \in \Gamma$. Тогда по формуле Мартинелли – Бохнера (10) для области G мы имеем в $D^+ \cup G \cup \Gamma_1$:

$$\mathcal{F} = M_\Gamma u_0 + T_D f - \chi_D u =$$

$$M_\Gamma u + T_G \overline{\partial} u + T_{D \setminus G} f - M_{\partial G} u - T_G \overline{\partial} u.$$

Поэтому для всякой функции $\beta \in C^\infty_{comp}(D \cup \Gamma_1)$, равной единице в некоторой окрестности $\Gamma_2 \subset \Gamma$ точки x_0, мы получаем в $D^+ \cup \Gamma_2 \cup G$:

$$\mathcal{F} = (M_{\Gamma \setminus \Gamma_1}(1-\beta)u - M_{\partial G \setminus \Gamma_1}(1-\beta)u + T_{D \setminus G} f).$$

Из этого равенства следует, что $\mathcal{F}$ гармонически продолжается из D^+ в $D^+ \cup G \cup \Gamma_1$, поскольку интеграл $T_{D\setminus G} f$ гармоничен всюду вне множества интегрирования как интеграл, зависящий от параметра z, а преобразования $M_{\Gamma\setminus\Gamma_1}(1-\beta)u$ и $M_{\partial G\setminus\Gamma_1}(1-\beta)u$ гармоничны всюду вне $(\Gamma \setminus \Gamma_1) \cup (\partial G \setminus \Gamma_1)$.

Наконец, в силу произвольности области G с описанными выше свойствами, $\mathcal{F}$ на самом деле гармонична в Ω и на D^+ совпадает с F^+.

Обратно, пусть существует функция $\mathcal{F}$, гармоничная в Ω и совпадающая с F^+ на D^+. Положим

$$u(z) = F^- - \mathcal{F}^-. \tag{14}$$

По построению функция u принадлежит $L^2_{loc}(D\cup\Gamma) \cap H^1_{loc}(D)$. Теперь из теоремы о слабом скачке интеграла типа Мартинелли – Бохнера (см. [13]) и того факта, что $T_D f$ и функция $\mathcal{F}$ принадлежат $H^1_{loc}(\Omega)$, следует, что

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \int_{\partial D_\varepsilon} u\phi = \lim_{\varepsilon\to+0} \left(\int_{\partial D_\varepsilon} F^-\phi - \int_{\partial D_{-\varepsilon}} F^+\phi \right) =$$
$$\lim_{\varepsilon\to+0} \left(\int_{\partial D_\varepsilon} (M^-_\Gamma u_0)\phi - \int_{\partial D_{-\varepsilon}} (M^+_\Gamma u_0)\phi \right) = \int_\Gamma u_0\phi,$$

для всех $\phi \in C^\infty(D\cup\Gamma, \Lambda^{(n,n-1)})$ т.е. $u = u_0$ в смысле слабых предельных значений на Γ (см. лемму 1).

Для завершения доказательства нам осталось убедиться, что выполнено (1). С этой целью рассмотрим $(0,1)$-форму $g = (f - \overline{\partial} u)$, принадлежащую $\mathcal{D}'(D, \Lambda^{(0,1)})$.

Если $\Phi \in C^\infty_{comp}(\Omega), \Lambda^{(n,n-1)})$ то $\Phi^- \in C^\infty_{comp}(D\cup\Gamma, \Lambda^{(n,n-1)})$. Значит, то по формуле Стокса,

$$\int_{D_\varepsilon} (f - \overline{\partial} u) \wedge \Phi = \int_{D_\varepsilon} f \wedge \Phi - \int_{\partial D_\varepsilon} u\Phi + \int_{D_\varepsilon} u\overline{\partial}\Phi. \tag{15}$$

Поэтому, с учетом того, что $u = u_0$ в смысле слабых предельных значений на Γ, для каждого $\Phi \in C^\infty_{comp}(\Omega, \Lambda^{(n,n-1)})$ существует предел

$$A(\Phi) = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_{D_\varepsilon} (f - \overline{\partial} u) \wedge \Phi = \int_D f \wedge \Phi - \int_\Gamma u_0\Phi + \int_D u\overline{\partial}\Phi. \tag{16}$$

Кроме того, ясно, что

$$|A(\Phi)| \leq C\,\|\Phi\|_{C^1(\overline{\Omega},\Lambda^{(n,n-1)})}$$

с некоторой неотрицательной постоянной C, не зависящей от Φ. Таким образом, предел $A(\Phi)$ определяет некоторое распределение, скажем $\hat{g}$, из $\mathcal{D}'(\Omega,\Lambda^{(0,1)})$ с носителем в $D\cup\Gamma$, сужение которой на D совпадает с g.

Далее, мы уже показали, что $u = u_0$ в смысле слабых предельных значений на Γ. Поэтому из условия (8) следует, что

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{D_\varepsilon}(\overline{\partial}u)\wedge\overline{\partial}\Psi = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\partial D_\varepsilon} u\overline{\partial}\Psi = \int_\Gamma u_0\overline{\partial}\Psi = \int_D f\wedge\overline{\partial}\Psi$$

для всех $\Psi\in C^\infty_{comp}(\Omega,\Lambda^{(n,n-2)})$. Или, другими словами,

$$A(\overline{\partial}\Psi) = 0 \text{ для всех } \Psi\in C^\infty_{comp}(\Omega,\Lambda^{(n,n-2)}). \qquad (17)$$

В частности, форма g $\overline{\partial}$-замкнута в D. Кроме того, форма g является козамкнутой, т.е. удовлетворяет $\overline{\partial}^* g = 0$ в смысле распределений в D.

В самом деле, обозначим через Δ_{2n} обычный оператор Лапласа в $\mathbb{R}^{2n}$. Очевидно, что $\overline{\partial}^*\overline{\partial} = -\frac{1}{4}\Delta_{2n}$. Пусть $\mathfrak{G}(\zeta-z)$ – фундаментальное решение оператора Лапласа в $\mathbb{R}^{2n}$. Как хорошо известно (ср. [8, §1]),

$$\mathfrak{U}(\zeta,z) = -4\sum_{j=1}^n(-1)^{j-1}\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial z_j}(\zeta-z)d\overline{\zeta}[j]\wedge d\zeta,$$

$$T_D f = -4\sum_{j=1}^n(-1)^{j-1}\frac{\partial}{\partial z_j}\int_D\mathfrak{G}(\zeta-z)f(\zeta)\wedge d\overline{\zeta}[j]\wedge d\zeta.$$

Поэтому, из свойств фундаментального решения немедленно следует, что

$$4\overline{\partial}^*\overline{\partial}T_D f = \Delta_{2n}T_D f = 4\overline{\partial}^*\chi_D f \text{ в смысле распределений в } \mathbb{C}^n. \qquad (18)$$

Теперь из гармоничности функции $\mathcal{F}$ и потенциала $M_\Gamma u_0$ вытекает, что, в смысле распределений в D,

$$\overline{\partial}^* g = \overline{\partial}^*(f-\overline{\partial}(M_\Gamma u_0 + T_D f\mathcal{F})) = \overline{\partial}^*(f-\overline{\partial}T_D f) = 0. \qquad (19)$$

Итак, из (19) и (18) следует, что $(\overline{\partial}+\overline{\partial}^*)g = 0$ в смысле распределений в D. В частности, это означает, что коэффициенты g_j, $j = 1,2\ldots n$, формы g гармоничны в D, а поэтому вещественно аналитичны там.

Обозначим через $*$ оператор Ходжа для дифференциальных форм. Положив $\overline{*}h = \overline{*h}$ для дифференциальной формы $h \in C^\infty(\Lambda^{(0,1)})$, нетрудно видеть, что

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{D_\varepsilon} g \wedge \overline{*}\overline{\partial}V = 0 \text{ для всех } V \in C^\infty_{comp}(\Omega). \tag{20}$$

В самом деле, согласно (18),

$$\int_D f \wedge \overline{*}\overline{\partial}V = \int_\Omega \chi_D f \wedge \overline{*}\overline{\partial}V = \int_\Omega \overline{\partial}T_D f \wedge \overline{*}\overline{\partial}V. \tag{21}$$

С учетом того, что $\mathcal{F}$ гармонична в Ω, а $T_D f \in H^1_{loc}(\mathbb{C}^n)$ и $\overline{*}\overline{\partial}V = c(n)\partial(\overline{V}\sum_{j=1}^n dz[j] \wedge d\overline{z}[j])$, мы имеем: $(M_\Gamma u_0)^+ \in H^1_{loc}(D^+ \cup \Gamma)$. Поэтому,

$$\int_D \overline{\partial}\mathcal{F} \wedge \overline{*}\overline{\partial}V = \int_\Omega \overline{\partial}\mathcal{F} \wedge \overline{*}\overline{\partial}V - \int_{\Omega\setminus D} \overline{\partial}\mathcal{F} \wedge \overline{*}\overline{\partial}V =$$

$$-\int_{\Omega\setminus D} \overline{\partial}\mathcal{F} \wedge \overline{*}\overline{\partial}V = -\int_{\Omega\setminus D} \overline{\partial}(M_\Gamma u_0 + T_D f)^+ \wedge \overline{*}\overline{\partial}V =$$

$$-\int_{\Omega\setminus D} \overline{\partial}T_D f \wedge \overline{*}\overline{\partial}V + \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\partial D_{-\varepsilon}} \overline{\partial}(M_\Gamma u_0)^+ \wedge (\overline{V}\sum_{j=1}^n dz[j] \wedge d\overline{z}[j]). \tag{22}$$

Кроме того, так как интеграл типа Мартинелли – Бохнера определяет гармонические функции конечного порядка роста вблизи поверхности интегрирования, то на ∂D определены следы (в классе распределений) $\overline{\partial}$-нормальных производных интеграла типа Мартинелли – Бохнера $\overline{\partial}_\nu(M_\Gamma u_0)^+\big|_{\partial D}$ и $\overline{\partial}_\nu(M_\Gamma u_0)^-\big|_{\partial D}$ (см. [3, §2]) и для интегрантов класса $L^2(\Gamma)$ эти следы совпадают (см. [3, лемма 1]).

Поэтому, из (21) и (22),

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{D_\varepsilon} g \wedge \overline{*}\overline{\partial}V =$$

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_{\partial D_{-\varepsilon}} \overline{\partial}(M_\Gamma u_0)^+ \wedge (\overline{V}\sum_{j=1}^n dz[j] \wedge d\overline{z}[j]) - \int_{D_\varepsilon} \overline{\partial}M_\Gamma u_0 \wedge \overline{*}\overline{\partial}V\right) =$$

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_{\partial D_{-\varepsilon}} \overline{\partial}(M_\Gamma u_0)^+ \wedge (\overline{V}\sum_{j=1}^n dz[j] \wedge d\overline{z}[j])\right) -$$

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_{\partial D_\varepsilon}(\overline{\partial}M_\Gamma u_0)^-\wedge(\overline{V}\sum_{j=1}^{n}dz[j]\wedge d\overline{z}[j])\right)=$$
$$<\overline{\partial}_\nu(M_\Gamma u_0)^+_{|\partial D}-\overline{\partial}_\nu(M_\Gamma u_0)^-_{|\partial D},\overline{v}_{|\partial D}>=0,$$

т.е. формула (20) справедлива.

Формула (20), в частности, означает, что

$$A(\overline{*}\overline{\partial}V)=0 \text{ для всех } V\in C^\infty_{comp}(\Omega),$$

или, другими словами, с учетом (17),

$$\overline{\partial}\hat{g}=0 \text{ в } \Omega,\quad \overline{\partial}^*\hat{g}=0 \text{ в } \Omega. \tag{23}$$

А поскольку из равенств (23) следует что распределение $\hat{g}$ с носителем в $D\cup\Gamma$ гармонично в Ω, то $\hat{g}\equiv 0$, т.е. $A(\Phi)=0$ для любой $\Phi\in C^\infty_{comp}(\Omega,\Lambda^{(n,n-1)})$.

Наконец, если $\phi\in C^\infty_{comp}(D\cup\Gamma,\Lambda^{(n,n-1)})$, то по теореме Уитни, найдется форма $\Phi\in C^\infty_{comp}(\Omega,\Lambda^{(n,n-1)})$, совпадающая с ϕ на D. Следовательно, из (15) и (16),

$$\int_D u\overline{\partial}\phi=\int_\Gamma u_0\phi-\int_D f\wedge\phi+A(\Phi)=\int_\Gamma u_0\phi-\int_D f\wedge\phi$$

для всякой $\phi\in C^\infty_{comp}(D\cup\Gamma,\Lambda^{(n,n-1)})$, т.е. u есть решение задачи 1. $\square$

Замечание 2. *Из теоремы* 1 *легко извлечь условия локальной разрешимости задачи Коши. В самом деле, зафиксируем точку* $x_0\in\Gamma$. *Пусть* V *– какая-нибудь (односторонняя) окрестность точки* x_0 *в* D, *а* $\hat{\Gamma}=\partial V\cap\Gamma$. *Положим* $\hat{F}=M_{\hat{\Gamma}}(u_0)+T_V f$. *Так как*

$$F=\hat{F}+M_{\Gamma\setminus\hat{\Gamma}}(u_0)+T_{D\setminus V}f,$$

то F^+ *гармонически продолжается в* $\hat{\Omega}=V\cup\hat{\Gamma}\cup D^+$ *тогда и только тогда, когда этим свойством обладает потенциал* $\hat{F}^+$. *Поэтому, при условии* (8), *решение задачи Коши существует в той окрестности* V, *в которую продолжается потенциал* F^+.

Следствие 1. *Задача Коши 1 разрешима в пространстве $L^2(D)$ тогда и только тогда выполнено условие (8) и функция F^+ гармонически продолжается из D^+ на Ω в классе Лебега $L^2(\Omega)$.*

Доказательство. Если задача Коши 1 разрешима в пространстве $L^2(D)$, то из теоремы 1 вытекает, что функция F^+ гармонически продолжается из D^+ на Ω, а ее продолжение $\mathcal{F}$ задается формулой (13). Поэтому $\mathcal{F} \in L^2(D^\pm) \cap C^\infty_{loc}(\Omega)$. Следовательно, $\mathcal{F} \in L^2(\Omega)$.

Обратно, пусть существует функция $\mathcal{F} \in L^2(\Omega)$, гармоничная в Ω и совпадающая с F^+ на D^+. Тогда из теоремы 1 следует, что задача Коши 1 разрешима, а ее решение u задается формулой (14). Так как $\mathcal{F}^- \in L^2(D)$, то и u принадлежит $L^2(D)$. □

Для $f = 0$ теорема 1 получена в [3] (см. также [4]):

Следствие 2. *Пусть Γ – гладкая гиперповерхность в области Ω, разбивающая Ω на две связные компоненты, D^+ и $D = \Omega \setminus D^+$. Тогда CR-функция $u_0 \in L^2(\Gamma)$ голоморфно продолжается в D в том и только том случае, когда ее интеграл типа Мартинелли – Бохнера $M_\Gamma u_0$ гармонически продолжается из D^+ в Ω.*

4 Базисы с двойной ортогональностью

В работе [3] было предложено применить базисы с двойной ортогональностью для изучения задачи Коши для голоморфных функций (ср. также [4]). Мы коротко изложим этот метод применительно к задаче 1. С этой целью обозначим через $h(\Omega)$ пространство гармонических функций в Ω принадлежащих $L^2(\Omega)$.

Лемма 7. *Если $\omega \Subset \Omega$ – область с кусочно-гладкой границей и $\Omega \setminus \omega$ не* *имеет компактных (связных) компонент, то существует ортонормированный базис* $\{b_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ *в* $h(\Omega)$ *такой, что* $\{b_{\nu|\omega}\}_{\nu=1}^\infty$ *есть ортогональный базис в* $h(\omega)$.

Доказательство. На самом деле эти функции $\{b_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ суть собственные векторы компактного самосопряженного оператора $R(\Omega,\omega)^* R(\Omega,\omega)$, где

$$R(\Omega,\omega) : h(\Omega) \to h(\omega)$$

есть оператор естественного вложения (см. [4, теорема 3.1] или [3, замечание 8], а также [14]). $\square$

Воспользуемся базисом $\{b_\nu\}$ для того, чтобы упростить следствие 1. С этой целью зафиксируем области $\omega \Subset D^+$ и Ω как в лемме 7 и обозначим через

$$c_\nu(F^+) = \frac{(F^+, b_\nu)_{L^2(\omega)}}{\|b_\nu\|^2_{L^2(\omega)}}, \qquad \nu \in \mathbb{N}, \tag{24}$$

коэффициенты Фурье функции F^+ относительно ортогонального базиса $\{b_{\nu|\omega}\}$ в $h(\omega)$.

Следствие 3. *Задача Коши* 1 *разрешима в классе* $L^2(D)$ *тогда и только тогда, когда выполнено условие* (8) *и сходится ряд* $\sum_{\nu=1}^\infty |c_\nu(F^+)|^2$.

Доказательство. В самом деле, если задача 1 разрешима в классе $L^2(D)$, то согласно следствию 1, выполнено условие (8) и найдется функция $\mathcal{F} \in h(\Omega)$, совпадающая с F^+ в ω.

По лемме 7,

$$\mathcal{F}(z) = \sum_{\nu=1}^\infty k_\nu(\mathcal{F}) b_\nu(z), \qquad z \in \Omega, \tag{25}$$

где

$$k_\nu(\mathcal{F}) = (\mathcal{F}, b_\nu)_{L^2(\Omega)}, \qquad \nu \in \mathbb{N},$$

– коэффициенты Фурье $\mathcal{F}$ по ортогональному базису $\{b_\nu\}$ в $h(\Omega)$.

Теперь из неравенства Бесселя следует, что ряд $\sum_{\nu=1}^\infty |k_\nu(\mathcal{F})|^2$ сходится.

Наконец,

$$c_\nu(F^+) = \frac{(R(\Omega,\omega)\mathcal{F}, R(\Omega,\omega)b_\nu)_{L^2(\omega)}}{(R(\Omega,\omega)b_\nu, R(\Omega,\omega)b_\nu)_{L^2(\omega)}} =$$

$$\frac{(\mathcal{F}, R(\Omega,\omega)^* R(\Omega,\omega)b_\nu)_{L^2(\Omega)}}{(b_\nu, R(\Omega,\omega)^* R(\Omega,\omega)b_\nu)_{L^2(\Omega)}} = k_\nu(\mathcal{F}),$$

т.е. необходимость условий следствия доказана.

Обратно, если выполнены условия следствия, то, согласно теореме Рисса-Фишера, мы имеем

$$\mathcal{F}(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu(F^+) b_\nu(z), \qquad z \in \Omega, \tag{26}$$

в пространстве $h(\Omega)$.

По построению, $\mathcal{F}$ совпадает с F^+ в ω. Значит, из следствия 1 вытекает, что задача 1 разрешима в классе $L^2(D)$. $\square$

Примеры базисов со свойством двойной ортогональности можно найти в [4], [5, глава 12], [14].

Получим формулу Карлемана для решений задачи 1. С этой целью, для $z \in \Omega$, $\zeta \notin \overline{\omega}$, $z \neq \zeta$, рассмотрим ядра Карлемана:

$$\mathfrak{C}_N(\zeta, z) = \mathfrak{U}(\zeta, z) - \sum_{\nu=1}^{N} c_\nu(\mathfrak{U}(\zeta,\cdot)) b_\nu(z), \ N \in \mathbb{N}.$$

Следствие 4. *Для всякой функции $v \in L^2(D)$, которая имеет на Γ слабые предельные значения класса $L^2(\Gamma)$ и для которой $\overline{\partial} v \in L^2(D, \Lambda^{(0,1)})$, справедлива формула Карлемана:*

$$\lim_{N\to\infty} \|v - v_N\|_{L^2(D)} = 0 \tag{27}$$

где

$$v_N = \int_\Gamma v(\zeta)\mathfrak{C}_N(\zeta,\cdot) - \int_D (\overline{\partial} v)(\zeta) \wedge \mathfrak{C}_N(\zeta,\cdot).$$

Доказательство. В самом деле, для данных Коши $f = \overline{\partial} v$ и $u_0 = v_{|\Gamma}$, задача Коши 1 разрешима в классе $L^2(D)$. Значит из следствия 1 вытекает, что решение u этой задачи Коши задается формулой (14). Теперь из леммы 6 следует, что $u = v$ в D.

Так как $\overline{\omega} \cap \overline{D} = \emptyset$, то можно воспользоваться теоремой Фубини и заключить, что для всех $\nu \in \mathbb{N}$:

$$k_\nu(F^+) = \left(\int_\Gamma v_0(\zeta) c_\nu(\mathfrak{U}(\zeta, \cdot)) - \int_D f(\zeta) \wedge c_\nu(\mathfrak{U}(\zeta, \cdot)) \right). \tag{28}$$

Более того, (см. доказательство следствия 3), мы знаем, что функция $\mathcal{F}$ задается формулой (25) с коэфициентами (24). Частичные суммы ряда $\mathcal{F}$ в $L^2(\Omega)$, а значит, суженные на D^-, они сходятся к $\mathcal{F}^-$ в $L^2(D)$, т.е. мы имеем:

$$\lim_{N \to \infty} \Bigg\| v - M_\Gamma v_0 - T_D \overline{\partial} v -$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} \left(\int_\Gamma v_0(\zeta) c_\nu(\mathfrak{U}(\zeta, \cdot)) - \int_D f(\zeta) \wedge c_\nu(\mathfrak{U}(\zeta, \cdot)) \right) b_\nu \Bigg\|_{L^2(D)} = 0.$$

Это и дает равенство (27) после перегруппировки слагаемых. □

Замечание 3. *Формула* (14) *означает, что* $v = M_\Gamma v + T_D \overline{\partial} v - \mathcal{F}$. *Так как* $\mathcal{F}$ *и* b_ν *гармоничны, то из теоремы Стильтьеса – Витали следует, что ряд* (26) *сходится в* $C^\infty_{loc}(\Omega)$. *Значит, если* $v_{|\Gamma} \in H^{s-1/2}(\Gamma)$, $\overline{\partial} v \in H^p(D, \Lambda^{(0,1)})$, *то* $v \in H^s_{loc}(D \cup \Gamma) \cap H^{p+1}_{loc}(D)$ *и мы дополнительно имеем: 1)* $\overline{\partial} v_N$ *сходится к* $\overline{\partial} v$ *в* $H^p_{loc}(D \cup \Gamma, \Lambda^{(0,1)})$; *2)* v_N *сходится к* v *в* $H^s_{loc}(D \cup \Gamma) \cap H^{p+1}_{loc}(D)$, $s \in \mathbb{N}$.

Уместно отметить, что на самом деле мы получили те же самые ядра Карлемана, что и для случая $f = 0$ (см. [4, §5]).

5 Пример построения формулы Карлемана

В этом параграфе мы построим формулу Карлемана задачи без применения базисов с двойной ортогональностью. В качестве примера рассмотрим следующую ситуацию. Пусть $B(R)$ – шар с центром в нуле и радиуса R, а $\Omega = \Omega(r, R) = B(R) \setminus \overline{B}(r)$ $(0 < r < R < \infty)$ есть шаровой слой в $\mathbb{C}^n$. Пусть гладкая связная гиперповерхность $\Gamma \subset \Omega(r, R)$ – разбивает

$\Omega(r, R)$ на две связные компоненты D^+ и $D = D^-$ так, чтобы

$$\max(dist(\overline{D}, \partial B(R), dist(\overline{D}, \partial B(r)) > 0.$$

Далее, пусть пусть $\{h_\nu^{(i)}\}$ – система однородных гармонических многочленов, образующих ортонормированный базис в $L^2(\partial B_1)$ (здесь ν – степень однородности, а $J(\nu) = \frac{(2n+2\nu-2)(2n+\nu-3)!}{\nu!(2n-2)!}$ – количество линейно независимых многочленов степени ν в этом базисе, см. [15, глава XI]).

Следствие 5. *Если $dist(\overline{D}, \partial B(R)) > 0$, то функция F^+ гармонически продолжается из D^+ на $\Omega = D \cup \Gamma \cup D^+$ тогда и только тогда, когда*

$$\limsup_{\nu \to \infty} \sqrt[\nu]{\max_{1 \le i \le J(\nu)} |\hat{k}_\nu^{(i)}|} \le r, \tag{29}$$

где

$$\hat{k}_\nu^{(i)} = \int_\Gamma u_0(\zeta) \frac{*\partial \overline{h_\nu^{(i)}}(\zeta)}{n + \nu - 1} + \int_D f(\zeta) \wedge \frac{*\partial \overline{h_\nu^{(i)}}(\zeta)}{n + \nu - 1}. \tag{30}$$

Доказательство. При сформулированных условиях найдется шаровой слой $\hat{\Omega} = \Omega(\hat{r}, \hat{R}) \Subset D^+$, с некоторыми радиусами $r < \hat{r} < \hat{R} < R$.

Очевидно, $F^+ \in C^\infty(\overline{\Omega}(\hat{r}, \hat{R}))$ гармонична в этом слое. Поэтому мы можем разложить функцию F^+ в ряд Лорана по однородным гармоническим функциям в $\hat{\Omega}$ (см., например, [16, §8]). Именно,

$$F^+(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{J(\nu)} k_\nu^{(i)} h_\nu^{(i)}(z) + \hat{k}_0 \mathfrak{G}(z) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{J(\nu)} \hat{k}_\nu^{(i)} \frac{h_\nu^{(i)}(z)}{|z|^{2n+2\nu-2}}, \quad z \in \hat{\Omega}, \tag{31}$$

где ряд сходится равномерно вместе со всеми производными на компактах из $\hat{\Omega}$, а коэффициенты $k_\nu^{(i)}$, $\hat{k}_\nu^{(i)}$ определены однозначно.

Если $dist(\overline{D}, \partial B(R)) > 0$, то

$$|z| > |\zeta| \text{ для всех } z \in \hat{\Omega}, \zeta \in \Gamma.$$

Для того, чтобы узнать коэффициенты $k_\nu^{(i)}$, $\hat{k}_\nu^{(i)}$, воспользуемся следующим разложением, ядра Мартинелли – Бохнера, полученным в [3, лемма 2]:

$$\mathfrak{U}(\zeta,z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{J(\nu)}\frac{*\partial_\zeta\overline{h_\nu^{(i)}}(\zeta)h_\nu^{(i)}(z)}{(n+\nu-1)|z|^{2n+2\nu-2}},$$

где ряд также сходится равномерно вместе со всеми производными на компактах из конуса $\{z\in\mathbb{C}^n,\zeta\in\mathbb{C}^n: |z|>|\zeta|\}$.

Подставляя данное разложение в интегралы $M_\Gamma u_0$ и $T_D f$ мы получим, что $k_\nu^{(i)}=0$, $\hat{k}_0=0$, а $\hat{k}_\nu^{(i)}$, $\nu\in\mathbb{N}$, заданы формулой (30) для всех $\nu\in\mathbb{Z}_+, 1\le i\le J(\nu)$.

Пусть теперь найдется функция $\mathcal{F}$, гармоническая в шаровом слое Ω и совпадающая с F^+ в D^+. Разлагая ее в шаровом слое Ω в ряд Лорана по однородным гармоническим функциям, мы получаем:

$$\mathcal{F}(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{J(\nu)}c_\nu^{(i)}h_\nu^{(i)}(z)+\hat{c}_0\mathfrak{G}(z)+\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{J(\nu)}\hat{c}_\nu^{(i)}\frac{h_\nu^{(i)}(z)}{|z|^{2n+2\nu-2}},\quad z\in\hat{\Omega},\quad (32)$$

где ряд сходится равномерно вместе со всеми производными на компактах из Ω, а коэффициенты $c_\nu^{(i)}$, $\hat{c}_\nu^{(i)}$ определены однозначно. Поскольку $\hat{\Omega}\subset\Omega$, разложение справедливо и для $z\in\hat{\Omega}$. Однако коэффициенты разложения Лорана определены однозначно, поэтому, сравнивая (31) и (32), мы видим, что $c_\nu^{(i)}=k_\nu^{(i)}$, $\hat{c}_\nu^{(i)}=\hat{k}_\nu^{(i)}$. Следовательно, для гармонического продолжения $\mathcal{F}$ функции F^+ справедлива формула:

$$\mathcal{F}(z)=\frac{1}{|z|^{2n-2}}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{J(\nu)}\hat{k}_\nu^{(i)}h_\nu^{(i)}(z/|z|)\right)|z|^{-\nu},\quad z\in\Omega.\quad (33)$$

Теперь, проинтегрировав $|\mathcal{F}|^2$ по произвольной сфере радиуса $r<\gamma<R$, и учтя (33), мы получим

$$\frac{1}{\gamma^{2n-2}}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\max_{1\le i\le J(\nu)}|\hat{k}_\nu^{(i)}|^2\right)|\gamma|^{-2\nu}\le\frac{1}{\gamma^{2n-2}}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{J(\nu)}|\hat{k}_\nu^{(i)}|^2\right)|\gamma|^{-2\nu}<\infty.\quad (34)$$

В силу произвольности $r<\gamma<R$ и формулы Коши – Адамара мы заключаем, что выполнено условие (29).

Обратно, как известно (см. [15, глава XI]),

$$1\le J(\nu)\le c\nu^{2n-2},\quad (35)$$

$$\max_{|z|=1} |h_\nu^{(i)}(z)| \le c(n)\nu^{n-1}. \tag{36}$$

Кроме того, очевидно, что

$$\sum_{i=1}^{J(\nu)} \hat{k}_\nu^{(i)} h_\nu^{(i)}(z/|z|) \le J(\nu) \max_{1\le i\le J(\nu)} |\hat{k}_\nu^{(i)}| \max_{|z|=1} |h_\nu^{(i)}(z)|.$$

Поэтому из формулы Коши – Адамара для радиуса сходимости степенного ряда и формул (35), (36) немедленно следует, что при выполнении условия (29) ряд (33) сходится в $\mathbb{C}^n \setminus \overline{B}(r)$, а значит и в Ω. Этот ряд и дает гармоническое продолжение функции F^+ на Ω. $\square$

Получим теперь формулу Карлемана задачи 1.

Следствие 6. *Пусть* $dist(\overline{D}, \partial B(R)) > 0$. *Тогда для любой функции* $v \in L^2_{loc}(D \cup \Gamma)$ *такой, что* $\overline{\partial} v \in L^2(D, \Lambda^{(0,1)})$ *справедлива формула Карлемана:*

$$v(z) = \lim_{N\to\infty} v_N(z), \qquad \overline{\partial} v(z) = \lim_{N\to\infty} \overline{\partial} v_N(z), \qquad z \in D, \tag{37}$$

где первый предел достигается в $L^2_{loc}(D\cup\Gamma)$ *(и даже в* $H^1_{loc}(D)$*), второй – в* $L^2_{loc}(D \cup \Gamma, \Lambda^{(0,1)})$,

$$v_N(z) = \left(\int_\Gamma v(\zeta)\mathfrak{C}_N(\zeta, z) + \int_D (\overline{\partial} v)(\zeta) \wedge \mathfrak{C}_N(\zeta, z) \right),$$

а

$$\mathfrak{C}_N(\zeta, z) = \mathfrak{U}(\zeta, z) - \sum_{\nu=0}^{N} \sum_{i=1}^{J(\nu)} \frac{*\partial_\zeta \overline{h_\nu^{(i)}(\zeta)} h_\nu^{(i)}(z)}{(n+\nu-1)|z|^{2n+2\nu-2}}$$

– ядра Карлемана.

Доказательство. В самом деле, для данных Коши $f = \overline{\partial} u$ и $u_0 = u_{|\Gamma}$ задача Коши 1 разрешима. Поэтому, согласно теореме 1 и следствию 5, выполнены условия (8) и (29), а решение u этой задачи задается формулой (14). В силу единственности решения задачи Коши мы заключаем, что $u = v$ в D.

Более того, теперь (см. доказательство следствия 5) мы знаем, что функция $\mathcal{F}$ задана формулой (33) с коэффициентами (30), т.е. для всех $z \in D \cup \Gamma$ мы имеем

$$v(z) = \int_\Gamma u_0(\zeta)\mathfrak{U}(\zeta, z)) + \int_D f(\zeta)\mathfrak{U}(\zeta, z))-$$

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{\nu=0}^{N} \sum_{i=1}^{J(\nu)} \left(\int_\Gamma u_0(\zeta)(*\partial)\frac{\overline{h_\nu^{(i)}}(\zeta)}{n+\nu-1} + \right.$$

$$\left. \int_D f(\zeta) \wedge (*\partial)\frac{\overline{h_\nu^{(i)}}(\zeta)}{n+\nu-1} \right) \frac{h_\nu^{(i)}(z)}{|z|^{2n+2\nu-2}},$$

что и дает тождество (37) после перегруппировки слагаемых.

Что касается характера сходимости, то нужно отметить следующее: функция $\mathcal{F}$ гармонична в Ω, а ряд (32) состоит из гармонических слагаемых. По этой причине, в силу теоремы Стильтьеса – Витали ряд (32) сходится равномерно вместе со всеми производными на компактах из Ω к гармонической функции $v - F^-$. $\square$

Подобным образом доказываются следующие утверждения (ср. [3, теорема 5] для $f \equiv 0$).

Следствие 7. *Если $dist(\overline{D}, \partial B(r)) > 0$, то то функция F^+ гармонически продолжается из D^+ на $\Omega = D \cup \Gamma \cup D^+$ тогда и только тогда, когда*

$$\limsup_{\nu\to\infty} max_{1\le i\le J(\nu)} \sqrt[\nu]{|k_\nu^{(i)}|} \le 1/R,$$

где

$$k_\nu^{(i)} = \int_\Gamma u_0(\zeta)(*\partial)\frac{\overline{h_\nu^{(i)}}(\zeta)}{(n+\nu-1)|\zeta|^{2n+2\nu-2}} +$$

$$\int_D f(\zeta) \wedge (*\partial)\frac{\overline{h_\nu^{(i)}}(\zeta)}{(n+\nu-1)|\zeta|^{2n+2\nu-2}}. \tag{38}$$

Следствие 8. *Пусть $dist(\overline{\Gamma}, \partial B(r)) > 0$. Тогда для всякой функции*

$u \in L^2_{loc}(D \cup \Gamma)$ такой, что $\overline{\partial} u \in L^2(\overline{D}, \Lambda^{(0,1)})$ справедлива формула Карлемана:

$$v(z) = \lim_{N\to\infty} v_N(z), \qquad \overline{\partial} v(z) = \lim_{N\to\infty} \overline{\partial} v_N(z), \qquad z \in D, \tag{39}$$

где первый предел достигается в $L^2_{loc}(D\cup\Gamma)$ (и даже в $H^1_{loc}(D)$), второй – в $L^2_{loc}(D \cup \Gamma, \Lambda^{(0,1)})$,

$$v_N(z) = \left(\int_\Gamma v(\zeta)\mathfrak{C}_N(\zeta, z) + \int_D (\overline{\partial} v)(\zeta) \wedge \mathfrak{C}_N(\zeta, z)\right),$$

а

$$\mathfrak{C}_N(\zeta, z) = \mathfrak{U}(\zeta, z) - \mathfrak{U}(\zeta, 0) + *\partial_\zeta \sum_{\nu=1}^{N} \sum_{i=1}^{J(\nu)} \frac{\overline{h^{(i)}_\nu(\zeta)} h^{(i)}_\nu(z)}{(n+\nu-1)|\zeta|^{2n+2\nu-2}}$$

– ядра Карлемана.

Уместно отметить, что при $n = 1$ и $f \equiv 0$ соотношения (37) и (39) суть хорошо известные формулы Голузина – Крылова (см., например, [2, теорема 1.1]).

Список литературы

[1] Carleman T. *Les fonctions quasianalytiques*, Gauthier-Villars, Paris, 1926.

[2] Айзенберг Л.А. *Формулы Карлемена в комплексном анализе. Первые приложения*, Новосибирск, Наука, 1990.

[3] Айзенберг Л.А., Кытманов А.М. *О возможности голоморфного продолжения в область функций, заданных на куске ее границы*, Мат. сб., **182**:5 (1991), 490-597.

[4] Шлапунов А.А., Тарханов Н.Н. *О задаче Коши для голоморфных функций класса Лебега L^2 в области*, Сиб. мат. журнал, **33**:5, 1992, 914–922.

[5] Tarkhanov N.N. *The Cauchy problem for solutions of elliptic equations*, Berlin, Akademie Verlag, 1995.

[6] Хенкин Г.М. *Метод интегральных представлений в комплексном анализе*, Итоги науки и техники. современные проблемы математики(фундаментальные направления), ВИНИТИ, Москва, **7** (1985), 23-124.

[7] Егоров Ю.В., Шубин М.А. *Линейные дифференциальные уравнени с частными производными. Основы классической теории*, Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, М.: ВИНИТИ АН СССР, **30** (1988), 264 с.

[8] Кытманов А.М. *Интеграл Бохнера-Мартинелли и его применения*, Новосибирск, Наука, 1992.

[9] Kerzman N. *Hölder and L^p-estimates for solutions of $\overline{\partial} u = f$*, Comm.Pure and Appl.Math, **24** :3 (1971), 301-379.

[10] Hörmander L. *L^2-estimates and existense theorems for the $\overline{\partial}$ operator*, Acta Math., **113**:1-2 (1965), 89-152.

[11] Straube E.J. *Harmonic and analytic functions admitting a distribution boundary value*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci., **11**:4 (1984), 559–591.

[12] Михайлов В.П. *Дифференциальные уравнения в частных производных*, М.: Наука, 1976.

[13] Чирка Е.М. *Аналитическое представление CR-функций*, Мат. сб., **98** (1975), 591-623.

[14] Shapiro H.S *Stefan Bergman's theory of doubly-orthogonal functions. An operator-theoretic approach.* Proc. Roy. Ac. Sect. **79**:6 (1979), 49-56.

[15] Соболев С.Л. *Введение в теорию кубатурных формул*, Наука, Москва, 1974.

[16] Тарханов Н.Н. *Ряд Лорана для решений эллиптических систем*, Наука, Новосибирск, 1991.

Шлапунов Александр Анатольевич, Сибирский федеральный университет, институт математики, Красноярск, 660041, пр. Свободный, 79.

e-mail: shlapuno@lan.krasu.ru

Федченко Дмитрий Петрович, Сибирский федеральный университет, институт математики, Красноярск, 660041, пр. Свободный, 79.

e-mail: fdp@bk.ru

ON THE CAUCHY PROBLEM FOR MULTI-DIMENSIONAL CAUCHY-RIEMANN OPERATOR IN LEBESQUE SPACE L^2 IN A DOMAIN

D.P. Fedchenko, A.A. Shlapunov

Abstract

Let D be a bounded domain in $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 1)$ with C^∞-smooth boundary ∂D. We describe necessary and sufficient solvability conditions for the Cauchy problem in the Lebesque spaces $L^2(D)$ in D for multi-dimensional Cauchy-Riemann operator $\overline{\partial}$. As an example we consider such a situation: the domain D is a part of a spherical shell $\Omega(r, R) = B(R) \setminus \overline{B}(r)$ $(0 < r < R < \infty)$, where $B(R)$ is a ball with the center at origin and of radius R, cut off by a smooth hypersurface Γ oriented as ∂D. In this case using the Laurent series for harmonic functions in the shell $\Omega(R, r)$ we construct Carleman's formulae for functions from the Lebesque space $L^2(D)$, by their values on $\overline{\Gamma}$ and the values of $\overline{\partial} u$ in D if they belong to $L^2(\Gamma)$ and $L^2(D)$ respectively.