

## Перечень тем и вопросов, выносимых на промежуточный осенний экзамен по дисциплине “Алгебра”

(1 курс, 2013-2014 уч. год, лектор Колесников С.Г.)

### Тема 1: системы линейных алгебраических уравнений

**Основные определения и понятия.** Системы линейных уравнений, определение решения системы, эквивалентные системы. Совместные, несовместные, определённые и неопределённые системы. Общее и частное решение системы.

#### Основные теоремы и методы.

1. Метод исключения неизвестных.

### Тема 2: определители

**Основные определения и понятия.** Определитель матрицы, транспонированная матрица, минор, алгебраическое дополнение.

#### Основные теоремы и методы.

1. Свойства определителя: транспонированной матрицы; матрицы с нулевой строкой; матрицы, полученной перестановкой строк; матрицы, содержащей одинаковые строки; матрицы, содержащей пропорциональные строки; матрицы, строка которой является линейной комбинацией других строк. Преобразования матрицы, не изменяющие определителя.
2. Методы вычисления определителей: разложение по строке или столбцу; приведение к треугольному виду; рекуррентные соотношения; выделение линейных множителей.
3. Лемма о линейной комбинации алгебраических дополнений и элементов строк определителя.
4. Формулы Крамера.

### Тема 3: основные алгебраические структуры: группы, кольца, поля

**Основные определения и понятия.** Группа, кольцо, поле; подстановки и перестановки, транспозиция, четность перестановки и подстановки; операции сложения и умножения матриц; сравнения, наибольший общий делитель, взаимно простые числа.

#### Основные теоремы.

1. Теорема о числе перестановок  $n$  символов.
2. Группа подстановок.
3. Кольцо матриц над ассоциативно-коммутативным кольцом с единицей.
4. Теорема об умножении определителей.
5. Обратная матрица, критерий её существования.
6. Теорема о делении целых чисел.
7. Алгоритм Евклида нахождения НОД двух целых чисел.
8. Линейное представление НОД двух целых чисел.
9. Кольцо вычетов по модулю  $m$ .

## Перечень типовых задач для промежуточного осеннего экзамена по дисциплине “Алгебра”

(1 курс, 2013-2014 уч. год, лектор Колесников С.Г.)

### Тема 1: системы линейных алгебраических уравнений

**Типовые задачи.** Найти решение системы линейных алгебраических уравнений или установить её несовместность; исследовать систему с параметром.

### Тема 2: определители

**Типовые задачи.** Вычислить определитель, используя: определение; метод разложения по строке или столбцу; метод приведения к треугольному виду; метод рекуррентных соотношений; метод выделения линейных множителей. Решить систему линейных алгебраических уравнений, используя формулы Крамера.

### Тема 3: основные алгебраические структуры: группы, кольца, поля

**Типовые задачи.** Определить число инверсий и четность перестановки; найти подстановку из заданного уравнения; разложить подстановку в произведение независимых циклов, транспозиций. Вычислить матричное выражение; найти обратную матрицу; решить матричное уравнение. Найти наибольший общий делитель двух целых чисел; решить сравнение, систему сравнений.

### Вариант 1, 2012 год

**Задача 1.** Найти решение системы или установить её несовместность в зависимости от значений параметров  $a, b$

$$\begin{cases} ax + y + z = 4, \\ x + by + z = 3, \\ x + 2by + z = 4. \end{cases}$$

**Задача 2.** Найти подстановку  $X$  из уравнения

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 6 & 2 & 1 & 7 & 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 3 & 5 & 7 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 7 & 5 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

**Задача 3.** Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}.$$

**Задача 4.** На множестве  $\mathbb{C} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$  пар вещественных чисел операция  $\circ$  задана правилом:  $(a, b) \circ (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$ . Доказать, что  $\langle \mathbb{C} \setminus (0, 0), \circ \rangle$  – абелева группа.

### Вариант 2, 2012 год

**Задача 1.** Найти решение системы или установить её несовместность в зависимости от значений параметров  $a, b$

$$\begin{cases} ax + y + z = 1, \\ x + ay + z = b, \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

**Задача 2.** Найти подстановку  $X$  из уравнения

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 4 & 7 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 3 & 7 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 2 & 1 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

**Задача 3.** Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

**Задача 4.** Доказать, что множество вещественных матриц вида

$$\mathbb{C} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 \neq 0 \right\}$$

относительно операции умножения матриц образует коммутативную группу.

## ВАРИАНТ 1, 2011 год.

**Задача 1.** Исследовать систему линейных уравнений и найти её решение в зависимости от параметра  $\lambda$

$$\begin{cases} \lambda x + y + z = 1, \\ x + \lambda y + z = \lambda, \\ x + y + \lambda z = \lambda^2. \end{cases}$$

**Задача 2.** Решить систему сравнений

$$\begin{cases} 3x + 2y \equiv 10 \pmod{11}, \\ 4x^2 + x + 5y \equiv 5 \pmod{11}. \end{cases}$$

**Задача 3.** Определить чётность перестановки в зависимости от  $n$

$$(2, 5, 8, \dots, 3n - 1, 3, 6, 9, \dots, 3n, 1, 4, 7, \dots, 3n - 2).$$

## ВАРИАНТ 2, 2011 год.

**Задача 1.** Исследовать систему линейных уравнений и найти её решение в зависимости от параметра  $\lambda$

$$\begin{cases} (\lambda + 1)x + y + z = 1 + \lambda, \\ x + (\lambda + 1)y + z = 1 + \lambda, \\ x + y + (\lambda + 1)z = 1. \end{cases}$$

**Задача 2.** Решить систему сравнений

$$\begin{cases} 4x + 5y \equiv 8 \pmod{13}, \\ 3y^2 + 2y + 6x \equiv 4 \pmod{13}. \end{cases}$$

**Задача 3.** Определить чётность перестановки в зависимости от  $n$

$$(2, 5, 8, \dots, 3n - 1, 1, 4, 7, \dots, 3n - 2, 3, 6, 9, \dots, 3n).$$