# Темы, выносимые на промежуточный экзамен по курсу «Уравнения математической физики» (2 сессия)

1. Метод разделения переменных для уравнения теплопроводности в стержне. Неоднородное уравнение с однородными граничными условиями. Неоднородное уравнение с неоднородными граничными условиями.

2. Метод разделения переменных для уравнения колебания струны. Однородное уравнение с однородными граничными условиями. Задача Штурма-Лиувилля. Обоснование сходимости ряда. Исследование гладкости полученного решения. Теорема существования классического решения.

3. Метод разделения переменных для уравнения колебания струны. Неоднородное уравнение с однородными граничными условиями. Неоднородное уравнение с неоднородными граничными условиями.

4. Задача Коши для волнового уравнения. Формула Даламбера. Формула Пуассона. Первая краевая задача на полупрямой.

5. Задача Коши для уравнения теплопроводности. Формула Пуассона. Обоснование сходимости интеграла Пуассона и оценка решения. Доказательство бесконечной дифференцируемости по t и x при t>0.

6. Задача Коши для уравнения теплопроводности. Формула Пуассона. Доказательство, что интеграл Пуассона – решение однородного уравнения. Выполнение начальных условий.

7. Принцип максимума для параболического уравнения. Доказываются теоремы, дающие, при выполнении соответствующих условий, следующие априорные оценки решения первой краевой задачи для параболического уравнения
   a. $|u(t,x)| \le \max\left\{\frac{N}{C_0}, q\right\}$;
   b. $\min_{\Gamma_T} u(t,x) \le u(t,x) \le \max_{\Gamma_T} u(t,x)$;
   c. $|u(t,x)| \le e^{Mt}(Nt+q)$.

8. Строгий принцип максимума. Теоремы принципа максимума для задачи Коши для уравнения теплопроводности. Оценки решения.

## Варианты заданий по курсу
## "Уравнения математической физики"
## 2013-2014 учебный год (2 сессия)

### Тема: Постановка задач

### Варианты заданий

1. Записать формулировку следующих задач:
а) колебание струны с однородными краевыми условиями первого рода;
б) вторая краевая задача для уравнения Пуассона;
в) задача Коши для уравнения теплопроводности.
2. Поставить первую краевую задачу для уравнения теплопроводности $(n-1)$ и дать определение классического решения этой задачи.
3. Поставить вторую краевую задачу для уравнения колебания струны и дать определение классического решения этой задачи.
4. Поставить:
а) вторую краевую задачу для уравнения теплопроводности;
б) третью краевую задачу для уравнения Лапласа;
в) задачу Коши для уравнения колебания мембраны.
5. Поставить первую краевую задачу для уравнения Пуассона в квадрате $[0;2]\times[0;2]$ и дать определение классического решения этой задачи.

### Тема: Метод Фурье для волнового уравнения

### Варианты заданий

1. Найти в $\overline{Q}_T = \{(t,x)|0 \leqslant t \leqslant T, 0 \leqslant x \leqslant \pi\}$ решение $u(t,x)$ задачи
$u_{tt} = u_{xx}$,
$u(0,x) = \sin\, 2x$, $u_t(0,x) = \sin\, 5x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$,
$u(t,0) = u(t,\pi) = 0$, $0 \leqslant t \leqslant T$.
2. Найти в $\overline{Q}_T = \{(t,x)|0 \leqslant t \leqslant T, 0 \leqslant x \leqslant l\}$ решение $u(t,x)$ задачи
$u_{tt} = 4u_{xx}$,
$u(0,x) = \sin\, \frac{3\pi x}{l}$, $u_t(0,x) = \sin\, \frac{5\pi x}{l}$, $0 \leqslant x \leqslant l$,
$u(t,0) = u(t,l) = 0$, $0 \leqslant t \leqslant T$.
3. Сформулировать задачу Штурма-Лиувилля для задачи
$u_{tt} = 3u_{xx}$,
$u(0,x) = \sin\, x$, $u_t(0,x) = 0$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$,
$u(t,0) = u(t,\pi) = 0$, $0 \leqslant t \leqslant T$. Найти решение этой задачи Штурма-Лиувилля.

### Тема: Метод Фурье для уравнения теплопроводности

### Варианты заданий

1. Найти в $\overline{Q}_T = \{(t,x)|0 \leqslant t \leqslant T, 0 \leqslant x \leqslant l\}$ решение $u(t,x)$ задачи
$u_t = u_{xx}$,
$u(0,x) = \sin\, \frac{\pi}{l}x \cos\, \frac{\pi}{l}x$, $0 \leqslant x \leqslant l$,
$u(t,0) = u(t,l) = 0$, $0 \leqslant t \leqslant T$.

2. Найти решение $u(t,x)$ краевой задачи
$u_t = 9u_{xx}$,
$u(0,x) = \sin\, 2x \cos\, 2x$, $u(t,0) = u(t,\pi) = 0$.
3. Сформулировать задачу Штурма-Лиувилля для задачи
$u_t = 4u_{xx}$,
$u(0,x) = \sin\, x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$,
$u(t,0) = u(t,\pi) = 0$, $0 \leqslant t \leqslant T$. Найти решение этой задачи Штурма-Лиувилля.

## Тема: Принцип максимума для параболических уравнений

## Варианты заданий

1. Оценить в $\{(t,x)|0 \leqslant t \leqslant \infty, 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ классическое решение $u(t,x)$ первой краевой задачи
$u(0,x) = x(1-x)$, $u(t,0) = u(t,1) = 0$ для уравнения $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$, $\mu = \text{const} > 0$.
2. Оценить в $\{(t,x)|0 \leqslant t \leqslant \infty, 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ классическое решение $u(t,x)$ первой краевой задачи
$u_t = u_{xx} + u^2 + f(t,x)$, $(t,x) \in [0;1] \times [0;1]$,
$u(0,x) = u_0(x)$, $u(t,0) = u(t,1) = 0$.
3. Доказать теорему единственности классического решения первой краевой задачи для уравнения
$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + u^3(t,x) = \mu \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}$, $\mu = \text{const} > 0$.
4. Доказать единственность классического решения $u(t,x)$ задачи
$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + u^2(t,x) + f(t,x)$, $(t,x) \in [0;1] \times [0;1]$, $u(0,x) = u_0(x)$, $u(t,0) = u(t,1) = 0$.
5. Оценить в полосе $\{(t,x)|0 \leqslant x \leqslant \pi, 0 \leqslant t \leqslant \infty\}$ классическое решение $u(t,x)$ первой краевой задачи
$u_t + u_x = u_{xx}$, $u(0,x) = \sin x$, $u(t,0) = u(t,\pi) = 0$.

## Тема: Задача Коши для волнового уравнения

## Варианты заданий

1. Решить задачу Коши
$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}$, $t > 0$, $(x,y) \in R_2$,
$u(0,x,y) = y$, $u_t(0,x,y) = x^2 + y$.
2. Решить задачу Коши
$u_{tt} = 3u_{xx} + u_{yy}$, $t > 0$, $x \in E_1$,
$u(0,x) = \cos^2 x$, $u_t(0,x) = \sin^2 x$.
3. Найти решение следующей задачи:
$u_{tt} = 2u_{xx} + 2x$, $u(0,x) = 3$, $u_t(0,x) = \cos x$, $t \geqslant 0$, $x \in R_1$.

## Тема: Задача Коши для уравнения теплопроводности

## Варианты заданий

1. Решить задачу Коши
$u_t = 3u_{xx} + 2u,\ t > 0,\ x \in R_1,$
$u(0, x) = 3.$
2. Записать формулу Пуассона и указать, решением какой задачи она является.
3. Доказать, что функция
$u(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\, \varphi(\xi)\, d\xi$
есть решение уравнения $u_t = u_{xx}$ при $\varphi(x)$, удовлетворяющей условиям $|\varphi(x)| \leqslant M\, e^{\alpha|x|}$, $\alpha = \text{const} \geqslant 0$, в $\Pi(0, T] = \{0 < t \leqslant T,\ x \in E_1\}$.
4. Выписать решение задачи Коши для одномерного уравнения теплопроводности с начальными данными $u(0, x) = e^x\, \sin x$ (формула Пуассона).

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 20 |
| | | | | | | |

Фамилия Группа

Сибирский федеральный университет

Институт математики

**Экзаменационная работа по уравнениям математической физики**

**2 сессия**

1. Поставить
а) первую краевую задачу для уравнения Лапласа;
б) вторую краевую задачу для уравнения колебания струны;
в) задачу Коши для уравнения теплопроводности стержня. (3 балла)

2. Найти решение задачи
$u_t(t,x) = 4u_{xx}(t,x) + \cos x, \quad u(0,x) = 7\cos x, \quad t \geqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}.$ (3 балла)

3. Доказать единственность классического решения первой краевой задачи для параболического уравнения
$u_t(t,x) = a^2 u_{xx}(t,x) + u^2.$ (4 балла)

4. Сформулировать задачу Штурма-Лиувилля для задачи
$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad u(0,x) = u_0(x), \quad u_t(0,x) = u_1(x),$
$u_x(t,0) = u_x(t,l) = 0, \quad t \geqslant 0, \quad x \in [0,l]$
и найти её решение. (3 балла)

5. Найти решение задачи
$u_t(t,x) = 2u_{xx}(t,x) + 2\sin 3x, \quad u(0,x) = 0,$
$u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \quad t \geqslant 0, \quad x \in [0,\pi].$ (4 балла)

6. Сформулировать одну из теорем принципа максимума. (3 балла)