Список тем и вопросов к зимнему зачету по дисциплине “Теория и методы решения нелинейных дифференциальных уравнений[1]”

Составил кандидат физико-математических наук Фроленков Игорь Владимирович
igor@frolenkov.ru

Что нужно знать перед освоением дисциплины

Для изучения курса «**Теория и методы решения нелинейных дифференциальных уравнений**» необходимо, чтобы Вами были усвоены перечисленные нижедисциплины. Рекомендую ознакомится с материалами по предложенным ссылкам, они могут быть использованы для оперативного получения справочной информации по тем или иным понятиям, используемых в курсе.

- **Математический анализ** (электрон. учеб. пособие, библиотека СФУ)
- **Дополнительные главы математического анализа** (Конспект лекций, библиотека СФУ)
- **Дифференциальные уравнения** (Конспект лекций, библиотека СФУ)
- **Уравнения математической физики или уравнения с частными производными** (Учебное пособие, учеб. пособие по циклу практ. занятий, библиотека СФУ)
- **Функциональный анализ** (Конспект лекций, Опорный конспект лекций, библиотека СФУ)
- **Методы вычислений** (Конспект лекций, библиотека СФУ)
- **Вопросы прикладного функционального анализа** (Конспект лекций, библиотека СФУ)
- **Современные и актуальные проблемы математики и компьютерных наук**.

Содержание разделов и тем лекционного курса

Модуль 1. Стационарные нелинейные операторные уравнения.

1.1.Коэрцитивные операторные уравнения. Лемма об «остром угле».

1.2.Разрешимость операторного уравнения вида A(u)=h, где оператор A является коэрцитивным и слабо компактным.

[1] В настоящее время дисциплина читается на кафедре математического анализа для учащихся магистратуры института математикиСибирского федерального университета.

1.3. Разрешимость нелинейных уравнений с монотонным оператором.

1.4. Разрешимость нелинейных уравнений с полуограниченной вариацией.

1.5. Сильная сходимость галеркинских приближений.

1.6. Краевые задачи как операторные уравнения в банаховых пространствах.

Модуль 2. Функциональные пространства, используемые при изучении нестационарных задач.

2.1. Понятие абстрактной функции, непрерывность и дифференцируемость абстрактной функции.

2.2. Пространство $C^m(S,X)$ и его свойства. Аппроксимационная теорема Вейерштрасса.

2.3. Пространство $L_p(S,X)$ и его свойства.

2.4. Теорема о представлении функционала.

2.5. Некоторые специальные пространства с интегрируемыми производными.

Модуль 3. Нестационарные нелинейные операторные уравнения. Метод монотонности.

3.1. Нелинейные параболические уравнения с монотонным оператором. Постановки задач.

3.2. Свойства оператора: коэрцитивность, семинепрерывность, ограниченность в нестационарном случае. Примеры

3.3. Теоремы разрешимости нелинейных операторных уравнений.

3.4. Нелинейные параболические уравнения с полуограниченной вариацией.

3.5. Задачи с краевыми и начальными условиями как операторные дифференциальные уравнения в банаховых пространствах.

<u>Содержание разделов и тем практических занятий</u>

1. Понятие оператора, операторного уравнения. Рассматривается понятие оператора, функционала. Рассматриваются алгоритмы сведения дифференциальных уравнений к операторным.

2. Свойства операторов.Примеры проверки свойств операторов (коэрцитивность, семинепрерывность, монотонность, ограниченность, слабая компактность и пр.).

3. Построение галеркинских последовательностей, исследование их свойств. Понятие бесконечномерного сепарабельного банахова пространства. Построениегалеркинских приближения. Исследование существования, ограниченности, сходимости галеркинских последовательностей.

4. Определение и свойства простых функции, функции класса (S->X).Примеры построения простых функций. Приближение функций последовательностью простых функций.

5. Понятие дифференцируемости функций класса (S->X), пространство Cm(S,X).Понятие производной/дифференцируемости функций класса **(S->X)**, пространство **Cm(S,X)**, его норма, проверка аксиом нормы. Полнота пространства.

6. Понятие измеримости и интегрируемости по Бохнеру функций класса (S->X), пространство Lp (S,X).Понятие измеримости и интегрируемости функций класса **(S->X)**, пространство **Lp (S,X)**, его норма, проверка аксиом нормы. Полнота пространства.

7. Понятие и свойства нестационарных/эволюционных операторных уравнений. Эволюционный случай для операторных уравнений. Некоторые специальные пространства, в которых ищется решение.

8. Свойства нестационарных операторов. Проверка свойств нестационарных операторов (коэрцитивность, семинепрерывность, монотонность, ограниченность, слабая компактность и пр.).

9. Построение галеркинских последовательностей, исследование их свойств для эволюционных уравнений. Построение галеркинских приближения для эволюционных операторных уравнений. Исследование существования, ограниченности, сходимости галеркинских последовательностей.

<u>Список рекомендованной литературы по курсу</u>

1. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.-М.:Мир, 1978.

2. Дубинский Ю.А. Нелинейные эллиптические и параболические уравнения // Современные проблемы математики. Т.9. – Москва. 1976.

3. Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач. -- М.: Изд-во Московск. ун-та, 1994. - 206 с.

4. Белов Ю.Я., Кантор С.А. Метод слабой аппроксимации. Красноярск: КрасГУ, 1999.

5. BelovYu.Ya. InverseProblemsforPartialDifferentialEquations. - Utrecht: VSP, 2002. 211p.

6. Треногин В.А. Функциональный анализ. - М.: Наука, 1980. - 496с.

7. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. - М.: Изд-во МГУ, 1999.-797с

8. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. - М.: Наука, 1976. -- 391с.

9. Михлин С.Г. Курс математической физики. СПб.: Лань, 2002. – 576с. (ссылка на издание 1968 года)

10. Никольский С.М. Курс математического анализа. Учебник для вузов. – М.:ФИЗМАТЛИТ, 2001.-592с.

11. Теория и методы решения нелинейных дифференциальных уравнений [Электронный ресурс] : **электронный учебно-методический комплекс**: [авторская редакция] / Юрий Яковлевич Белов, Светлана Владимировна Полынцева, Роман Викторович Сорокин, **Игорь Владимирович Фроленков** и Т.Н. Шипина; кол. авт. Сибирский федеральный университет [СФУ] . - Версия 1.0 - Красноярск: Сибирский федеральный университет [СФУ], 2007.

12. Неклассические и обратные краевые задачи [Электронный ресурс] : **электронный учебно-методический комплекс**: [авторская редакция] / Юрий Яковлевич Белов, Роман Викторович Сорокин, **Игорь Владимирович Фроленков**, О.Н. Черепанова и Т.Н. Шипина ; кол. авт. Сибирский федеральный университет [СФУ] . - Версия 1.0 - Красноярск : Сибирский федеральный университет [СФУ], 2007.

13. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Учебник для студентов высших учебных заведений. – Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. – 457 с.

14. Р.В. Сорокин, Т.Н. Шипина. Об однозначной разрешимости одной обратной задачи для системы составного типа в многомерном случае // Вычислительные технологии. 2004, т.9, ч.3, с.59-68

15. Вячеславова П.Ю., Сорокин Р.В. Задача идентификации коэффициентов при младших членах в системе составного типа // Журнал СФУ: математика и физика. Красноярск. 2009.-т.2-№3-с.288-297

Билет 1.

1. Дать определение монотонного оператора $A : B \to B^*$.

2. Дать определение пространства $L_p(S, X)$, записать норму, указать тип.

3. Сформулировать и доказать лемму об остром угле для стационарного случая.

4. Доказать, что оператор $A = -\Delta = -\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $A : \overset{0}{H}{}^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ является коэрцитивным. Здесь $H^{-1}(\Omega) = \left(\overset{0}{H}{}^1(\Omega)\right)^*$.

Билет 2.

1. Дать определение семинепрерывного оператора $A : B \to B^*$. Пример семинепрерывного оператора.

2. Дать определение строго монотонного оператора $A : B \to B^*$. Пример строго монотонного оператора.

3. Метод Галеркина для операторного уравнения $Au = h$, $A : B \to B^*$, (B – банахово пространство, B^* – пространство, сопряженное к B) с семинепрерывным оператором. Построение последовательности галеркинских приближений, доказательство ограниченности галеркинской последовательности.

4. Доказать, что оператор $A = -\Delta = -\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $A : \overset{0}{H}{}^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ является ограниченным. Здесь $H^{-1}(\Omega) = \left(\overset{0}{H}{}^1(\Omega)\right)^*$.

Билет 3.

1. Дать определение Банахова и Гильбертова пространства. Примеры пространств.
2. Дать определение коэрцитивного оператора $A : B \to B^*$.
3. Доказать, что выражение

$$\|u\|_{L_p(S,X)} = \left(\int\limits_S \|u\|_X^p \, ds \right)^{\frac{1}{p}}$$

задает норму в пространстве $L_p(S, X)$.

4. Доказать, что оператор $A = -\Delta = -\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $A : \overset{0}{H}{}^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ является семинепрерывным. Здесь $H^{-1}(\Omega) = \left(\overset{0}{H}{}^1(\Omega) \right)^*$.

Билет 4.

1. Дать определение пространств $C^k(\Omega)$, $C^k(\overline{\Omega})$, $\overset{0}{C}{}^k(\overline{\Omega})$, $L_p(\Omega)$, $H_1(\Omega)$, $\overset{0}{H}_1(\Omega)$. Какие из них являются банаховыми, гильбертовыми? Выписать (где возможно) норму, скалярное произведение.
2. Дать определение строго монотонного оператора $A : B \to B^*$.
3. Метод Галеркина для операторного уравнения $Au = h$, $A : B \to B^*$, (B – банахово пространство, B^* – пространство, сопряженное к B) с семинепрерывным оператором.
4. Доказать, что функция $u = xt$, $x \in (a, b)$, $t \in [0, 1]$ измерима и интегрируема по Бохнеру.

Билет 5.

1. Дать определение сепарабельного и рефлексивного пространств.
2. Определить понятие множества функций $(S \to X)$. Определение функции класса $(S \to X)$ дифференцируемой в точке.
3. Метод Галеркина для операторного уравнения $Au = h$, $A : B \to B^*$, (B – банахово пространство, B^* – пространство, сопряженное к B) с оператором с полуограниченной вариацией.
4. Доказать, что выражение

$$\|u\|_{C^m(S,X)} = \sum_{j=0}^{m} \sup_{t \in S} \left\| u^{(j)}(t) \right\|_X$$

задает норму в пространстве $C^m(S, X)$.

Билет 6.

1. Определить понятие множества функций $(S \to X)$. Определение функции класса $(S \to X)$ дифференцируемой на множестве.
2. Дать определение простой функции из класса $(S \to X)$. Интеграл Бохнера от простой функции.
3. Доказать, что функция $u = xt$, $x \in (a, b)$, $t \in [0, 1]$ измерима и интегрируема по Бохнеру.
4. Привести краевую задачу $-\Delta u = f$, $u \mid_{\partial\Omega}= 0$, где Δ – оператор Лапласа, $\Omega \subset E_n$ – ограниченная область с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$, $f \in L_2(\Omega)$, к операторному уравнению с коэрцитивным, слабо компактным оператором.

Билет 7.

1. Дать определение пространства $C(S, X)$, записать норму, указать тип.
2. Дать определение функции $u \in (S \to X)$ интегрируемой по Бохнеру на множестве S, на множестве $B \subset S$. Привести пример.
3. Сформулировать теорему Рисса о представлении.
4. Доказать, что оператор $A = -\Delta = -\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $A : \overset{0}{H}{}^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ является строго монотонным. Здесь $H^{-1}(\Omega) = \left(\overset{0}{H}{}^1(\Omega)\right)^*$.

Билет 8.

1. Дать определение коэрцитивности оператора $A(t)(u) : L_p((0, T), X) \to L_{p'}((0, T), X^*)$.
2. Дать определение существенно ограниченной функции.
3. Доказать, что выражение
$$\|u\|_{C^m(S,X)} = \sum_{j=0}^{m} \sup_{t \in S} \left\|u^{(j)}(t)\right\|_X$$
задает норму в пространстве $C^m(S, X)$.
4. Доказать, что оператор $A = -\Delta = -\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $A : \overset{0}{H}{}^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ является оператором с полуограниченной вариацией. Здесь $H^{-1}(\Omega) = \left(\overset{0}{H}{}^1(\Omega)\right)^*$.

Билет 9.

1. Дать определение пространства $L_\infty(S, X)$, записать норму, указать тип..

2. Дать определение семинепрерывности оператора $A(t)(u) : L_p((0,T), X) \to L_{p'}((0,T), X^*)$.

3. Сформулировать и доказать лемму об остром угле для стационарного случая.

4. Доказать, что оператор $A = -\Delta = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $A : \overset{0}{H}{}^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ является коэрцитивным. Здесь $H^{-1}(\Omega) = \left(\overset{0}{H}{}^1(\Omega)\right)^*$.

Билет 10.

1. Определить понятие множества функций $(S \to X)$. Определение функции класса $(S \to X)$ дифференцируемой в точке.

2. Дать определение семинепрерывного оператора $A : B \to B^*$.

3. Сформулировать и доказать теорему единственности решения операторного уравнения $Au = h$ с коэрцитивным, слабо компактным и строго монотонным оператором.

4. Доказать, что выражение

$$\|u\|_{C^m(S,X)} = \sum_{j=0}^{m} \sup_{t \in S} \left\| u^{(j)}(t) \right\|_X$$

задает норму в пространстве $C^m(S, X)$.

Билет 11.

1. Дать определение оператора $A : B \to B^*$ с полуограниченной вариацией.
2. Дать определение монотонности оператора $A(t)(u) : L_p((0,T), X) \to L_{p'}((0,T), X^*)$.
3. Доказать, что функция $u = xt$, $x \in (a,b)$, $t \in [0,1]$ измерима и интегрируема по Бохнеру.
4. Пусть $g \geq 0$ – финитная в Ω непрерывная функция. Является ли нормой в $L_2(\Omega)$ функция
$$\rho(u) = \int\limits_{\Omega} g(x)u^2(x)\,dx?$$

Билет 1.

1. Дать определение монотонного оператора $A : B \to B^*$.

2. Дать определение пространства $L_p(S, X)$, записать норму, указать тип.

3. Сформулировать лемму об остром угле для стационарного случая.

4. Сформулировать условие коэрцитивности для оператора $A = -\Delta = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $A : \overset{0}{H^1}(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$. Здесь $H^{-1}(\Omega) = \left(\overset{0}{H^1}(\Omega)\right)^*$.

Билет 2.

1. Дать определение семинепрерывного оператора $A : B \to B^*$. Пример семинепрерывного оператора.

2. Дать определение строго монотонного оператора $A : B \to B^*$. Пример строго монотонного оператора.

3. Метод Галеркина для операторного уравнения $Au = h$, $A : B \to B^*$, (B – банахово пространство, B^* – пространство, сопряженное к B) с семинепрерывным оператором. Алгоритм построения последовательности галеркинских приближений.

4. Сформулировать условие ограниченности для оператора $A = -\Delta = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $A : \overset{0}{H^1}(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$. Здесь $H^{-1}(\Omega) = \left(\overset{0}{H^1}(\Omega)\right)^*$.

Билет 3.

1. Дать определение Банахова и Гильбертова пространства. Примеры пространств.
2. Дать определение коэрцитивного оператора $A : B \to B^*$.
3. Показать, что выражение

$$\|u\|_{L_p(S,X)} = \left(\int\limits_S \|u\|_X^p \, ds \right)^{\frac{1}{p}}$$

задает норму в пространстве $L_p(S, X)$.

4. Сформулировать условие семинепрерывности для оператора $A = -\Delta = -\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $A : \overset{0}{H}{}^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$. Здесь $H^{-1}(\Omega) = \left(\overset{0}{H}{}^1(\Omega) \right)^*$.

Билет 4.

1. Дать определение пространств $C^k(\Omega)$, $C^k(\overline{\Omega})$, $\overset{0}{C}{}^k(\overline{\Omega})$, $L_p(\Omega)$, $H_1(\Omega)$, $\overset{0}{H}_1(\Omega)$. Какие из них являются банаховыми, гильбертовыми? Выписать (где возможно) норму, скалярное произведение.
2. Дать определение строго монотонного оператора $A : B \to B^*$.
3. Метод Галеркина для операторного уравнения $Au = h$, $A : B \to B^*$, (B – банахово пространство, B^* – пространство, сопряженное к B) с семинепрерывным оператором. Построение Галеркинской последовательности.
4. Доказать, что функция $u = xt$, $x \in (a, b)$, $t \in [0, 1]$ измерима и интегрируема по Бохнеру.

Билет 5.

1. Дать определение сепарабельного и рефлексивного пространств.
2. Определить понятие множества функций $(S \to X)$. Определение функции класса $(S \to X)$ дифференцируемой в точке.
3. Метод Галеркина для операторного уравнения $Au = h$, $A : B \to B^*$, (B – банахово пространство, B^* – пространство, сопряженное к B) с оператором с полуограниченной вариацией. Построение Галеркинской последовательности.
4. Доказать, что выражение

$$\|u\|_{C^m(S,X)} = \sum_{j=0}^{m} \sup_{t \in S} \left\| u^{(j)}(t) \right\|_X$$

задает норму в пространстве $C^m(S, X)$.

Билет 6.

1. Определить понятие множества функций $(S \to X)$. Определение функции класса $(S \to X)$ дифференцируемой на множестве.
2. Дать определение простой функции из класса $(S \to X)$. Интеграл Бохнера от простой функции.
3. Доказать, что функция $u = xt$, $x \in (a, b)$, $t \in [0, 1]$ измерима и интегрируема по Бохнеру.
4. Привести краевую задачу $-\Delta u = f$, $u\mid_{\partial\Omega} = 0$, где Δ – оператор Лапласа, $\Omega \subset E_n$ – ограниченная область с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$, $f \in L_2(\Omega)$, к операторному уравнению с коэрцитивным, слабо компактным оператором.

Билет 7.

1. Дать определение пространства $C(S, X)$, записать норму, указать тип.
2. Дать определение функции $u \in (S \to X)$ интегрируемой по Бохнеру на множестве S, на множестве $B \subset S$. Привести пример.
3. Сформулировать теорему Рисса о представлении.
4. Сформулировать условие строгой монотонности оператора $A = -\Delta = -\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $A : \overset{0}{H}{}^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$. Здесь $H^{-1}(\Omega) = \left(\overset{0}{H}{}^1(\Omega)\right)^*$.

Билет 8.

1. Дать определение коэрцитивности оператора $A(t)(u) : L_p((0, T), X) \to L_{p'}((0, T), X^*)$.
2. Дать определение существенно ограниченной функции.
3. Доказать, что выражение
$$\|u\|_{C^m(S,X)} = \sum_{j=0}^{m} \sup_{t \in S} \left\|u^{(j)}(t)\right\|_X$$
задает норму в пространстве $C^m(S, X)$.
4. Сформулировать условие полуограниченной вариации для оператора $A = -\Delta = -\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $A : \overset{0}{H}{}^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$. Здесь $H^{-1}(\Omega) = \left(\overset{0}{H}{}^1(\Omega)\right)^*$.

Билет 9.

1. Дать определение пространства $L_\infty(S, X)$, записать норму, указать тип..
2. Дать определение семинепрерывности оператора $A(t)(u) : L_p((0,T),X) \to L_{p'}((0,T),X^*)$.
3. Сформулировать лемму об остром угле для стационарного случая.
4. Сформулировать условие коэрцитивности для оператора $A = -\Delta = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $A : \overset{0}{H}{}^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$. Здесь $H^{-1}(\Omega) = \left(\overset{0}{H}{}^1(\Omega)\right)^*$.

Билет 10.

1. Определить понятие множества функций $(S \to X)$. Определение функции класса $(S \to X)$ дифференцируемой в точке.
2. Дать определение семинепрерывного оператора $A : B \to B^*$.
3. Сформулировать теорему единственности решения операторного уравнения $Au = h$ с коэрцитивным, слабо компактным и строго монотонным оператором.
4. Доказать, что выражение

$$\|u\|_{C^m(S,X)} = \sum_{j=0}^{m} \sup_{t \in S} \left\| u^{(j)}(t) \right\|_X$$

задает норму в пространстве $C^m(S, X)$.

Билет 11.

1. Дать определение оператора $A : B \to B^*$ с полуограниченной вариацией.
2. Дать определение монотонности оператора $A(t)(u) : L_p((0,T), X) \to L_{p'}((0,T), X^*)$.
3. Доказать, что функция $u = xt$, $x \in (a,b)$, $t \in [0,1]$ измерима и интегрируема по Бохнеру.
4. Пусть $g \geq 0$ – финитная в Ω непрерывная функция. Является ли нормой в $L_2(\Omega)$ функция
$$\rho(u) = \int\limits_{\Omega} g(x) u^2(x)\, dx?$$

Проверка остаточных знаний

1. Дать определение нормы в Банаховом пространстве, эквивалентности норм. Примеры эквивалентных норм.

2. Определение компактного множества. Определение фундаментальной последовательности.

3. Дать определение линейного, ограниченного оператора.

4. Дать определение пространств $C^k(\Omega)$, $L_2(\Omega)$, $\overset{0}{H}_1(\Omega)$. Какие из них являются банаховыми, гильбертовыми? Выписать (где возможно) норму, скалярное произведение.

5. Дать определение нормы в Банаховом пространстве, эквивалентности норм. Примеры эквивалентных норм.

6. Дать определение Банахова пространства. Примеры Банаховых пространств.

7. Дать определение функционала.

8. Дать определение бесконечномерного базиса в банаховом пространстве.

9. Дать определение Гильбертова пространства. Примеры Гильбертовых пространств.

10. Дать определение оператора.

11. Дать определение сильной и слабой сходимости в банаховом пространстве.
