Математический анализ (осенняя минисессия 2018-2019 уч.год)

Лектор Шипина Т.Н.

Теоретические разделы

1. Элементы теории множеств
2. Натуральные числа, индукция, бином Ньютона
3. Аксиоматика множества вещественных чисел
4. Ограниченные множества. Теорема о верхней грани. Принцип Архимеда.
5. Три принципа математического анализа: принцип Кантора о вложенных отрезках, принцип Больцано-Вейерштрасса, принцип Бореля-Лебега о покрытии.
6. Понятие функции. График функции. Обзор элементарных функций.
7. Последовательности. Предел последовательности и его свойства.
8. Теоремы о существовании предела последовательности: критерий Коши, теорема Вейерштрасса о существовании предела монотонной последовательности.
9. Подпоследовательности. Частичный предел последовательности. Верхний и нижний пределы.
10. Предел функции. Предел функции и арифметические операции. Предел функции и неравенства. Теоремы о существовании предела функции (критерий Коши, предел монотонной функции).
11. Первый и второй замечательные пределы.
12. Односторонние пределы функции. Асимптотическое поведение функций.
13. Непрерывность функции. Локальные свойства непрерывных функций.
14. Точки разрыва. Классификация.
15. Глобальные свойства непрерывных функций: теорема Коши о существовании корня, теоремы Вейерштрасса о непрерывных функциях, заданных на отрезке, теорема Больцано-Коши о промежуточном значении.
16. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора о равномерной непрерывности.
17. Точки разрыва монотонной функции.

Из представленных разделов нужно знать все **определения и формулировки теорем.**

Теоремы с доказательствами

- Принцип Кантора о вложенных отрезках.
- Принцип Больцано-Вейерштрасса.
- Принцип Бореля-Лебега.
- Критерий Коши сходимости числовой последовательности.
- Теорема Вейерштрасса о сходимости монотонной последовательности.
- Критерий Коши существования предела функции.
- Теорема Коши о существовании корня.
- Первая теорема Вейерштрасса (Функция, непрерывная на отрезке, ограничена на нем.)
- Вторая теорема Вейерштрасса (Функция, непрерывная на отрезке, принимает на нем свое максимальное и минимальное значение.)
- Теорема Кантора о равномерной непрерывности.

Практические задания

1. Доказать, что при каждом $n \in N$ верно равенство $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{(n+1)n(2n+1)}{6}$.
2. Доказать, что при каждом $n \in N$ верно неравенство $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n+1} > 1$.
3. Доказать, что при каждом $n \in N$ выражение $6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}$ делится на 11.
4. Найти наибольший и наименьший элементы, точную верхнюю и точную нижнюю грани множеств

   А) $\left\{2 + \frac{(-1)^n}{3n}\right\},\ n \in N,$ Б) $\left\{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{5^k}\right\},\ n \in N.$

5. Доказать или опровергнуть утверждения.
   - Если множество X ограничено сверху, то оно имеет точную верхнюю грань.
   - Если множество X не содержит максимального элемента, то множество не имеет точной верхней грани.
   - Если множество X ограничено снизу, то оно имеет точную нижнюю грань.
   - Если множество X не содержит минимального элемента, то множество не имеет точной нижней грани.
   - Если точная верхняя грань множества X существует, то она всегда является предельной точкой множества X.
   - Если множество X имеет точную верхнюю грань, то у множества X существует максимальный элемент.
6. Доказать , что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{n+1} = 0$.
7. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ расходится, если:

   А) $x_n = \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$, Б) $x_n = (1)^n \cdot n$.

8. Доказать , что $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{5}{n}\right)^n = 0$.
9. Доказать , что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, a > 1$.
10. Доказать , что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1, a > 1$.
11. Доказать , что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{a^n} = 0, a > 1$.
12. Доказать , что $\lim\limits_{n\to\infty} (n+5) = +\infty$.
13. Задания на вычисления пределов числовых последовательностей из задачника [1] (§8. №26, №34-36, №39, №53, №57, №58, №66, №68)
14. Доказать, что последовательность $x_n = a + a \cdot q + a \cdot q^2 + \cdots + aq^{n-1}$, где $|q| < 1$, $n \in N$. является фундаментальной.
15. Для последовательности $\{x_n\}$ найти все частичные пределы, верхний и нижний пределы, $\sup\{x_n\}$, $\inf\{x_n\}$.

    А) $x_n = (-1)^n \cdot \frac{3n-1}{n+2}$, Б) $x_n = \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)$, В) $x_n = 3^{(-1)^n}$.

16. Доказать или опровергнуть утверждения.
    - Если последовательность $\{x_n\}$ сходиться, то она ограничена.
    - Если последовательность $\{x_n\}$ ограничена, то она сходиться.

- Если последовательность $\{x_n\}$ ограничена, а последовательность $y_n \to 0$ при $n \to \infty$, то $x_n \cdot y_n \to 0$ при $n \to \infty$.
- Если последовательность $x_n \to 0$, при $n \to \infty$, и последовательность $y_n \to 0$, при $n \to \infty$, то $\frac{x_n}{y_n} \to 0$, при $n \to \infty$.
- Если последовательность $x_n \to 0$, при $n \to \infty$, и последовательность $y_n \to 0$, при $n \to \infty$, то $\frac{x_n}{y_n} \to \infty$, при $n \to \infty$.

17. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+1}{2} = 1$.
18. Задания на вычисления пределов функций из задачника [1] (§9 № 20-32)
19. Привести пример непрерывной на интервале функции и неограниченной на нем.
20. Привести пример непрерывной на интервале функции и ограниченной на нем, но не достигающей ни своей верхней, ни нижней грани.
21. Указать множество точек, в которых непрерывна функция, найти ее точки разрыва, установить их род, нарисовать график функции.

А) $y = \begin{cases} 2^x, & -1 \le x < 1, \\ 1, & x = 1, \\ x-1, & 1 < x \le 4. \end{cases}$ Б) $y = \begin{cases} -x, & x \le -1, \\ \frac{2}{x-1}, & x > -1. \end{cases}$

В) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$. Г) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{x^{2n+1}+1}$.

22. Доказать, что функция $f(x)$ равномерно непрерывна на множестве X.

А) $f(x) = 2x-1,\ X = R$, Б) $f(x) = x^2+1,\ X = (-1;2)$

В) $f(x) = \sin(2x+1),\ X = R$ Г) $f(x) = e^{\arcsin x},\ X = [-1;1]$.

23. Доказать или опровергнуть утверждения:

- Непрерывная на отрезке функция ограничена на нем.
- Ограниченная на отрезке функция непрерывна на нем.
- Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке, то она на этом отрезке равномерно непрерывна.
- Если функция $f(x)$ имеет предел при $x \to x_0$, то она финально ограничена.

Список литературы

1. Л.Д. Кудрявцев и др. Сборник задач по математическому анализу. Том1. –Москва: ФИЗМАТЛИТ. 2003. (http://math.sfu-kras.ru/sites/default/files/kudr_zad_v1.pdf)
2. А.М.Кытманов и др. Математический анализ с элементами алгебры, геометрии и функционального анализа (учебное пособие) (http://math.sfu-kras.ru/sites/default/files/matananaliz2.pdf).

ОБРАЗЕЦ

ВАРИАНТ 0

1. Дать определение ограниченного множества.

2. Доказать или опровергнуть утверждения:

А) Если последовательность $\{x_n\}$ ограничена, то она сходится.

Б) Если множество X не содержит максимального элемента, то множество не имеет точной верхней грани.

3. Сформулировать и доказать принцип Кантора о вложенных отрезках.

4. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

А) $x_n = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$, Б) $x_n = \frac{\sqrt{n^2+1} - n}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$.

5. Доказать, что функция $f(x) = x^2 + 1$ равномерно непрерывна на множестве X.