Перечень тем и вопросов, выносимых на зимнюю сессию
2013-2014 уч. год, 1 курс, 2 поток
Дисциплина “Математический анализ”,
лектор к.ф.-м.н., доцент Фроленков И.В.

1. Понятие функции. График функции. Обзор элементарных функций.
2. Предел функции. Теоремы о пределе функции (Определения предела функции по Коши и Гейне. Определение на языке окрестностей, Арифметические свойства предела функции, Теорема «о двух милиционерах», Первый и второй замечательные пределы, Критерий Коши существования предела функции, Монотонные функции, теорема Вейерштрасса о пределе монотонной функции).
3. Непрерывность функции. Локальные свойства непрерывных функций.
4. Точки разрыва. Классификация. Разрывы монотонной функции.
5. Глобальные свойства непрерывных функций: Теорема Коши о существовании корня, теоремы Вейерштрасса о непрерывных функциях, заданных на отрезке, теорема Больцано-Коши о промежуточном значении.
6. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора о равномерной непрерывности.
7. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Асимптотическое поведение функций. О-символика.
8. Производная и дифференцируемость функции. Теорема о равносильности дифференцируемости и существования производной.
9. Касательная. Геометрический смысл производной, геометрический смысл дифференциала функции. Физический смысл производной.
10. Односторонние производные.
11. Производные суммы, произведения и частного двух функций.
12. Производные сложной и обратной функций.
13. Свойства дифференциала, Инвариантность формы дифференциала первого порядка (дифференциал сложной функции через дифференциал промежуточного аргумента).
14. Производные и дифференциалы высших порядков.
15. Теорема Ферма (о равенстве нулю производной в точке локального максимума или минимума). Теорема Ролля.
16. Теорема Лагранжа. Теорема Коши.
17. Правило Лопиталя.
18. Формула Тейлора. Формула Макларена.
19. Формулы Тейлора для элементарных функций.

Учебные материалы по математическому анализу в электронном виде, а также примеры экзаменационных билетов прошлых лет вы можете найти на сайте

http://igor.frolenkov.ru/onlinelab/first_year/math_analysis/

Некоторые типовые задачи. Математический анализ.
Первый семестр, зимняя минисессия, 2013-2014 год.

1. Дайте определение:

   (a) равномерно непрерывной на множестве E функции;

   (b) дифференцируемой в точке функции и дифференциала функции.

   (c) Непрерывной функции в точке и записать его на языке "ε - δ";

   (d) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

   (e) Число A является пределом функции $f(x)$ при $x \to 0$;

   (f) Непрерывной функции в точке.

   (g) Записать многочлен Тейлора функции $f(x)$ в точке x_0 степени 3 с остаточным членом в форме Пеано.

   (h) Производной функции в точке x_0 справа.

   (i) Записать многочлен Маклорена функции $f(x)$ степени 3 с остаточным членом в форме Пеано.

   (j) Устранимой точки разрыва функции $f(x)$.

   (k) Того, что $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, на языке "$\varepsilon - \delta$".

   (l) Точки разрыва второго рода функции $f(x)$.

   (m) Того, что $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 0$, на языке "$\varepsilon - \delta$".

2. Исследовать функцию на непрерывность, если есть точки разрыва функции, установить их род, схематично изобразить график функции. Исследовать функцию на дифференцируемость в точке $x_0 = 0$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{2}, & |x| < 1, x \neq 0 \\ -x, & |x| \geq 1, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

3. Исследовать функцию на непрерывность, если есть точки разрыва функции, установить их род, схематично изобразить график функции. Исследовать функцию на дифференцируемость в точке $x_0 = 0$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}, & |x| < 1, \\ x, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

4. Вычислить производные

   (a) $y''(x)$, где $y(x) = xe^{2x} \sin x^3 + 2x + 3$,

   (b) $\frac{dy}{dx}$, где $y(x)$ задано неявно $\frac{\sin y}{\cos x} + 2ye^y = x^2 + \sin 2$.

5. Вычислить производные

   (a) $y''(x)$, где $y(x) = \frac{1}{\sin 2x^3} + \ln \cos x$,

   (b) $\frac{dy}{dx}$, где $y(x)$ задано неявно $\sqrt{e^{2xy} + 2x^2} = \cos x$.

6. Вычислить производную $y''(x)$, где $y(x) = (x+1)^7(x-2)\cos x$.

7. Вычислить производную $y''(x)$, где $y(x) = (x^2 - 7x + 8)e^x + \cos x^2$.

8. Найти дифференциалы указанных функций при произвольных значениях аргумента x и при произвольном его приращении $\Delta x = dx$:

$$x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} - 5,$$

$$\sin x - x\cos x + 4$$

9. Найти дифференциалы функций, заданных неявно:

$$y^5 + y - x^2 = 1,$$

$$e^y = x + y.$$

10. Вычислить приближенно (используя понятие дифференциала):

$$\arcsin 0.05, \quad \ln 1.2, \quad arctg 1.04.$$

11. Найти дифференциалы 2-го порядка указанных функций:

$$y = a\sin(bx + c), \quad y = \frac{\sin x}{x}, \quad y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}.$$

12. Найти дифференциалы 2-го порядка следующих неявно заданных функций

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2, \quad x^3 + y^3 = y.$$

13. Написать уравнения касательной и нормали к графику функции $y = f(x)$ в данной точке, если:

$$y = x^2 - 5x + 4, x_0 = -1,$$

$$y = \sqrt{x}, x_0 = 4.$$

14. Найти углы, под которыми пересекаются заданные кривые: $y = x^2$ и $y = x^3$

15. Исследуйте на равномерную непрерывность функции на указанных множествах

$$e^x \sin \frac{1}{x}, \quad x \in (0,1),$$

$$\frac{x^2}{x+1}(-1,0), (0,10), (0,+\infty),$$

$$x^2 \cos x[0,\pi],$$

$$\frac{x}{4-x^2}[0,1).$$

16. Вычислить по правилу Лопиталя

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos 4x}{x^2}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{\operatorname{tg} x - x}.$$

17. Вычислить по правилу Лопиталя

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos x}{\ln\cos 3x}, \quad \lim_{x\to 2} \frac{x^2-2^x}{2^x-4}.$$

18. Вычислить по правилу Лопиталя

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\sin 4x+1)}{x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{e^x-(x+1)}.$$

19. Вычислить по правилу Лопиталя

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{\ln(3x-2)}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{(x+1)^2-1}{e^x-1}.$$

20. Доказать теорему о свойстве единственности предела функции.

21. Сформулировать и доказать теорему Вейерштрасса о максимальном и минимальном значении непрерывной функции.

22. Сформулировать и доказать теорему о двух милиционерах.

23. Сформулировать и доказать теорему о правиле Лопиталя.

24. Сформулировать и доказать критерий дифференцируемости функции.

25. Дать определение производной функции $f(x)$. Используя определение, доказать, что справедливо $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$.

26. Дать определение производной функции $f(x)$. Используя определение, доказать, что справедливо $(C\cdot f(x))' = C\cdot f'(x)$. Здесь C – некоторая константа.

ВНИМАНИЕ, ЗДЕСЬ ПРЕДСТАВЛЕНЫ ЛИШЬ ПРИМЕРЫ ЗАДАНИЙ, ЧТОБЫ ВЫ МОГЛИ ОЦЕНИТЬ УРОВЕНЬ СЛОЖНОСТИ И РАЗНООБРАЗИЕ. ЭТО НЕ ИСЧЕРПЫВАЮЩИЙ СПИСОК, ЗАДАЧИ МОГУТ БЫТЬ ПО ЛЮБОЙ ИЗ ИЗУЧЕННЫХ ТЕМ!

Пример экзаменационного билета. Математический анализ. 1 курс. Зимняя сессия. Вариант 1 (http://igor.frolenkov.ru/onlinelab/first_year/math_analysis/)

Фамилия группа

1	2	3	4	$\sum$
12	15	10	15	52

1. Дайте следующие определения:
   (a) Дифференцируемой функции и дифференциала функции.
   (b) Непрерывной функции в точке.
   (c) Записать многочлен Тейлора функции $f(x)$ в точке x_0 степени 3 с остаточным членом в форме Пеано.

2. Исследовать функцию на непрерывность, если есть точки разрыва функции, установить их род, схематично изобразить график функции. Исследовать функцию на дифференцируемость в точке $x_0 = 0$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{2}, & |x| < 1, x \neq 0 \\ -x, & |x| \geq 1, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

3. Вычислить производные
   (a) $y''(x)$, где $y(x) = \frac{1}{\sin 2x^3} + \ln\cos x$,
   (b) $\frac{dy}{dx}$, где $y(x)$ задано неявно $\sqrt{e^{2xy} + 2x^2} = \cos x$.

4. Сформулировать и доказать теорему о правиле Лопиталя.

Пример экзаменационного билета. Математический анализ. 1 курс. Зимняя сессия. Вариант 2 (http://igor.frolenkov.ru/onlinelab/first_year/math_analysis/)

Фамилия группа

1	2	3	4	$\sum$
12	12	14	12	50

1. Дайте следующие определения:

   (a) Равномерно непрерывной на множестве E функции.

   (b) Точки разрыва второго рода функции $f(x)$.

   (c) Того, что $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 0$, на языке "$\varepsilon - \delta$".

2. Исследовать функцию на непрерывность, если есть точки разрыва функции, установить их род. Исследовать функцию на дифференцируемость в точке $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & x < -1, \\ |x|, & -1 \le x \le 1, \\ \ln(x-1), & |x| \ge 1. \end{cases}$$

3. Вычислить следующие пределы

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{\ln(3x-2)}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{(x+1)^2 - 1}{e^x - 1}.$$

4. Дать определение производной функции $f(x)$. Используя определение, доказать, что справедливо $(C \cdot f(x))' = C \cdot f'(x)$. Здесь C – некоторая константа.