ПЕРЕЧЕНЬ ТЕМ, ВОПРОСОВ, ЗАДАЧ И ЛИТЕРАТУРЫ ПО КУРСУ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ СТУДЕНТОВ 2-ГО КУРСА НА ВТОРУЮ МИНИСЕССИЮ

(расчитанная на 2 семестра лекций для студентов 2-го курса)

Составил профессор кафедры МАДУ А.А.Родионов

ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ (вторая сессия)

1.Теорема существования (для ОДУ, не разрешенных относительно производной).

2.Простейшие ОДУ, не разрешенные относительно производных. Примеры.

3.Уравнения Лагранжа. Уравнения Клеро.

4.Особое решение,определения. Теорема о дискриминантной кривой.

5.Огибающая. Необходимое условие существования огибающей.

6.Зависимость решений от входных данных. Теорема.

7.Лемма Адамара.

8.Зависимость решений от входных параметров. Теорема.

9.Линейные однородные ДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами: а) леммы (о линейном операторе, о корнях характеристического многочлена, о решении однородного уравнения); б) фундаментальная система решений; в) определитель Вронского, формула Лиувилля (без доказательства); г) теорема об общем решении; д) теорема о вещественном решении уравнения.

10.Частное решение линейного неоднородного уравнения с постояными коэффициентами (с правой частью в виде квазимногочлена).

ПРАКТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ

1. Простейшие ОДУ, не разрешенные относительно производных.
2. Уравнения Лагранжа. Уравнения Клеро.
3. Особое решение, дискриминантные кривые.
4. Огибающая для данного семейства линий.
5. Уравнения порядка выше 1-го, методы понижения порядка уравнения.
6. Решение линейного однородного ОДУ с постоянными коэффициентами.
7. Решение линейного неоднородного ОДУ с постоянными коэффициентами с правой частью в виде квазимногочлена.
8. Решение линейного неоднородного ОДУ с постоянными коэффициентами методом вариации постоянных.

ЛИТЕРАТУРА

1) Петровский И.Г.Лекции по теории ОДУ. М., "Наука 1970.

2) Матвеев Н.М. Методы интегрирования ОДУ;

3) Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения.

4) Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М., "Наука 1985.

5) Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения: примеры и задачи. М., "Высшая школа 1989.

6) Егоров А.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями. Москва, “Физматлит”, 2003, 2005.

ВАРИАНТЫ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ БИЛЕТОВ

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ N 1

1. Доказать теорему существования решения для ОДУ, не разрешенных относительно производной.
2. Теорема 1 о представлении общего решения однородного ОДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами (формулировка и доказательство).
3. Найти огибающую и определить ОДУ для семейства кривых: $y = C(x - C)^2$.
4. Решить уравнение: $yy'^2 - 2xy' + y = 0$.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ N 2

1. Доказать теорему о частном решении линейного ОДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами (с правой частью в виде квазимногочлена).
2. Дать определение огибающей для однопараметрического семейства кривых. Вывести необходимые условия существования огибающей.
3. Решить задачу Коши: $y'y''' - 2y''^2 = 0, y(-2) = 0, y'(-2) = 1, y''(-2) = -1$.
4. Решить уравнение: $y = xy'^2 - 2y'^3$.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ N 3

1. Сформулировать и доказать теорему о зависимости решения уравнения $dy/dx = f(x, y, \mu_1, ..., \mu_n)$ от входных параметров.
2. Дать определение огибающей для однопараметрического семейства кривых.
3. Уравнение Лагранжа (дать определение и метод решения).
4. Решить задачу Коши: $2y''' - 3y'^2 = 0, y(0) = 2, y'(0) = 1, y''(0) = -1$.
5. Решить уравнение (однородное): $x^2yy'' + y'^2 = 0$.

ПРОГРАММА ПО КУРСУ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(расчитанная на два семестра лекций для студентов 2-го курса, кафедра МАДУ)

Составил д.ф.-м.н. А.А.Родионов

Вопросы к экзамену (первая сессия).

1. Определения ОДУ, порядок уравнения, решение.

2. Примеры задач и процессов, описываемых ОДУ.

3. Простейшие ОДУ: 1)$y' = f(x)$; 2)$y' = f(y)$; 3)$y' = f(x)g(y)$; 4)$y' = f(y/x)$; 5)$y' = a(x)y + b(x)$; 6) ОДУ в полных дифференциалах.

4. Геометрическая интерпритация интегрирования ОДУ. Метод изоклин и метод Эйлера. Примеры.

5. Задача Коши. Постановка и примеры. Пример неединственности решения.

6. Теорема Арцеля (о выборе равномерно сходящейся последовательности).

7. Теорема Пеано (о существовании решения).

8. Теорема о непродолжаемости решения.

9. Теорема Осгуда (о единственности решения).

10.Метод последовательных приближений Пикара. Теорема Пикара: 1) лемма об эквивалентности задачи Коши и интегрального уравнения; 2) построение последовательности Пикара, ее свойства; 3) равномерная сходимость последовательности; 4) единственность решения; 5) оценка ошибки решения, замечания.

11.Определения: метрическое пространство, непрерывность, сходимость, сжимающее отображение. Примеры.

12.Принцип сжатых отображений. Теорема.

13.Теорема существования и единственности (на основе принципа сжатых отображений)

Вопросы к экзамену (вторая сессия).

1.Теорема существования (для ОДУ, не разрешенных относительно производной).

2.Простейшие ОДУ, не разрешенные относительно производных. Примеры.

3.Уравнения Лагранжа. Уравнения Клеро.

4.Особое решение,определения. Теорема о дискриминантной кривой.

5.Огибающая. Необходимое условие существования огибающей.

6.Зависимость решений от входных данных. Теорема.

7.Лемма Адамара.

8.Зависимость решений от входных параметров. Теорема.

9.Линейные однородные ДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами: а) леммы (о линейном операторе, о корнях характеристического многочлена, о решении однородного уравнения); б) фундаментальная система решений; в) определитель Вронского, формула Лиувилля (без доказательства); г) теорема об общем решении; д) теорема о вещественном решении уравнения.

10.Частное решение линейного неоднородного уравнения с постояными коэффициентами (с правой частью в виде квазимногочлена).

11.Метод вариации постоянных для неоднородного уравнения n-го порядка

Вопросы к экзамену (третья сессия).

1. Системы ОДУ. Общие понятия. Задача Коши для нормальных систем ОДУ

2. Метод исключения для нормальных систем ОДУ (сведение нормальной системы 1-го порядка из n уравнений к одному уравнению n-го порядка).

3. Теоремы существования и единственности для нормальных систем ОДУ: а) Лемма (основная, об оценке решения); б) Теорема Пеано (существования решения) без доказательства; в) Теорема 1(существования решения); г) Теорема 2(существование решения для норм. линейной системы); д) Лемма Гроноулла-Беллмана; е) Лемма (о сравнении, дифференциальном неравенстве); ж) Теорема (о нулевом решении); з) Теорема Тонелли.

4. Линейные однородные системы ОДУ первого порядка: а) фундаментальная система решений, линейная зависимость решений, определитель Вронского; б) теорема о представлении общего решения; в) формула Лиувилля (доказательство).

5. Общее решение для неоднородных линейных систем. Метод вариации постоянных для систем.

6. Нормальные линейные системы с постоянными коэффициентами: а) общее решение (в случае различных собственных значений); б) общее решение (в случае кратных собственных значений).

Вопросы к экзамену (четвертая сессия).

1. Устойчивость нормальных систем ОДУ: а) устойчивость по Ляпунову, асимптотическая устойчивость; б) леммы об оценке решения при $Re\lambda < 0$; в) теорема об асиммптотической устойчивости; г) лемма Ляпунова об устойчивости положения равновесия, пример; д) линеаризация (первое приближение) системы уравнений; е) теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости, пример; ж) теорема Гурвица (без доказательства).

2. Динамические системы: свойства; теорема(о трех видах траектории).

3. Динамические системы на плоскости: свойства функции последования; теорема о замкнутой траектории; теорема о предельном цикле; теорема Бендиксона (без док–ва).

4. Траектории линейной однородной системы ОДУ 2-го порядка: а) узел; б)седло; в)фокус; г)центр; д)вырожденные случаи.

5. Уравнения с частными производными 1-го порядка: определения, характеристики квазилинейного уравнения; теорема об интегральной поверхности; первые интегралы, общее решение уравнения, пример; задача Коши для квазилинейного уравнения, пример.

6. Группы преобразований в ОДУ : определения; примеры; Теорема Ли; Теорема об инварианте; Утверждение (об интегрирующем множителе ОДУ); Уравнение Риккати (пример); Теорема о группе переносов; неоднородное линейное уравнение (пример).

Практические вопросы:

1. Изоклины. Построение ОДУ для данного семейства кривых. 2. ОДУ с разделяющимися переменными. 3. Однородные ОДУ. 4. Линейные ОДУ 1-го порядка. 5. ОДУ в полных дифференциалах. 6. Геометрические и физические задачи, решаемые с помощью ОДУ. 7. Построение последовательности Пикара. Оценка ошибки решения. 8. Простейшие ОДУ, не разрешенные относительно производных. Уравнения Лагранжа. Уравнения Клеро. 9. Особое решение, дискриминантные кривые. 10. Огибающая для данного семейства линий. 11. Уравнения порядка выше 1-го, методы понижения порядка уравнения. 12. Решение линейного однородного ОДУ с постоянными коэффициентами. 13. Решение линейного неоднородного ОДУ с постоянными коэффициентами с правой частью в виде квазимногочлена. 14. Решение линейного неоднородного ОДУ с постоянными коэффициентами методом вариации постоянных. 15. Решение линейых однородных и неоднородных систем ОДУ первого порядка с постоянными коэффициентами. 16. Решение линейых неоднородных систем ОДУ первого порядка с постоянными коэффициентами методом вариации постоянных. 17. Нахождение положения равновесия для нормальной системы ОДУ; исследование на устойчивость положения равновесия (лемма Ляпунова, линеаризация системы + теорема Ляпунова). 18. Исследование линейной однородной системы ОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами, начертить траектории в окрестности точки покоя (узел, седло, фокус, центр, вырожденные случаи). 19. Решение квазилинейных уравнений в частных производных с заданным условием на границе.

ЛИТЕРАТУРА:

1) Н.П.Еругин,И.З.Штокало,П.С.Бондаренко и др. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений, Киев,1974;

2) Петровский И.Г.Лекции по теории ОДУ. М., "Наука 1970.

3) Карташев А.П.,Рождественский Б.Л. ОДУ и основы вариационного исчисления. М., "Наука 1976.

4) Матвеев Н.М. Методы интегрирования ОДУ;

5) Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения.

6) Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М., "Наука 1985.

7) Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения: примеры и задачи. М., "Высшая школа 1989.

8) М.Л.Краснов, А.И.Киселев, Г.И Макаренко, Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., Высшая школа,1978.

9) Егоров А.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями. Москва, “Физматлит”, 2003, 2005.

Министерство образования и науки Российской Федерации
Сибирский федеральный университет

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Пособие для самостоятельной работы

Красноярск
СФУ
2012

УДК 517.2(07)
ББК 22.116.61я73
Д503

Составители: С.В. Полынцева, А.А. Родионов, Ю.В. Шанько

Д503 Дифференциальные уравнения: учеб.-метод. пособие [Текст] / сост.: С.В. Полынцева, А.А. Родионов, Ю.В. Шанько. — Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 2012.- N? с.

Пособие для самостоятельной работы по дисциплине «Дифференциальные уравнения» состоит из двух разделов. В первом разделе приведены темы для самостоятельного изучения теории, второй раздел содержит индивидуальные задания по темам практических занятий.

Предназначено для студентов, обучающихся по специальностям и направлениям: 010501.65 — Прикладная математика и информатика (специалитет), 010500.62 — Прикладная математика и информатика (бакалавриат), 010101.65 — Математика (специалитет), 010100.62 — Математика (бакалавриат), 010300.62 — Математика. Компьютерные науки.

УДК 517.2(07)
ББК 22.116.61я73

Содержание

Введение

В дисциплине «Дифференциальные уравнения» реализуются следующие виды самостоятельной работы: самостоятельное изучение теоретического материала, индивидуальные задания и домашние задачи.

Под самостоятельным изучением теоретического материала подразумевается изучение студентами конспекта лекций и дополнительных тем. Дополнительные темы формулируются в разделе 1 с указанием учебного пособия, где эти вопросы разбираются. Знание данных тем проверяется непосредственно на экзамене (в качестве дополнительных вопросов).

В разделе 2 по темам практических занятий приведены индивидуальные задания. Преподаватель, ведущий практические занятия, на первом занятии или в течение первого месяца выдает блок индивидуальных заданий, включающий в себя задания по каждому практическому занятию. Сдача решенных индивидуальных заданий преподавателю, ведущему практические занятия, производится студентом после каждой пройденной темы в письменном виде.

Требования к оформлению:

- решения задач следует оформлять в отдельной тетради,
- решения задач должны сопровождаться подробными и четкими математическими выкладками, ссылками на теоретический материал (теорему, лемму, утверждение).

Помимо индивидуальных заданий ведется текущий контроль домашней работы студентов. В конце каждого практического занятия студенты получают домашние задачи. Решения данных задач просматриваются преподавателем на следующем занятии.

Все необходимые учебники и учебные пособия для самостоятельного изучения теоретического курса и решения задач приведены в списке литературы.

Литература

1. Егоров А.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями. Москва, «Физматлит», 2003, 2005.

2. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: «Высшая школа», 1974.

3. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения: примеры и задачи. М., «Высшая школа», 1989.

4. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М.: «Наука», 1985, 2005.

5. Матвеев Н.М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. СПб.: «Лань», 2002.

6. Дифференциальные уравнения [Электронный ресурс] : учеб. пособие по практ. занятиям / И.И. Вайнштейн [и др.] ; Сиб. федерал. ун-т. - Красноярск : ИПК СФУ, 2007. URL: `http://files.lib.sfu-kras.ru/ebibl/umkd/14/u_practik.pdf` (дата обращения 10.04.2012).

7. Дифференциальные уравнения [Электронный ресурс] : метод. пособие для самостоят. работы / Сиб. федерал. ун-т ; сост. И.И. Вайнштейн [и др.]. Красноярск : ИПК СФУ, 2007. URL: `http://files.lib.sfu-kras.ru/ebibl/umkd/14/u_sam.pdf` (дата обращения 10.04.2012).

I. Темы для самостоятельного изучения теории

1. Уравнения 2-го порядка. Краевая задача и функция Грина (4 часа) [1, гл. 3, § 5, с. 90–99.]:

— краевая задача для уравнения 2-го порядка с переменными коэффициентами,

— теоремы о решении краевой задачи.

Егоров А.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями. М.: Физматлит, 2005, гл. 3, § 5, с. 90–99.

2. Критерии устойчивости решения линейной однородной системы уравнений (2 часа) [1, гл. 8, § 4, с. 292–298.]:

— критерий Гурвица,

— критерий Михайлова.

Егоров А.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями. М.: Физматлит, 2005, гл. 8, § 4, с. 292–298.

3. Системы 2-х квазилинейных уравнений 1-го порядка (2 часа) [1, гл. 9, § 4, с. 333–338.]::

— теорема о необходимых условиях существования решения системы,

— теорема о построении решения системы с помощью системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Егоров А.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями. М.: Физматлит, 2005, гл. 9, § 4, с. 333–338.

II. Индивидуальные задания по темам практических занятий

II.1. Изоклины. Составление дифференциального уравнения семейства кривых

С помощью изоклин начертить интегральные кривые уравнений.

1. $y' = 1 - xy$. **2.** $y' = 2 - y$. **3.** $y' = 2x - y$.
4. $y' = \sin(y - 2x)$. **5.** $y' = y - x^2 + 2x$. **6.** $y' = \dfrac{1}{x}$.
7. $y' = x^2 + 2x - y$. **8.** $2(y + y') = x + 3$. **9.** $x^2 + y^2 y' = 1$.
10. $(x^2 + y^2)y' = 4x$. **11.** $y' = 3 - y$. **12.** $y' = 2 - x$.
13. $y' = (y - 1)^2$. **14.** $y' = (y - 1)x$. **15.** $y' = x^2 - y^2$.
16. $y' = \cos(x - 2y)$. **17.** $y' = \dfrac{x + y}{x - y}$. **18.** $y' = \dfrac{y - 2}{x}$.
19. $y' = y^2$. **20.** $y' = 10x$.

Составить ОДУ данных семейств линий.

21. $x = Ce^{y/x}$. **22.** $y - \sqrt{x^2 + y^2} = C$.
23. $y \ln y + x + C_1 y + C_2 = 0$. **24.** $(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = 1$.
25. $y = x(C_2 + x + C_1 \ln x)$. **26.** $y = C_1 x(x - C_1) + C_2$.
27. $y = Cx^2 + \dfrac{1}{C}$. **28.** $x = \dfrac{C}{y^2} - \dfrac{2}{3}y$.
29. $(x - C)^2 + y^2 = C^2$. **30.** $y^2 = Ce^{y^2/x}$.
31. $\cos y = Ce^{-x}$. **32.** $y = \dfrac{C}{2}x^2 + \dfrac{1}{2C}$.
33. $x + y = C(1 - xy)$. **34.** $C_1 y^2 - 1 = (C_1 x + C_2)^2$.
35. $y = (x + C)^2$. **36.** $y = (x + C)^3$.
37. $y = \operatorname{tg} \ln Cx$. **38.** $(y - C)^2 = x^3$.
39. $\sqrt{y} - \sqrt{x} = C$. **40.** $x^2 + y^2 - Cy = 0$.

II.2. Уравнения с разделяющимися переменными

Решить уравнения и построить интегральные кривые. В тех задачах, где указаны начальные условия, найти решения, удовлетворяющие им.

1. $(1 + y^2)(e^{2x}\,dx - e^y\,dy) = (1 + y)\,dy$.
2. $(y^2 + 2xy^2)y' + x^2 - 2yx^2 = 0$.
3. $x\sqrt{1 - y^2}\,dx + y\sqrt{1 - x^2}\,dy = 0$, $y(0) = 1$.

4. $(y-\sqrt{1+y^2})(1+x^2)^{3/2}y' = 1+y^2$.

5. $(1-y)e^y y' + \dfrac{y^2}{x\ln x} = 0$.

6. $(1-y)^2\,dy + \dfrac{dx}{\sin^2 x} = 0$.

7. $(1+2x+x^2)\,dy + (e^y+1)\,dx = 0$.

8. $e^{y+\cos x}\,dy + y\sin x\,dx = 0$.

9. $y\cos^2 x\sin x\,dx + y^4\,dy = 0$.

10. $\sqrt{1+y^2}\,dx + y\operatorname{tg} x\,dy = 0$.

11. $2(1-e^y)\,dx + \operatorname{sh} x\,dy = 0$.

12. $x\operatorname{ch} y\,dx - (1-x^2)\operatorname{sh} y\,dy = 0$.

13. $y' = \sqrt{x^2-y} + 3x$.

14. $y' = \sqrt{y-x+1}$.

15. $x^2y' - \cos 2y = 1$, $y(+\infty) = \dfrac{9\pi}{4}$.

16. $(e^{x+y}-1)\,dx = \,dy$.

17. $3y^2\,dx + (1+x)\,dy = 0$.

18. $y\sin x\,dx + \cos x\,dy = 0$.

19. $(1-y)\sin x\,dx + \cos^3 x\,dy = 0$.

20. $3y^2y' + 16x = 2xy^3$, $y(x)$ ограничено при $x\to+\infty$.

II.3. Геометрические и физические задачи, решаемые с помощью ОДУ

1. Найти кривые, у которых тангенс угла между касательной и положительным направлением оси Ox прямо пропорционален ординате точки касания.

2. Найти кривую, угловой коэффициент касательной которой в любой точке пропорционален абсциссе точки касания.

3. Найти кривую, проходящую через точку $(0,-2)$, такую, что угловой коэффициент касательной в любой ее точке равен ординате этой точки, увеличенной в три раза.

4. Найти кривую, все нормали которой проходят через постоянную точку.

5. Найти кривую, обладающую тем свойством, что отрезок касательной к кривой, заключенной между осями координат, делится в точке касания пополам.

6. Найти кривую, проходящую через точку $(0,1)$, такую, что в каждой ее точке тангенс угла касательной к этой кривой равен утроенному произведению координат точки касания.

7. Найти кривую, касательная к которой образует с осями координат треугольник постоянной площади равной $2a^2$.

8. Найти кривую, для которой отрезок касательной, заключенный между координатными осями, имеет постоянную длину a.

9. Найти кривую, для которой произведение абсциссы какой-нибудь точки на величину отрезка, отсекаемого нормалью на оси OY, равно удвоенному квадрату расстояния от этой точки до начала координат.

10. Найти кривую, проходящую через начало координат и такую, что площадь треугольника, образованного касательной к кривой в некоторой точке, ординатой этой точки и осью OX, пропорциональна площади криволинейной трапеции, образованной кривой, осью OX и ординатой этой точки.

11. Допуская, что в вертикальном воздушном столбе давление на каждом уровне обусловлено давлением вышележащих слоев, найти зависимость давления p от высоты h, если известно, что на уровне моря $(h = 0)$ это давление равно $9{,}81 \cdot 10^4$ Па, а на высоте 500 м — $9{,}016 \cdot 10^4$ Па.

12. Корабль замедляет свое движение под действием силы сопротивления воды, которое пропорционально скорости корабля. Начальная скорость корабля 10 м/с, скорость его через 3 с станет 9 м/с. Когда скорость уменьшится до 1 м/с?

13. Из эксперимента известно, что скорость размножения батерий при достаточном запасе пищи пропорциональна их количеству. Определить время за которое количество бактерий увеличится в 10 раз по сравнению с начальным их количеством.

14. В сосуд, содержащий 40 л воды, непрерывно со скоростью 10 л в минуту поступает раствор, в каждом литре которого содержится 0,5 кг соли. В сосуде раствор перемешивается, и смесь вытекает из сосуда с той же скоростью. Определить, сколько соли будет в сосуде через 4 мин.

15. Поглощение светового потока тонким слоем воды пропорционально толщине слоя и потоку, падающему на его поверхность. При прохождении через слой толщиной 1 м поглощается 1/4 первоначального светового потока. Определить ту часть светового потока, которая дойдет до глубины $h = 5$.

16. В результате химической реакции между веществами A и B образуется вещество C. Установить зависимость количества вещества C от времени, если в момент вступления в реакцию количества веществ A и B были равны соответственно a и b. Скорость реакции пропорциональна произведению реагирующих масс.

17. Определить путь S, пройденный телом за время t, если его скорость пропорциональна проходимому пути и если тело проходит 200 м за 15 секунд и 300 м за 20 секунд.

18. Для остановки речных судов у пристани с них бросают канат, который наматывают на столб, стоящий на пристани. Какая сила будет тормозить судно, если канат делает три витка вокруг столба, коэффициент трения каната о столб равен $1/3$, и рабочий на пристани тянет за свободный конец каната с силой 20 кГ?

19. Масса ракеты с полным запасом топлива равна M, без топлива m, скорость истечения продуктов горения из ракеты равна n, начальная скорость ракеты равна нулю. Найти скорость ракеты после сгорания топлива, пренебрегая силой тяжести и сопротивлением воздуха (формула Циолковского).

20. Ветер, проходя через лес и испытывая сопротивление деревьев, теряет скорость. На бесконечно малом пути эта потеря пропорциональна скорости ветра в начале этого пути и его длине. Найти скорость ветра, прошедшего в лесу 150 м, зная, что начальная его скорость была 12 м/с; после прохождения в лесу пути $s = 1$ м скорость уменьшилась до 11,8 м/с.

II.4. Однородные уравнения

Проинтегрировать уравнения.

1. $(x^2 + 2xy)\,dx + (x^2 - y^2)\,dy = 0$.

2. $(ay - bx)\,dx - (cx + dy)\,dy = 0$, $a, b, c, d > 0$ — const.

3. $(x^2 - y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$.

4. $x\,dy = (ax + by)\,dx$, $a, b > 0$ — const.

5. $x - 2y - 1 + y'(3x - 6y + 2) = 0$.

6. $x - y + 3 + y'(3x + y + 1) = 0$.

7. $2x\,dy = (x + 3y)\,dx$.

8. $-x\,dy = (x + 2y)\,dx$.

9. $(x + y)\,dy = (y - x)\,dx$.

10. $x\,dy = (2x + y)\,dx$.

11. $(x - 2y)\,dy = (x - y)\,dx$.

12. $4x^2 - xy + y^2 + y'(x^2 - xy + 4y^2) = 0$.

13. $4x^2 + xy - 3y^2 + y'(-5x^2 + 2xy + y^2) = 0$.

14. $(3x^2 - y^2)y' = 2xy$.

15. $2xy'(x^2 + y^2) = y(y^2 + 2x^2)$.

16. $xy' = \sqrt{y^2 - x^2}$.

17. $3x + y - 2 + y'(x - 1) = 0$.

18. $2x + 2y - 1 + y'(x + y - 2) = 0$.

19. $3y - 7x + 7 - y'(3x - 7y - 3) = 0$.

20. $2x - 4y + y'(x + y - 3) = 0$.

II.5. Линейные уравнения первого порядка

Решить уравнения, и, где указано, найти решения уравнений, удовлетворяющие указанным условиям.

1. $y' - 2xy = \cos x - 2x \sin x$, y ограничено при $x \to \infty$.
2. $x^3y' + 3x^2y = 2$.
3. $y' - 2xy = 1$.
4. $xy' = x + 2y$.
5. $2\sqrt{x}y' - y = -\sin\sqrt{x} - \cos\sqrt{x}$, y ограничено при $x \to +\infty$.
6. $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$.
7. $xy' - y = -x^2$.
8. $xy' = y + x^2 \sin x$.
9. $y' - y \ln 2 = 2^{\sin x}(\cos x - 1) \ln 2$, y ограничено при $x \to +\infty$.
10. $y'(2y \ln y + y - x) = y$.
11. $x(x - 1)y' + y = x^2(2x - 1)$.
12. $y' - y \operatorname{tg} x = \sec x$.
13. $2x^2y' - xy = 2x \cos x - 3 \sin x$, $y \to 0$ при $x \to +\infty$.
14. $2xy' = 2x + y$.
15. $xy' = x - y$.
16. $xy' = x + y$.
17. $(x \cos y + \sin 2y)y' = 1$.
18. $y' - y \sin x = \sin x \cos x$.
19. $(x + 1)y' = 2y + (x + 1)^4$.
20. $y' \sin x - y \cos x = -\sin^2 x/x^2$, $y \to 0$ при $x \to \infty$.

Решить уравнения Бернулли.

21. $y' + y(x + 1/2)/(x^2 + x + 1) = (1 - x^2)y^2/(x^2 + x + 1)^{3/2}$.
22. $3y' + y(x^2 + 1)/x(x^2 - 1) = x(3x^2 - 1)/y^2(x^2 - 1)$.
23. $(1 + x^2)y' = xy + x^2y^2$.
24. $y' + y/(x + 1) = -(x + 1)^3y^3/2$.
25. $y' + 4x^3y^3 + 2xy = 0$.
26. $xy' + xy^2 = y$.
27. $xy' - y^2 \ln x + y = 0$.
28. $yy' + y^2 + 4x(x + 1) = 0$.
29. $y' + 4xy = 2xe^{-x^2}\sqrt{y}$.
30. $y' = y(y^3 \cos x + \operatorname{tg} x)$.

Решить уравнения Риккати.

31. $y' + y^2 = x^{-4}$.

32. $y' = y^2 - xy - x$.

33. $y' = y^2 + x^{-4/3}$.

34. $y' = -y^2 + x^{-8/3}$.

35. $y' = y^2 + x^{-8/5}$.

36. $y' + 2y(y - x) = 1$.

37. $y' + 4y(y - x) = 1$.

38. $y' + y^2 = 2x^{-2}$.

39. $y' - 2xy + y^2 = 5 - x^2$.

40. $xy' = y^2 - (2x + 1)y + x^2 + 2x$.

II.6. Теоремы существования и единственности решения

Указать какой-нибудь отрезок, на котором существует решение с данными начальными условиями.

1. $y' = x + 2y^3$, $y(-1) = 1$.

2. $y' = x - 2y^3$, $y(1) = 5$.

3. $y' = y^2 \sin x$, $y(0) = 3$.

4. $y' = 5x - 6y^2$, $y(1) = 0$.

5. $y' = 2xy + 4y^3 - 3$, $y(2) = 0$.

6. $y' = \operatorname{tg} x - y^2$, $y(0) = 1$.

7. $y' = \sin(xy) + y^3$, $y(0) = 0$.

8. $y' = (y/x)^2$, $y(1) = 1$.

9. $y' = \operatorname{arctg} y - 2x$, $y(0) = 0$.

10. $y' = 5y - \cos x^2 y$, $y(0) = 1$.

11. $y' = 4x^2 y + 2 + y^2$, $y(0) = 0$.

12. $y' = 3xy + 5 + 6x^2 y$, $y(0) = 0$.

13. $y' = 3x \sin y + 5x + 6y$, $y(0) = 0$.

14. $y' = 3y \sin x + 2 - 6xy$, $y(0) = 0$.

15. $y' = 15x + y^2$, $y(0) = 0$.

16. $y' = 4x - x^{-3} + y^2$, $y(2) = 0$.

17. $y' = x + 14 - 4y^2$, $y(0) = 5$.

18. $y' = \cos x + 2 \sin y^3$, $y(0) = 0$.

19. $y' = \operatorname{arctg} x + y^3$, $y(0) = 1$.

20. $y' = 5x + 6y + 2xy$, $y(1) = 2$.

II.7. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель

Проверить, что данные уравнения являются уравнениями в полных дифференциалах, и решить их.

1. $\dfrac{1}{y}\,dx - \dfrac{x}{y^2}\,dy = 0$.

2. $\dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} = 0$.

3. $(2x - y + 1)\,dx + (2y - x - 1)\,dy = 0.$

4. $x\,dx + y\,dy + \dfrac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2} = 0.$

5. $\dfrac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} + \dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} = 0.$

6. $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} - 1\right) dx - \dfrac{y\,dy}{\sqrt{x^2 - y^2}} = 0.$

7. $\dfrac{2x(1 - e^y)}{(1 + x^2)^2}\,dx + \dfrac{e^y}{1 + x^2}\,dy = 0.$

8. $\dfrac{2x}{y^3}\,dx + \dfrac{y^2 - 3x^2}{x^4}\,dy = 0.$

9. $\left(1 + e^{x/y}\right) dx + e^{x/y}\left(1 - \dfrac{x}{y}\right) dy = 0.$

10. $\dfrac{(x + 2y)\,dx + y\,dy}{(x + y)^2} = 0.$

11. $(\sin(xy) + xy\cos(xy))\ dx + x^2\cos(xy)\,dy = 0.$

12. $2xy\,dx + (x^2 - y^2)\,dy = 0.$

13. $(2 - 9xy^2)x\,dx + (4y^2 - 6x^3)y\,dy = 0.$

14. $e^{-y}\,dx - (2y + xe^{-y})\,dy = 0.$

15. $\dfrac{y}{x}\,dx + (y^3 + \ln x)\,dy = 0.$

16. $\dfrac{3x^2 + y^2}{y^2}\,dx - \dfrac{2x^3 + 5y}{y^3}\,dy = 0.$

17. $2x\left(1 + \sqrt{x^2 - y}\right) dx - \sqrt{x^2 - y}\,dy = 0.$

18. $(1 + y^2\sin 2x)\,dx - 2y\cos^2 x\,dy = 0.$

19. $3x^2(1 + \ln y)\,dx = \left(2y - \dfrac{x^3}{y}\right) dy.$

20. $\left(\dfrac{x}{\sin y} + 2\right) dx + \dfrac{(x^2 + 1)\cos y}{\cos 2y - 1}\,dy = 0.$

Решить уравнения, найдя каким-либо способом интегрирующий множитель или сделав замену переменных.

21. $(x^2 + y^2 + x)\,dx + y\,dy = 0.$

22. $(x^2 + y^2 + y)\,dx - x\,dy = 0.$

23. $y\,dy = (x\,dy + y\,dx)\sqrt{1 + y^2}.$

24. $xy^2(xy' + y) = 1.$

25. $y^2\,dx - (xy + x^3)\,dy = 0.$

26. $\left(y - \dfrac{1}{x}\right) dx + \dfrac{dy}{y} = 0.$

27. $(x^2 + 3\ln y)y\,dx + x\,dy = 0.$

28. $y^2\,dx + (xy + \operatorname{tg} xy)\,dy = 0.$
29. $y(x+y)\,dx + (xy+1)\,dy = 0.$
30. $y(y^2+1)\,dx + x(y^2 - x + 1)\,dy = 0.$
31. $(x^2 + 2x + y)\,dx = (x - 3x^2y)\,dy.$
32. $y\,dx - x\,dy = 2x^3 \operatorname{tg} \dfrac{y}{x}\,dx.$
33. $y^2\,dx + (e^x - y)\,dy = 0.$
34. $xy\,dx = (y^3 + x^2y + x^2)\,dy.$
35. $x^2y(y\,dx + x\,dy) = 2y\,dx + x\,dy.$
36. $(x^2 - y^2 + y)\,dx + x(2y-1)\,dy = 0.$
37. $(2x^2y^2 + y)\,dx + (x^3y - x)\,dy = 0.$
38. $(2x^2y^3 - 1)y\,dx + (4x^2y^3 - 1)x\,dy = 0.$
39. $y(x + y^2)\,dx + x^2(y-1)\,dy = 0.$
40. $(x^2 - \sin^2 y)\,dx + x\sin 2y\,dy = 0.$

II.8. Уравнения, не разрешенные относительно производных

Решить уравнения методом введения параметра.

1. $y + y'^2 \exp y' = 0.$
2. $y' = e^{2y'/y}.$
3. $x + \ln y' + \sin y' = 0.$
4. $y' \cos y' - \sin y' = y.$
5. $x = y'^3 + 2y'.$
6. $x(y'^2 - 1) + 2y' = 0.$
7. $x + y'\sqrt{y'^2 + 1} = 0.$
8. $y'(2x - \ln y') = 1.$
9. $y = y'^2 - 4y'^3.$
10. $y + \ln(1 + y'^2) = 0.$
11. $(y'+1)^3 = (y'+y)^2.$
12. $y + (y'-1)\mathrm{e}^{y'} = 0.$
13. $y'^4 + y'^2 = y^2.$
14. $y'^2 + y'^3 = y^2.$
15. $y'^4 + 2yy' + y^2 = 0.$
16. $y'^2 - 2xy' = x^2 - 4y.$
17. $x + \ln y' - 2\sin y' = 0.$
18. $y' \cos y' - \sin y' = 2y.$
19. $x = y'^4 + 5y'.$
20. $x(y'^2 - 1) - 4y' = 0.$

Решить уравнения Лагранжа и Клеро.

21. $2y'^2 + 4xy' - 4y = 0.$
22. $y = xy' + 3\sqrt{1 + y'^2}.$
23. $y = xy' + 5(y')^{-2}.$
24. $xy'^2 - yy' = 2y' - 4.$
25. $x = y(y')^{-1} - 2(y')^{-2}.$
26. $y = xy' + 3y'^2.$
27. $y + xy' = -4\sqrt{y'}.$
28. $y = 2xy' + 8y'^3.$
29. $y'^4 = 4(xy' - y).$
30. $y = xy'^2 + 6y'^3.$
31. $xy' - y + \ln y' = 0.$
32. $xy'(y' - 3) = y.$
33. $2y'^2(y - xy') + 1 = 0.$
34. $2xy' - y = 2\ln y'.$
35. $x = y(y')^{-1} + 4(y')^{-2}.$
36. $y = xy' + 5y'^2.$
37. $y + xy' = 5\sqrt{y'}.$
38. $y = 2xy' - 2y'^3.$

39. $y'^5 = 5(xy' - y)$.

40. $y = xy'^2 - 12y'^3$.

II.9. Особые решения

Найти особые решения уравнений (если они существуют).

1. $y'^3 - 3y = 0$.

2. $y'^2 - x^3y' + 2x^2y = 0$.

3. $2y(y'+1) - xy'^2 = 0$.

4. $4y'^2(1-3y)^2 = 1 - 2y$.

5. $3xy = 2x^2y' - 4y'^2$.

6. $y'^3 = 2y(xy' - 2y)$.

7. $2y^2y' = (xy' + y)^2$.

8. $y = 2y'^2 - xy' + \dfrac{x^2}{4}$.

9. $2y'^2 - 2xy' + x^2 - y = 0$.

10. $y'^2 - 2y = 0$.

11. $(xy' + y)^2 + x^5(xy' - 2y) = 0$.

12. $4y'^2 + x^2 = 8yy'$.

13. $2y(y' - 1) = xy'^2$.

14. $3xy = 2x^2y' + 4y'^2$.

15. $y'^3 + 2y(xy' - 2y) = 0$.

16. $2y^2y' + (xy' + y)^2 = 0$.

17. $(xy' + y)^2 = x^5(xy' - 2y)$.

18. $4y'^2 + 8yy' + x^2 = 0$.

19. $y'^4 + 4y = 0$.

20. $16y^2y'^2 + 4y^2 + 1 = 0$.

II.10. Уравнения, допускающие понижение порядка

Проинтегрировать уравнения.

1. $yy'' + y = y'^2$.

2. $xy'' = y' + x(y'^2 + x^2)$.

3. $xy'' = y' + x\sin\dfrac{y'}{x}$.

4. $y'''y'^2 = y''^3$.

5. $yy'' - 2yy'\ln y = y'^2$.

6. $(y' + 2y)y'' = y'^2$.

7. $y''^2 - 2y''y' + 3 = 0$.

8. $(1 - x^2)y'' + xy' = 2$.

9. $y'^2 = (3y - 2y')y''$.

10. $y''(2y' + x) = 1$.

11. $y^4 - y^3y'' = 1$.

12. $2y'(y'' + 2) = xy''^2$.

13. $3y'' = y^{-5/3}$.

14. $yy'' - y'^2 = y^2y'$.

15. $y''^2 - y'^2 - 1 = 0$.

16. $xy''' = y'' - xy''$.

17. $y'' + y'^2 = 2e^{-y}$.

18. $y''^2 - 5y' + 6 = 0$.

19. $(1 + x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0$.

20. $2yy'' = y^2 + y'^2$.

Понизить порядок уравнений, пользуясь их однородностью, и решить их.

21. $x^4(y'^2 - 2yy'') = 4x^3yy' + 1$.

22. $x^2yy'' = (y - xy')^2$.

23. $xyy'' - xy'^2 - yy' - bxy'^2/\sqrt{a^2 - x^2} = 0$.

24. $x^2(yy'' - y'^2) + xyy' = y\sqrt{x^2y'^2 + y^2}$.

25. $y^2y''' - 3yy'y'' + 2y'^3 + \dfrac{y}{x}(yy'' - y'^2) = \dfrac{y^3}{x^2}$.

26. $xy'(yy''-y'^2)-yy'^2=x^4y^3$.

27. $y''+2\dfrac{y'}{x}=\dfrac{y'^2}{y}$.

28. $2y(xy''-y')=xy'^2(1-x)$.

29. $xyy''=4y'(y-y')$.

30. $xyy''-xy'^2=yy'$.

31. $x^2y''=y-xy'$.

32. $y''+\dfrac{y'}{x}+\dfrac{y}{x^2}=\dfrac{y'^2}{y}$.

33. $xyy''+yy'-x^2y'^2=0$.

34. $yy'y'''+2y'^2y''=3yy''^2$.

35. $x^3y''=(y-xy')(y-xy'-x)$.

36. $\dfrac{y^2}{x^2}+y'^2=3xy''+\dfrac{2yy'}{x}$.

37. $y''=\left(2xy-\dfrac{5}{x}\right)y'+4y^2-\dfrac{4y}{x^2}$.

38. $x^2(yy''-y'^2)+xyy'=(2xy'-3y)\sqrt{x^3}$.

39. Найти интегральную кривую уравнения $yy'y''=y'^3+y''^2$, касающуюся в начале координат прямой $x+y=0$.

40. Найти интегральную кривую уравнения $yy''+y'^2-1=0$, проходящую через точку (0,1) и касающуюся в этой точке прямой $x+y=1$.

II.11. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

Решить линейные однородные уравнения.

1. $y''+y'-2y=0$.

2. $y''+4y'+3y=0$.

3. $y''-2y'=0$.

4. $y''-4y'+5y=0$.

5. $y''+2y'+10y=0$.

6. $y''-2y'+y=0$.

7. $4y''+4y'+y=0$.

8. $y'''-3y''+3y'-y=0$.

9. $y'''-y''-y'+y=0$.

10. $y'''-3y''+2y'=0$.

Построить линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами (возможно более низкого порядка), имеющие данные частные решения.

11. $y_1=x^2e^x$.

12. $y_1=e^{2x}\cos x$.

13. $y_1=x\sin x$.

14. $y_1=xe^x$, $y_2=e^{-x}$.

15. $y_1=x$, $y_2=\sin x$.

Для каждого из данных уравнений написать его частное решение с неопределенными коэффициентами (числовых значений коэффициентов не находить).

16. $y'' - 8y' + 20y = 5xe^{4x}\sin 2x$.

17. $y'' + 7y' + 10y = xe^{-2x}\cos 5x$.

18. $y''' + y' = \sin x + x\cos x$.

19. $y''' - 2y'' + 4y' - 8y = e^{2x}\sin 2x + 2x^2$.

20. $y'' - 6y' + 13y = x^2e^{3x} - 3\cos 2x$.

Решить линейные неоднородные уравнения.

21. $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$.

22. $y'' + y = 4xe^x$.

23. $y'' + y' - 2y = 3xe^x$.

24. $y'' - 3y' + 2y = \sin x$.

25. $y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} + xe^{-x}$.

26. $y'' + 2y' - 3y = x^2e^x$.

27. $y'' - 4y' + 8y = e^{2x} + \sin 2x$.

28. $y'' - 2y' + y = 6xe^x$.

29. $y'' + y = x\sin x$.

30. $y'' - 5y' = 3x^2 + \sin 5x$.

Решить уравнения способом вариации постоянных.

31. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$.

32. $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{e^x + 1}$.

33. $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$.

34. $y'' + 4y = 2\operatorname{tg} x$.

35. $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+1}$.

Решить уравнения Эйлера.

36. $x^2y'' - xy' + y = 8x^3$.

37. $x^2y'' + xy' + 4y = 10x$.

38. $x^2y'' - 3xy' + 5y = 3x^2$.

39. $x^2y'' - 6y = 5x^3 + 8x^2$.

40. $x^2y'' - 2y = \sin\ln x$.

II.12. Линейные уравнения с переменными коэффициентами

В каждой их задач составить линейное однородное дифференциальное уравнение (возможно меньшего порядка), имеющее данные частные решения.

1. $1,\ x,\ x^2$.

2. $\operatorname{sh} x,\ \operatorname{ch} x$.

3. $x,\ e^{2x}$.

4. $\sin x^2,\ \cos x^2$.

5. $x,\ e^{\frac{x^2}{2}}$.

6. $\arccos\frac{x}{\pi},\ \arcsin\frac{x}{\pi}$.

7. $\pi,\ \arccos x,\ \arcsin x$.

8. $4,\ \sin^2 x,\ \cos 2x$.

9. $x,\ 2x,\ x^2$.

10. $e^x,\ xe^x,\ x^2e^x$.

11. $\sin x,\ \cos x,\ \sin 2x$.

12. $e^{2x},\ \sin x,\ \cos x$.

13. $2x,\ x-2,\ e^x+1.$

14. $1,\ \sin x,\ \cos x.$

15. $2,\ \cos x,\ \cos 2x.$

16. $5,\ \operatorname{arctg} x,\ \operatorname{arcctg} x.$

17. $x,\ \ln x.$

18. $1/x,\ x^2.$

19. $x^2\ \sin x,\ \cos 2x.$

20. $1/x,\ e^{1/x}.$

Найти общие решения данных уравнений, зная их частные решения. В тех задачах, где частное решение не дано, найти его путем подбора, например, в виде полинома или показательной функции e^{ax}.

21. $(3x^3-x)y''-2y'-6xy=0.$

22. $x(x+2)y''-2(x+1)y'+2y=0.$

23. $y''+xy'-y=0.$

24. $y''+2xy'-2y=0.$

25. $(\cos x-\sin x)y''+2\sin x\cdot y'-(\sin x+\cos x)y=0.$

26. $xy''-y'-4x^3y=0;\ y_1=e^{x^2}.$

27. $x(1-x\ln x)y''+(1+x^2\ln x)y'-(x+1)y=0.$

28. $4xy''+2y'+y=0;\ y_1=\sin\sqrt{x}.$

29. $(1-x)y''+xy'-y=0.$

30. $4(x^2+x)y''+2(2x+1)y'-y=0;\ y_1=\sqrt{x}.$

31. $\cos^2 x\cdot y''-\sin x\cos x\cdot y'-y=0;\ y_1=\sec x.$

32. $\sin x\cdot y''+2\cos x\cdot y'-\sin x\cdot y=0;\ y_1=\dfrac{x}{\sin x}.$

33. $2x^2(2-\ln x)y''+x(4-\ln x)y'-y=0;\ y_1=\ln x.$

34. $(\cos x+\sin x)y''-2\cos x\cdot y'+(\cos x-\sin x)y=0;\ y_1=\cos x.$

35. $x^3(\ln x-1)y''-x^2y'+xy=0.$

36. $(x^2-2x)y''+(2-x^2)y'-2(1-x)y=0.$

37. $(1-x^2)y''-2xy'+2y=0.$

38. $y''-y'+ye^{2x}=0;\ y_1=\sin e^x.$

39. $x(x-1)y''-(2x-1)y'+2y=0.$

40. $(3x^3+x)y''+2y'-6x=0.$

Найти общие решения линейных неоднородных уравнений, если известны фундаментальные системы решений соответствующих однородных уравнений.

41. $(x-1)y''-xy'+y=(x-1)^2;\ y_1=e^x,\ y_2=x.$

42. $y''\operatorname{ctg} x+2y'+(2\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x)y=\cos^2 x;\ y_1=\cos x,\ y_2=x\cos x.$

43. $xy''+2y'+xy=x;\ y_1=\dfrac{\cos x}{x},\ y_2=\dfrac{\sin x}{x}.$

44. $(x-1)y''-xy'+y=(x-1)^2e^x;\ y_1=e^x,\ y_2=x.$

45. $y''+y'+e^{-2x}y=e^{-3x};\ y_1=\cos e^{-x},\ y_2=\sin e^{-x}.$

46. $(x^4-x^3)y''+(2x^3-2x^2-x)y'-y=\dfrac{(x-1)^2}{x};\ y_1=\dfrac{1}{x},\ y_2=e^{1/x}.$

47. $(2x+1)y''+4xy'-4y=1-4x^2;\ y_1=x,\ y_2=e^{-2x}.$

48. $(e^x+1)y''-2y'-e^xy=e^{2x}$; $y_1=e^x-1$, $y_2=\dfrac{1}{e^x+1}$.

49. $y''-2(1+\operatorname{tg}^2 x)y=\cos x$; $y_1=\operatorname{tg} x$, $y_2=1+x\operatorname{tg} x$.

50. $x^2(x+1)y''-2y=\dfrac{x}{x+1}$; $y_1=1+\dfrac{1}{x}$, $y_2=\dfrac{x}{2}+1-\dfrac{x+1}{x}\ln(x+1)$.

51. $2x(x+2)y''+(2-x)y'+y=\sqrt{x}(x+2)^2$; $y_1=\sqrt{x}$, $y_2=x-2$.

52. $(x^2+1)y''-2y=x$; $y_1=x^2+1$, $y_2=x+(x^2+1)\operatorname{arctg} x$.

53. $x(x^2+6)y''-4(x^2+3)y'+6xy=(x^2+6)^2$; $y_1=x^2+2$, $y_2=x^3$.

54. $x(x+4)y''-(2x+4)y'+2y=(x+4)^2$; $y_1=x+2$, $y_2=x^2$.

55. $x(2x+1)y''+2(x+1)y'-2y=1$; $y_1=x+1$, $y_2=\dfrac{1}{x}$.

56. $xy''-(2x+1)y'+2y=x^2$; $y_1=2x+1$, $y_2=e^{2x}$.

57. $xy''-(x+1)y'-2(x-1)y=x^2$; $y_1=e^{2x}$, $y_2=(3x+1)e^{-x}$.

58. $x^2\ln x y''-xy'+y=x\ln^2 x$; $y_1=x$, $y_2=\ln x+1$.

59. $x(x-1)y''-xy'+y=(x-1)^2$; $y_1=x$, $y_2=x\ln x+1$.

60. $xy''-(2x+1)y'+(x+1)y=e^x$; $y_1=x^2e^x$, $y_2=e^x$.

II.13. Линейные системы с постоянными коэффициентами

Решить линейные однородные системы (для облегчения работы в некоторых задачах указаны корни характеристического уравнения).

1. $\begin{cases}\dot x=2x+y,\\ \dot y=3x+4y.\end{cases}$

2. $\begin{cases}\dot x=x-y,\\ \dot y=y-4x.\end{cases}$

3. $\begin{cases}\dot x+x-8y=0,\\ \dot y-x-y=0.\end{cases}$

4. $\begin{cases}\dot x=x+y,\\ \dot y=3y-2x.\end{cases}$

5. $\begin{cases}\dot x=x-3y,\\ \dot y=3x+y.\end{cases}$

6. $\begin{cases}\dot x+x+5y=0,\\ \dot y-x-y=0.\end{cases}$

7. $\begin{cases}\dot x=2x+y,\\ \dot y=4y-x.\end{cases}$

8. $\begin{cases}\dot x=3x-y,\\ \dot y=4x-y.\end{cases}$

9. $\begin{cases}\dot x=2y-3x,\\ \dot y=y-2x.\end{cases}$

10. $\begin{cases}\dot x-5x-3y=0,\\ \dot y+3x+y=0.\end{cases}$

11. $\begin{cases}\dot x=x+z-y,\\ \dot y=x+y-z,\\ \dot z=2x-y\end{cases}$ $(\lambda_1=1,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=-1)$.

12. $\begin{cases}\dot x=x-2y-z,\\ \dot y=y-x+z,\\ \dot z=x-z\end{cases}$ $(\lambda_1=0,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=-1)$.

13. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + z, \\ \dot{y} = x + 2y - z, \\ \dot{z} = x - y + 2z \end{cases}$ $(\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3).$

14. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y + z, \\ \dot{y} = x + y + z, \\ \dot{z} = 4x - y + 4z \end{cases}$ $(\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 5).$

15. $\begin{cases} \dot{x} = 4y - 2z - 3x, \\ \dot{y} = z + x, \\ \dot{z} = 6x - 6y + 5z \end{cases}$ $(\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = -1).$

16. $\begin{cases} \dot{x} = x - y - z, \\ \dot{y} = x + y, \\ \dot{z} = 3x + z \end{cases}$ $(\lambda_1 = 1,\ \lambda_{2,3} = 1 \pm 2i).$

17. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = x + 3y - z, \\ \dot{z} = 2y + 3z - x \end{cases}$ $(\lambda_1 = 2,\ \lambda_{2,3} = 3 \pm i).$

18. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 2z - y, \\ \dot{y} = x + 2z, \\ \dot{z} = y - 2x - z \end{cases}$ $(\lambda_1 = 1,\ \lambda_{2,3} = \pm i).$

19. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - y - z, \\ \dot{y} = x + 2y - z, \\ \dot{z} = x - y + 2z \end{cases}$ $(\lambda_1 = 2,\ \lambda_2\lambda_3 = 3).$

20. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z, \\ \dot{y} = 3x - 2y - 3z, \\ \dot{z} = 2z - x + y \end{cases}$ $(\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 1).$

21. $\begin{cases} \dot{x} = y - 2x - 2z, \\ \dot{y} = x - 2y + 2z, \\ \dot{z} = 3x - 3y + 5z \end{cases}$ $(\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = \lambda_3 = -1).$

22. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y - z, \\ \dot{y} = 3x - 4y - 3z, \\ \dot{z} = 2x - 4y \end{cases}$ $(\lambda_1 = \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = -5).$

23. $\begin{cases} \dot{x} = x - y + z, \\ \dot{y} = x + y - z, \\ \dot{z} = 2z - y \end{cases}$ $(\lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2)$.

24. $\begin{cases} \dot{x} = y - 2z - x, \\ \dot{y} = 4x + y, \\ \dot{z} = 2x + y - z \end{cases}$ $(\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \lambda_3 = -1)$.

25. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 2y + 4z, \\ \dot{z} = x - z \end{cases}$ $(\lambda_1 = \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 3)$.

Решить системы, записанные в векторной форме: $\dot{x} = Ax$, где x — вектор, A — данная матрица.

26. $\dot{x} = Ax,\ A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

27. $\dot{x} = Ax,\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

28. $\dot{x} = Ax,\ A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

29. $\dot{x} = Ax,\ A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

30. $\dot{x} = Ax,\ A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

31. $\dot{x} = Ax,\ A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$.

32. $\dot{x} = Ax,\ A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

33. $\dot{x} = Ax,\ A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

34. $\dot{x} = Ax,\ A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

35. $\dot{x} = Ax,\ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

36. $\dot{x} = Ax,\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

37. $\dot{x} = Ax,\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

38. $\dot{x} = Ax,\ A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

39. $\dot{x} = Ax,\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

40. $\dot{x} = Ax,\ A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Решить линейные неоднородные системы.

41. $\begin{cases} \dot{x} = y + 2e^t, \\ \dot{y} = x + t^2. \end{cases}$

42. $\begin{cases} \dot{x} = y - 5\cos t, \\ \dot{y} = 2x + y. \end{cases}$

43. $\begin{cases}\dot{x} = 3x + 2y + 4e^{5t},\\ \dot{y} = x + 2y.\end{cases}$

44. $\begin{cases}\dot{x} = 2x - 4y + 4e^{-2t},\\ \dot{y} = 2x - 2y.\end{cases}$

45. $\begin{cases}\dot{x} = 4x + y - e^{2t},\\ \dot{y} = y - 2x.\end{cases}$

46. $\begin{cases}\dot{x} = 2y - x + 1,\\ \dot{y} = 3y - 2x.\end{cases}$

47. $\begin{cases}\dot{x} = 5x - 3y + 2e^{3t},\\ \dot{y} = x + y + 5e^{-t}.\end{cases}$

48. $\begin{cases}\dot{x} = 2x + y + e^{t},\\ \dot{y} = -2x + 2t.\end{cases}$

49. $\begin{cases}\dot{x} = x + 2y,\\ \dot{y} = x - 5\sin t.\end{cases}$

50. $\begin{cases}\dot{x} = 2x - 4y,\\ \dot{y} = x - 3y + 3e^{t}.\end{cases}$

51. $\begin{cases}\dot{x} = 2x - y,\\ \dot{y} = y - 2x + 18t.\end{cases}$

52. $\begin{cases}\dot{x} = x + 2y + 16te^{t},\\ \dot{y} = 2x - 2y.\end{cases}$

53. $\begin{cases}\dot{x} = 2x + 4y - 8,\\ \dot{y} = 3x + 6y.\end{cases}$

54. $\begin{cases}\dot{x} = 2x - 3y,\\ \dot{y} = x - 2y + 2\sin t.\end{cases}$

55. $\begin{cases}\dot{x} = x - y + 2\sin t,\\ \dot{y} = 2x - y.\end{cases}$

Решить системы методом вариации постоянных.

56. $\begin{cases}\dot{x} = y + \operatorname{tg}^2 t - 1,\\ \dot{y} = -x + \operatorname{tg} t.\end{cases}$

57. $\begin{cases}\dot{x} = 2y - x,\\ \dot{y} = 4y - 3x + \dfrac{e^{3t}}{e^{2t} + 1}.\end{cases}$

58. $\begin{cases}\dot{x} = -4x - 2y + \dfrac{2}{e^{t} - 1},\\ \dot{y} = 6x + 3y - \dfrac{2}{e^{t} - 1}.\end{cases}$

59. $\begin{cases}\dot{x} = x - y + \dfrac{1}{\cos t},\\ \dot{y} = 2x - y.\end{cases}$

60. $\begin{cases}\dot{x} = 3x - 2y,\\ \dot{y} = 2x - y + 15e^{t}\sqrt{t}.\end{cases}$

II.14. Устойчивость

Пользуясь определением устойчивости по Ляпунову, выяснить, является ли устойчивым нулевое решение системы, если известно, что общее решение этой системы имеет указанный вид.

1. $x = C_1 \cos^2 t + C_2 \mathrm{e}^{-t}$, $y = C_1 t^4 \mathrm{e}^{-t} + 3C_2$.

2. $x = \dfrac{C_1 + C_2 t}{1 + t^2}$, $y = (C_1 t^3 + 2C_2)\mathrm{e}^{-t}$.

3. $x = (2C_1 + C_2 t)\mathrm{e}^{-t}$, $y = \dfrac{3C_1 \sqrt[3]{t}}{\ln(t^2 + 2)} + C_2$.

4. $x = C_1 t \cos^3 t + C_2 \mathrm{e}^{-2t}$, $y = (C_1 t + 2C_2)\mathrm{e}^{-2t}$.

5. $x = -2C_1 t\cos^3 t + C_2\mathrm{e}^{-5t}$, $y = C_1 t^4\mathrm{e}^{-t} + 3C_2$.

6. $x = (C_1 t^3 + 2C_2)\mathrm{e}^{-t}$, $y = \dfrac{C_1 t + C_2}{1+t^4}$.

7. $x = C_1 + C_2\dfrac{t}{1+t^2}$, $y = C_1 t^4\mathrm{e}^{-t} + 3C_2$.

8. $x = C_1 t^4\mathrm{e}^{-t} + 3C_2$, $y = C_1 + C_2\dfrac{t}{1+t^2}$.

9. $x = C_1\mathrm{e}^{-2t} + C_2$, $y = C_1 t + C_2\dfrac{t}{1+t^6}$.

10. $x = C_1 t + C_2\dfrac{t}{1+t^2}$, $y = C_1\cos t + C_2$.

11. $x = C_1\cos^2 t - C_2\mathrm{e}^{-t}$, $y = C_1\mathrm{e}^{-t} + 3C_2$.

12. $x = \dfrac{C_1 t^3 + C_2 t}{1+t^2}$, $y = (C_1 t^3 + 2C_2)\mathrm{e}^{-2t}$.

13. $x = (C_1 - C_2 t)\mathrm{e}^{-t}$, $y = \dfrac{C_1 t}{\ln(t^2+5)} + C_2$.

14. $x = C_1 t\cos^3 t + C_2\mathrm{e}^{-3t}$, $y = (C_1 t - 3C_2)\mathrm{e}^{-t}$.

15. $x = -C_1 t\sin^3 t + C_2\mathrm{e}^{-5t}$, $y = C_1 t^4\mathrm{e}^{-t} + C_2$.

16. $x = C_1 t^3 - C_2$, $y = \dfrac{C_1 t + C_2 t^2}{1+t^4}$.

17. $x = C_1 - C_2\dfrac{1}{1+t^2}$, $y = C_1 t^4\mathrm{e}^{-2t} + 3C_2$.

18. $x = C_1 t^2\mathrm{e}^{-t} + C_2$, $y = C_1\operatorname{arctg} t + C_2\dfrac{t}{1+t^2}$.

19. $x = C_1\mathrm{e}^{-3t} - C_2$, $y = C_1 + C_2\dfrac{t^4}{1+t^6}$.

20. $x = C_1\operatorname{arctg} t + C_2\dfrac{t}{1+t^2}$, $y = C_1\cos t - C_2$.

Для данных систем найти все положения равновесия и исследовать их на устойчивость.

21. $\begin{cases} \dot{x} = y - 1 - x^2 - x, \\ \dot{y} = 3x - x^2 - y + 1. \end{cases}$

22. $\begin{cases} \dot{x} = y(x-1), \\ \dot{y} = xy + x - 2. \end{cases}$

23. $\begin{cases} \dot{x} = 3 - \sqrt{-4 + x^2 + y}, \\ \dot{y} = \ln(x^2 - 3). \end{cases}$

24. $\begin{cases} \dot{x} = xy, \\ \dot{y} = xy + x + y - 1. \end{cases}$

25. $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = \cos(x+y). \end{cases}$

26. $\begin{cases} \dot{x} = \ln(-x - 1 + y^2), \\ \dot{y} = x - y. \end{cases}$

27. $\begin{cases} \dot{x} = x(y-1), \\ \dot{y} = xy + y - 2. \end{cases}$

28. $\begin{cases} \dot{x} = \ln(3 + y + \sin x), \\ \dot{y} = 2 + \sqrt[3]{3\sin x - 8}. \end{cases}$

29. $\begin{cases} \dot{x} = 3 - \sqrt{1 + x^2 + y}, \\ \dot{y} = \ln(x^2 - 3). \end{cases}$

30. $\begin{cases} \dot{x} = \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{y}, \\ \dot{y} = \sqrt{-3x + y^2} - 2. \end{cases}$

31. $\begin{cases} \dot{x} = y + 1 - x^2 - x, \\ \dot{y} = 3x - x^2 - y - 1. \end{cases}$

32. $\begin{cases} \dot{x} = -\cos y, \\ \dot{y} = 2x + \sqrt{1 - 3x - \cos y}. \end{cases}$

33. $\begin{cases} \dot{x} = \ln(5 + y + \sin x), \\ \dot{y} = 2 + \sqrt[3]{3\sin x - 8}. \end{cases}$

34. $\begin{cases} \dot{x} = 3 - \sqrt{x^2 + y}, \\ \dot{y} = \ln(x^2 - 3). \end{cases}$

35. $\begin{cases} \dot{x} = \ln(-1 + y + \sin x), \\ \dot{y} = 2 + \sqrt[3]{3\sin x - 8}. \end{cases}$

36. $\begin{cases} \dot{x} = 3 - \sqrt{-2 + x^2 + y}, \\ \dot{y} = \ln(x^2 - 3). \end{cases}$

37. $\begin{cases} \dot{x} = \ln(2 + y + \cos x), \\ \dot{y} = 2 + \sqrt[3]{3\sin x - 8}. \end{cases}$

38. $\begin{cases} \dot{x} = -\sin y, \\ \dot{y} = 2x - 2 + \sqrt{4 - 3x - \sin y}. \end{cases}$

39. $\begin{cases} \dot{x} = \ln(4 + y + \cos x), \\ \dot{y} = 2 + \sqrt[3]{3\sin x - 8}. \end{cases}$

40. $\begin{cases} \dot{x} = -\cos y, \\ \dot{y} = 2x - 2 + \sqrt{4 - 3x - \cos y}. \end{cases}$

Исследовать устойчивость нулевого решения, пользуясь известными условиями отрицательности вещественных частей всех корней многочлена, например, условиями Рауса — Гурвица или критерием Михайлова.

41. $y''' + 2y'' + 2y' + 4y = 0.$

42. $y^{IV} + 2y''' + 2y'' + 3y' + 2y = 0.$

43. $y^{IV} + 2y''' + 3y'' + 8y' + 3y = 0.$

44. $y^{IV} + 2y''' + 4y'' + 6y' + 7y = 0.$

45. $y^{IV} + 8y''' + 14y'' + 32y' + 40y = 0.$

46. $y^{IV} + 12y''' + 16y'' + 50y' + 70y = 0.$

47. $y^{IV} + 3y''' + 26y'' + 68y' + 76y = 0.$

48. $y''' + 4y'' + 5y' + 8y = 0.$

49. $y^{V} + 2y^{IV} + 4y''' + 6y'' + 4y' + 5y = 0.$

50. $y^{V} + 2y^{IV} + 5y''' + 6y'' + 5y' + 3y = 0.$

51. $y^{V} + 3y^{IV} + 6y''' + 7y'' + 5y' + 5y = 0.$

52. $y^{V} + 4y^{IV} + 9y''' + 16y'' + 17y' + 11y = 0.$

53. $y^{V} + 4y^{IV} + 16y''' + 21y'' + 13y' + 11y = 0.$

54. $y^{V} + 3y^{IV} + 10y''' + 25y'' + 20y' + 15y = 0.$

55. $y^{V} + 5y^{IV} + 15y''' + 48y'' + 42y' + 64y = 0.$

56. $y^{V} + 2y^{IV} + 14y''' + 37y'' + 23y' + 69y = 0.$

57. $y^{IV} + 4y''' + 23y'' + 67y' + 76y = 0.$

58. $y''' + 6y'' + 7y' + 10y = 0.$

59. $y^{V} + 3y^{IV} + 7y''' + 15y'' + 8y' + 7y = 0.$

60. $y^{V} + 3y^{IV} + 9y''' + 5y'' + 75y' + 11y = 0.$

Исследовать, при каких значениях параметров a и b нулевое решение асимптотически устойчиво.

61. $y''' + ay'' + by' + 6y = 0.$

62. $y^{IV} + y''' + ay'' + y' + 5y = 0.$

63. $y''' + ay'' + by' + 8y = 0.$
64. $y^{IV} + 2y''' + 3y'' + 8y' + ay = 0.$
65. $y''' + 9y'' + ay' + by = 0.$
66. $y^{IV} + 3y''' + 6y'' + 2y' + ay = 0.$
67. $y^{IV} + 4y''' + y'' + 4y' + ay = 0.$
68. $y''' + 3y'' + ay' + by = 0.$
69. $y^{IV} + 6y''' + 12y'' + 2y' + ay = 0.$
70. $y^{IV} + ay''' + 2y'' + y' + y = 0.$
71. $y''' + 6y'' + ay' + by = 0.$
72. $y^{IV} + ay''' + y'' + y' + 2y = 0.$
73. $y^{IV} + 2y''' + 4y'' + ay' + y = 0.$
74. $y^{IV} + ay''' + 4y'' + 3y' + y = 0.$
75. $y^{IV} + y''' + ay'' + y' + 2y = 0.$
76. $y^{IV} + ay''' + 2y'' + y' + 2y = 0.$
77. $y^{IV} + y''' + ay'' + y' + 4y = 0.$
78. $y''' + ay'' + by' + 4y = 0.$
79. $y^{IV} + y''' + ay'' + y' + 3y = 0.$
80. $y^{IV} + 2y''' + 4y'' + ay' + 2y = 0.$

II.15. Фазовая плоскость автономных систем. Особые точки

Определить тип особых точек. Начертить траектории на плоскости (x, y).

1. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y, \\ \dot{y} = 2x - 3y. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y, \\ \dot{y} = 3x + 4y. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{x} = 2x, \\ \dot{y} = x - 5y. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 5y, \\ \dot{y} = 2x + 2y. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dot{x} = -5x + y, \\ \dot{y} = x - 7y. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y, \\ \dot{y} = -3x + y. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 4y - x. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y, \\ \dot{y} = 4x - y. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dot{x} = 5x + 3y, \\ \dot{y} = -y - 3x. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dot{x} = y + 2x, \\ \dot{y} = y + x. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dot{x} = x + 3y, \\ \dot{y} = -y - 3x. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = 5y + x. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dot{x} = x + 3y, \\ \dot{y} = -6x - 5y. \end{cases}$

14. $\begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases}$

15. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 5y, \\ \dot{y} = 2x + 2y. \end{cases}$ **16.** $\begin{cases} \dot{x} = 3x + y, \\ \dot{y} = y - x. \end{cases}$

17. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y, \\ \dot{y} = 4y - 6x. \end{cases}$ **18.** $\begin{cases} \dot{x} = y - 2x, \\ \dot{y} = 2y - 4x. \end{cases}$

19. $\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = 3y - 2x. \end{cases}$ **20.** $\begin{cases} \dot{x} = x - 3y, \\ \dot{y} = 3x + y. \end{cases}$

Найти и исследовать особые точки данных систем.

21. $\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y, \\ \dot{y} = (x - y)(x - y + 2). \end{cases}$ **22.** $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = x^2 + y^2 - 2. \end{cases}$

23. $\begin{cases} \dot{x} = x + y + 1, \\ \dot{y} = y + \sqrt{1 + 2x^2}. \end{cases}$ **24.** $\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y, \\ \dot{y} = \ln(1 - x + x^2) - \ln 3. \end{cases}$

25. $\begin{cases} \dot{x} = \ln(2 - y^2), \\ \dot{y} = e^x - e^y. \end{cases}$ **26.** $\begin{cases} \dot{x} = (2x - y)(x - 2), \\ \dot{y} = xy - 2. \end{cases}$

27. $\begin{cases} \dot{x} = \ln(1 - y + y^2), \\ \dot{y} = 3 - \sqrt{x^2 + 8y}. \end{cases}$ **28.** $\begin{cases} \dot{x} = x^2 + y^2 - 2x, \\ \dot{y} = 3x^2 - x + 3y. \end{cases}$

29. $\begin{cases} \dot{x} = e^{x+2y} - \cos 3x, \\ \dot{y} = \sqrt{4 + 8x} - 2e^y. \end{cases}$ **30.** $\begin{cases} \dot{x} = 7x + 2\sin y, \\ \dot{y} = e^x - 3y - 1. \end{cases}$

31. $\begin{cases} \dot{x} = -3/2x + 1/2\sin 2y, \\ \dot{y} = -y - 2x. \end{cases}$ **32.** $\begin{cases} \dot{x} = 4x^2 - y^2, \\ \dot{y} = -4x + 2xy - 8. \end{cases}$

33. $\begin{cases} \dot{x} = 1/4(e^x - 1) - 9y, \\ \dot{y} = 1/5x - \sin y. \end{cases}$ **34.** $\begin{cases} \dot{x} = 5x + y\cos y, \\ \dot{y} = 3x + 2y - y^3 e^y. \end{cases}$

35. $\begin{cases} \dot{x} = y^2 - 4x^2, \\ \dot{y} = 4y - 8. \end{cases}$ **36.** $\begin{cases} \dot{x} = 4 - 4x - 2y, \\ \dot{y} = xy. \end{cases}$

37. $\begin{cases} \dot{x} = xy - 4, \\ \dot{y} = (x - 4)(y - x). \end{cases}$ **38.** $\begin{cases} \dot{x} = (2x - y)^2 - 9, \\ \dot{y} = 9 - (x - 2y)^2. \end{cases}$

39. $\begin{cases} \dot{x} = (2x - y)^2 - 9, \\ \dot{y} = (x - 2y)^2 - 9. \end{cases}$ **40.** $\begin{cases} \dot{x} = x^2 + y^2 - 6x - 8y, \\ \dot{y} = x(2y - x + 5). \end{cases}$

II.16. Уравнения в частных производных первого порядка

Решить уравнения.

1. $xy\dfrac{\partial u}{\partial x} + x^2\dfrac{\partial u}{\partial y} = y.$

2. $(z-y)\dfrac{\partial u}{\partial x}+(x-z)\dfrac{\partial u}{\partial y}+(y-x)\dfrac{\partial u}{\partial z}=0.$

3. $x\dfrac{\partial u}{\partial x}-y\dfrac{\partial u}{\partial y}=x-y.$

4. $\dfrac{\partial u}{\partial x}-(y+2z)\dfrac{\partial u}{\partial y}+(3y+4z)\dfrac{\partial u}{\partial z}=0.$

5. $x^2\dfrac{\partial u}{\partial x}-xy\dfrac{\partial u}{\partial y}=x^2.$

6. $(z-y)\dfrac{\partial u}{\partial x}+z\dfrac{\partial u}{\partial y}+y\dfrac{\partial u}{\partial z}=0.$

7. $y\dfrac{\partial u}{\partial x}-x\dfrac{\partial u}{\partial y}=y^2-x^2.$

8. $(x+u)\dfrac{\partial u}{\partial x}+(y+u)\dfrac{\partial u}{\partial y}=x+y.$

9. $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=u-xy.$

10. $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+(u+z)\dfrac{\partial u}{\partial z}=xy.$

11. $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+2y\dfrac{\partial u}{\partial y}+3z\dfrac{\partial u}{\partial z}=4u.$

12. $(u-x)\dfrac{\partial u}{\partial x}+(u-y)\dfrac{\partial u}{\partial y}-z\dfrac{\partial u}{\partial z}=x+y.$

13. $xy^2\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}=x.$

14. $(x^3+3xy^2)\dfrac{\partial u}{\partial x}+2y^3\dfrac{\partial u}{\partial y}+2y^2z\dfrac{\partial u}{\partial z}=0.$

15. $(1+x^2)\dfrac{\partial u}{\partial x}+xy\dfrac{\partial u}{\partial y}=0.$

16. $\dfrac{\partial u}{\partial x}+(2y-u)\dfrac{\partial u}{\partial y}=y+2u.$

17. $xy\dfrac{\partial u}{\partial x}-x^2\dfrac{\partial u}{\partial y}=yu.$

18. $x^2u\dfrac{\partial u}{\partial x}+y^2u\dfrac{\partial u}{\partial y}=x+y.$

19. $yu\dfrac{\partial u}{\partial x}-xu\dfrac{\partial u}{\partial y}=e^u.$

20. $y\dfrac{\partial u}{\partial x}+u\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{y}{x}.$

Найти поверхность, удовлетворяющую данному уравнению и проходящую через данную линию.

21. $(y-u)\dfrac{\partial u}{\partial x}+(u-x)\dfrac{\partial u}{\partial y}=x-y;\ u=y=-x.$

22. $u\dfrac{\partial u}{\partial x} + (u^2 - x^2)\dfrac{\partial u}{\partial y} = -x;\ y = x^2,\ u = 2x.$

23. $u\dfrac{\partial u}{\partial x} - yx\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2xu;\ x + y = 2,\ uy = 1.$

24. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = u - x^2 - y^2;\ y = -2,\ u = x - x^2.$

25. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} - y\dfrac{\partial u}{\partial y} = u^2(x - 3y);\ x = 1,\ yu + 1 = 0.$

26. $y^2\dfrac{\partial u}{\partial x} + xy\dfrac{\partial u}{\partial y} = x;\ x = 0,\ u = y^2.$

27. $y\dfrac{\partial u}{\partial x} + x\dfrac{\partial u}{\partial y} = u;\ x = 0,\ u = 2y.$

28. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = -xy;\ x = 1,\ u = y^2 + 1.$

29. $uy\dfrac{\partial u}{\partial x} + 2xu\dfrac{\partial u}{\partial y} = x;\ x = 1,\ uy = 1.$

30. $y^2\dfrac{\partial u}{\partial x} - x^2\dfrac{\partial u}{\partial y} = u;\ x = 0,\ u = y.$

31. $\dfrac{\partial u}{\partial x} - y^2\dfrac{\partial u}{\partial y} = -x;\ y = 1,\ u = x^2.$

32. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} + z\dfrac{\partial u}{\partial z} = u;\ x = 2,\ u = 1/2(y + z).$

33. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} - y\dfrac{\partial u}{\partial y} + z\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0;\ x = 1,\ u = y + z.$

34. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} - y\dfrac{\partial u}{\partial y} + z\dfrac{\partial u}{\partial z} = u;\ x = 1,\ u = y + z$

35. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} - y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0;\ x = 1,\ u = y^2.$

36. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} - y\dfrac{\partial u}{\partial y} = x - y;\ x = 1,\ u = y^2 + 1.$

37. $y\dfrac{\partial u}{\partial x} - x\dfrac{\partial u}{\partial y} = y^2 - x^2;\ y = 1,\ u = x^2 - 1.$

38. $(y + 2u^2)\dfrac{\partial u}{\partial x} - 2x^2u\dfrac{\partial u}{\partial y} = x^2;\ x = u,\ y = x^2.$

39. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + u\dfrac{\partial u}{\partial y} = y;\ y = 2u,\ x + 2y = u.$

40. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + (xu + y)\dfrac{\partial u}{\partial y} = u;\ y + x = 2u,\ xu = 1.$

II.17. Краевые задачи

Найти решения уравнений, удовлетворяющие указанным краевым условиям.

1. $y'' - y = 2x$; $y(0) = 0$, $y(1) = -1$.
2. $y'' + y' = 1$; $y'(0) = 0$, $y(1) = 1$.
3. $y'' - y' = 0$; $y(0) = -1$, $y'(1) - y(1) = 2$.
4. $y'' + y = 1$; $y(0) = 0$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.
5. $y'' + y = 1$; $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$.
6. $y'' + y = 2x - \pi$; $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$.
7. $y'' - y' - 2y = 0$; $y'(0) = 2$, $y(+\infty) = 0$.
8. $y'' - y = 1$; $y(0) = 0$, $y(x)$ ограничено при $x \to +\infty$.
9. $x^2y'' - 6y = 0$; $y(0)$ ограничено, $y(1) = 2$.
10. $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$; $y(x) = o(x)$ при $x \to 0$, $y(1) = 3$.

Для каждой из следующих краевых задач построить функцию Грина.

11. $y'' + y' = f(x)$; $y(0) = 0$, $y'(1) = 0$.
12. $y'' - y = f(x)$; $y'(0) = 0$, $y'(2) + y(2) = 0$.
13. $x^2y'' + 2xy' = f(x)$; $y(1) = 0$, $y'(3) = 0$.
14. $xy'' - y' = f(x)$; $y'(1) = 0$, $y(2) = 0$.
15. $x^2y'' - 2y = f(x)$; $y(1) = 0$, $y(2) + 2y'(2) = 0$.
16. $y'' = f(x)$; $y(0) = 0$, $y(x)$ ограничено при $x \to +\infty$.
17. $y'' + y' = f(x)$; $y'(0) = 0$, $y(+\infty) = 0$.
18. $xy'' + y' = f(x)$; $y(1) = 0$, $y(x)$ ограничено при $x \to +\infty$.
19. $x^2y'' + xy' - y = f(x)$; $y(1) = 0$, $y(x)$ ограничено при $x \to +\infty$.
20. $y'' - y = f(x)$; $y(x)$ ограничено при $x \to \pm\infty$.

Учебное издание

Дифференциальные уравнения

Составители:
Светлана Владимировна Полынцева
Александр Алексеевич Родионов
Юрий Вадимович Шанько

Подготовлено к публикации РИО БИК СФУ

Подписано в печать 00.00.2012 г. Формат 60x84/16.
Бумага офсетная. Печать плоская.
Усл. печ. л. 0,0. Тираж 00 экз. Заказ 0000.

Редакционно-издательский отдел
Библиотечно-издательского комплекса
Сибирского федерального университета
660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79
Тел/факс (391) 206-21-49. E-mail rio@sfu-kras.ru
http://rio.sfu-kras.ru

Отпечатано Полиграфическим центром
Библиотечно-издательского комплекса
Сибирского федерального университета
660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 82а
Тел. (391) 206-26-58, (391) 206-26-49