1	2	3	4	5	6	$\sum$
3	3	3	3	4	4	20

Фамилия   Группа

Сибирский федеральный университет

Институт математики и фундаментальной информатики

Экзаменационная работа по уравнениям математической физики

2019-2020 уч. год, 2 минисессия
ВАРИАНТ 0

1. Поставить
а) вторую краевую задачу для уравнения Лапласа;
б) третью краевую задачу для однородного уравнения колебания струны;
в) задачу Коши для двумерного уравнения теплопроводности. (3 балла)

2. Найти решение задачи
$u_{tt}(t,x) = 9u_{xx}(t,x), \quad u(0,x) = x+2, \quad u_t(0,x) = x^2-1, \quad t \geqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}.$ (3 балла)

3. Найти решение задачи
$u_t(t,x) = 4u_{xx}(t,x) + t^2 + e^x, \quad u(0,x) = 7e^x, \quad t \geqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}.$ (3 балла)

4. Используя формулу Пуассона, доказать, что если $|\varphi(x)| \leqslant M, x \in \mathbb{R}$, то
$|u(t,x)| \leqslant M, x \in \mathbb{R}, t \in [0,T], M - const > 0.$
Здесь $u(t,x)$ — решение задачи $u_t(t,x) = u_{xx}(t,x), \quad u(0,x) = \varphi(x).$ (3 балла)

5. Доказать, что классическое решение задачи
$u_t = 2u_{xx} + \sin u, \quad u(0,x) = x,\ u(t,0) = 0,\ u(t,2) = 2+t,$
в области $Q = \{(t,x) | t \in (0,5), x \in (0,2)\}$ удовлетворяет неравенству
$|u(t,x)| < 15.$ (4 балла)

6. Доказать непрерывную зависимость классического решения первой краевой задачи для параболического уравнения $u_t(t,x) = a^2u_{xx}(t,x) + f(t,x)$. от функции $f(t,x)$.
(4 балла)

Типовые задачи

Тема: Задача Коши для волнового уравнения

1. Решить задачу Коши
$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}$, $t > 0$, $(x, y) \in R_2$,
$u(0, x, y) = y$, $u_t(0, x, y) = x^2 + y$.
2. Решить задачу Коши
$u_{tt} = 3u_{xx} + u_{yy}$, $t > 0$, $x \in E_1$,
$u(0, x) = \cos^2 x$, $u_t(0, x) = \sin^2 x$.
3. Найти решение следующей задачи:
$u_{tt} = 2u_{xx} + 2x$, $u(0, x) = 3$, $u_t(0, x) = \cos x$, $t \geqslant 0$, $x \in R_1$.

Тема: Задача Коши для уравнения теплопроводности

1. Решить задачу Коши
$u_t = 3u_{xx} + 2u$, $t > 0$, $x \in R_1$,
$u(0, x) = 3$.
2. Решить задачу Коши
$u_t = 4u_{xx} +$, $t > 0$, $x \in R_1$,
$u(0, x) = 3$.
3. Записать формулу Пуассона и указать, решением какой задачи она является.
4. Доказать, что функция
$u(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} \varphi(\xi)\, d\xi$
есть решение уравнения $u_t = u_{xx}$ при $\varphi(x)$, удовлетворяющей условиям
$|\varphi(x)| \leqslant M\, e^{\alpha |x|}$, $\alpha = \mathrm{const} \geqslant 0$, в $\Pi(0, T] = [0 < t \leqslant T,\, x \in E_1\}$.
5. Выписать решение задачи Коши для одномерного уравнения теплопроводности с начальными данными $u(0, x) = e^x \sin x$ в виде формулы Пуассона.

Тема: Принцип максимума для параболических уравнений

1. Оценить в $\{(t, x) | 0 \leqslant t \leqslant \infty\; 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ классическое решение $u(t, x)$ первой краевой задачи
$u(0, x) = x(1 - x)$, $u(t, 0) = u(t, 1) = 0$ для уравнения $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$, $\mu = \mathrm{const} > 0$.
2. Оценить в $\{(t, x) | 0 \leqslant t \leqslant T, 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ классическое решение $u(t, x)$ первой краевой задачи
$u_t = u_{xx} - u^3$,
$u(0, x) = x(x - 1)$, $u(t, 0) = u(t, 1) = 0$.
3. Доказать теорему единственности классического решения первой краевой задачи для уравнения
$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + u^3(t, x) = \mu \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}$, $\mu = \mathrm{const} > 0$.
4. Доказать единственность классического решения $u(t, x)$ задачи
$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + u^2(t, x) + f(t, x)$, $(t, x) \in [0; 1] \times [0; 1]$,
$u(0, x) = u_0(x)$, $u(t, 0) = u(t, 1) = 0$.
5. Оценить в полосе $\{(t, x) | 0 \leqslant x \leqslant \pi, 0 \leqslant t \leqslant \infty\}$ классическое решение $u(t, x)$ первой краевой задачи
$u_t + u_x = u_{xx}$, $u(0, x) = \sin x$, $u(t, 0) = u(t, \pi) = 0$.