

## Примеры задач

1. Для задачи Коши

$$\dot{x} = tx^2 + 1 - t^2, \quad x(0) = 0$$

проверить выполнение условий локальной теоремы Коши — Пикара в области  $(-1, 1) \times (-1, 1)$ .

2. Используя локальную теорему Коши — Пикара, указать максимальный интервал существования решения задачи Коши

$$\dot{x} = x^4 + 3, \quad x(0) = 0.$$

3. Найти какой-либо интервал существования решения задачи Коши

$$\dot{x} = x + \frac{1}{2t - 3}; \quad x(0) = 0.$$

4. Дано уравнение  $\dot{x} = 2\sqrt{|x|}$ . Построить два различных *продолжения* его решения  $x(t)$  заданного формулой

$$x(t) = \begin{cases} -(t + 6)^2, & -8 < t < -6; \\ 0, & -6 \leq t \leq 4; \\ (t - 4)^2, & 4 < t < 7. \end{cases}$$

5. Найти продолжение решения  $y_0 = x^3$ ,  $x \in (2; 3)$  уравнения  $xy' = 3y$  отличное от него самого.

6. Построить *непродолжаемое* решение задачи Коши

$$\dot{x} = -2x/t, \quad x(1) = 1.$$

7. Уравнение  $(x - 1)y' = 5y$  имеет решение  $y_0 = |x - 1|^5$ ,  $x \in (-2; 5)$ . Какие из следующих решений будут продолжениями  $y_0$ ?

- $y_1 = (x - 1)^5$ ,  $x \in (-7; 7)$ .
- $y_2 = |x - 1|^5$ ,  $x \in (-3; 6)$ .
- $y_3 = |x - 1|^5$ ,  $x \in (-3; 4)$ .

Ответ обосновать в каждом из трех случаев.

8. Найти все значения параметра  $k$ , при которых уравнение

$$y'' + (k - 4)(xy'' - y^k) = 0$$

будет линейным.

9. Функции  $y = y_1(x)$  и  $y = y_2(x)$  являются решениями уравнения

$$y'' + y' + xy = 0.$$

Известно значение определителя Вронского этих решений в нуле:  $W(y_1, y_2)|_{x=0} =$

3. Найти  $W(y_1, y_2)|_{x=2}$ .

10. Известны два решения линейного однородного уравнения второго порядка:  $y_1 = x$ ,  $y_2 = x^2 - 1$ . Найти решения с начальными условиями  $y(2) = 4$ ,  $y'(2) = -3$ .
11. Привести пример промежутка, на котором функции  $f_1(x) = |x - 5|$ ,  $f_2(x) = x$ ,  $f_3(x) = 5$  будут являться: а) линейно независимыми; б) линейно зависимыми.
12. Понизить порядок линейного уравнения

$$y''' + 2y'' + 4xy' - 4y = 0,$$

зная частное решение  $y_1(x) = x$ .