1	2	3	4	5	6	$\sum$
4	4	3	3	3	4	21

Фамилия Группа

Сибирский федеральный университет

Институт математики и фундаментальной информатики

Экзаменационная работа по уравнениям математической физики

2016-2017. 4 сессия
Вариант 0

Всюду ниже Ω — ограниченная область пространства E^n с гладкой границей $\partial\Omega$, $f(x) \in L_2(\Omega)$.

1. Доказать теорему существования и единственности в классе $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ обобщенного решения задачи $-\Delta u + 2u = \sin x_1 \cdot \sin x_2, \qquad u|_{\partial\Omega} = 0.$ (3 балла)
2. Дать определение обобщенного решения краевой задачи $-(x_1^2+x_2^2+1)\Delta u+u = f(x_1, x_2)$, $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0$, где Δ — двумерный оператор Лапласа. (3 балла)
3. Дать определение квадратичного функционала. Доказать его ограниченность снизу. (3 балла)
4. Вывести необходимое условие, которому удовлетворяет элемент u, реализующий минимум квадратичного функционала $\Phi(v) = ||u||^2_{\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)} + (f, u)_{L_2(\Omega)}$ на $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$. (3 балла)
5. Дать определение базиса в пространстве $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$. Выписать схему построения решения первой краевой задачи для эллиптического уравнения с однородными граничными условиями методом Галёркина. (3 балла)
6. Доказать, что при $\varphi(x) \in H^1(\Omega)$, функционал $F(v) = \int\limits_{\Omega} \varphi(x)v(x)\,dx + \int\limits_{\partial\Omega} \sin^2(|s|)v(s)\,ds$ является непрерывным на $H^1(\Omega)$. (3 балла)
7. Дать определение обобщенного решения первой краевой задачи для параболического уравнения в пространстве $\overset{\circ}{H}{}^1_{S_T}(Q_T)$. (2 балла)

Фамилия группа

1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
10	10	10	10	10	10	10	10	80

Сибирский федеральный университет
Институт математики и фундаменальной информатики

Экзаменационная работа по уравнениям математической физики

2016-2017.
Вариант 0

Всюду ниже Ω – ограниченная область с кусочно-гладкой границей; функция $f(x) \in L_2(\Omega)$.

1.. Определить тип уравнения $u_{xx} - 4u_{xy} - 21u_{yy} = 0$ и привести его к каноническому виду (10 баллов)

2.. Записать формулировку следующих задач:
а) первая краевая задача для уравнения колебания мембраны с однородными краевыми условиями;
б) третья краевая задача для уравнения Пуассона в двумерном случае;
в) задача Коши для уравнения теплопроводности в стержне.
Дать определение классического решения одной (любой по вашему выбору) из данных задач. (10 баллов)

3. Вывести формулу (формулу Даламбера) для решения задачи
$u_{tt} = u_{xx}, \quad x \in (-\infty, +\infty)$, $u(0,x) = u_0(x)$, $u_t(0,x) = 0$ (10 баллов)

4.. Доказать единственность классического решения задачи
$u_t = a^2 u_{xx} + t\sin(tx^2), 0 < x < 2, 0 < t < 3 \quad u(0,x) = x^2, \quad u(t,0) = t^3, \quad u(t,2) = 4 + t^2$.
(10 баллов)

5. Дать определение пространств $C^1(\overline{\Omega})$, $H^1(\Omega)$, $L_p(\Omega)$, $L_{p,loc}(\Omega)$, $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$. Выписать скалярные произведения и нормы, если они определены в данных пространствах. Являются ли данные пространства Банаховыми, Гильбертовыми? (10 баллов)

6. Дать определение обобщенной (по Соболеву) производной функции $f(x)$ в области Ω. Доказать по определению, что обобщенная производная от константы почти всюду в Ω равна нулю. (10 баллов)

7. Доказать существование и единственность решения класса $H^1(\Omega)$ задачи $-\Delta u + (\sin|x| + 2)u = 3, \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 1$ (10 баллов)

8. Доказать, что последовательность галёркинских приближений решения первой краевой задачи для эллиптического уравнения с однородными граничными условиями является ограниченной в $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$. (10 баллов)