

Лектор Шипина Т.Н.

Теоретические разделы

1. Числовые ряды. Сходимость ряда. Сумма ряда.
2. Необходимый признак сходимости.
3. Критерий Коши сходимости ряда.
4. Ряды с положительными членами. Признаки сравнения.
5. Признаки сходимости рядов с положительными членами (Даламбера, Коши, интегральный признак Коши).
6. Абсолютная сходимость ряда. Признаки абсолютной сходимости
7. Условно сходящиеся ряды. Признак Лейбница.
8. Перестановки членов ряда. Теорема Римана.
9. Функциональные последовательности и ряды. Область сходимости.
10. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов. Признаки равномерной сходимости.
11. Предельный переход под знаком функциональной последовательности.
12. Непрерывность, интегрируемость и дифференцируемость суммы ряда.
13. Степенные ряды. Радиус и интервал сходимости. Первая теорема Абеля.
14. Свойства суммы степенного ряда. Формула Коши-Адамара. Вторая теорема Абеля.
15. Аналитические функции. Разложение функций в степенные ряды. Ряд Тейлора.
16. Ряд Фурье по ортогональной системе функций. Коэффициенты Фурье.
17. Тригонометрическая система функций. Ядра Дирихле и Фейера.
18. Минимальное свойство коэффициентов Фурье. Неравенство Бесселя.
19. Теорема Вейерштрасса о приближении непрерывных функций многочленами.
20. Сходимость рядов Фурье для гладких функций.

Теоремы с доказательствами

1. Необходимый признак сходимости числового ряда.
2. Критерий Коши сходимости числового ряда.
3. Признак сравнения для числового ряда с неотрицательными членами.
4. Признак Даламбера сходимости числового ряда.
5. Признак Лейбница сходимости числового ряда.
6. Мажорантный признак равномерной сходимости функционального ряда.
7. Теорема о почленном интегрировании функционального ряда.
8. Теорема Коши – Адамара (формула радиуса сходимости степенного ряда).
9. Теорема Римана об осцилляции.
10. Признак Дини сходимости ряда Фурье в точке
11. Признак Липшица сходимости ряда Фурье в точке
12. Теорема Вейерштрасса о приближении алгебраическими многочленами.
13. Теорема о свойстве минимальности коэффициентов Фурье.

Практические задания

1. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

А) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x} + \arctg x}$

Б) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^3 + \sqrt{x}} dx$

В) $\int_2^{+\infty} \frac{4 + \cos 8x}{e^x} dx$

Г) $\int_1^2 \frac{(x-2)dx}{x^3 - 3x^2 + 4}$

Д) $\int_3^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{x^5 + 4}}$

Е) $\int_3^{+\infty} e^{-3x} \cdot \frac{\arctg x}{\sqrt{x^5 + 4}} dx$

2. Исследовать на сходимость ряды

$$\begin{array}{lll} \text{А) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{(n+1)!}; & \text{Б) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt[3]{n}}; & \text{В) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{n^2} \\ \text{Г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 + 3(-1)^n}{2^{n+3}} & \text{Д) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin^2 7n}{n^3}. & \text{Е) } \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n \end{array}$$

3. Исследовать на условную и абсолютную сходимость ряды

$$\begin{array}{lll} \text{А) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+1}{n^2(n+3)}; & \text{Б) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)}{(n+2)\sqrt{\ln^3(n+2)}}; & \text{В) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{7^n} \\ \text{Г) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 \cdot 3^n}{5^n + 1} & \text{Д) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n^2+1)}{e^n}. & \end{array}$$

4. Найти интервал сходимости степенного ряда. Исследовать сходимость ряда на краях полученного интервала.

$$\begin{array}{lll} \text{А) } \sum_{n=1}^{\infty} (-4)^n x^n; & \text{Б) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{\sqrt[3]{n}}; & \text{В) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n (x-1)^n \\ \text{Г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!} x^n & \text{Д) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n \cdot 2^n} & \end{array}$$

5. Найти предельную функцию $f(x)$ последовательности $f_n(x) = x^n$ на множестве $E = [0; 1]$.

6. Найти предельную функцию $f(x)$ последовательности $f_n(x) = e^{-nx^2}$ на множестве $E = [1; +\infty]$.

7. Доказать, что последовательность $f_n(x) = \frac{n^2}{n^2+x^2}$ сходится равномерно на множестве $E = [-1; 1]$.

8. Доказать, что последовательность $f_n(x) = \frac{\cos \sqrt{nx}}{n+x}$ сходится равномерно на множестве $E = [0; +\infty)$.

9. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg(n^2 x) \cdot \cos nx}{n \sqrt{n}}$ сходится равномерно на множестве $E = \mathbb{R}$.

10. Доказать или опровергнуть утверждения:

А) Если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится.

Б) Пусть $f_n(x), n = 1, 2, \dots$ - непрерывные функции на ограниченном множестве X . Если последовательность $f_n(x)$ сходится при $n \rightarrow \infty$ к функции $f(x)$ в каждой фиксированной точке множества X , то функция $f(x)$ непрерывна на множестве X .

В) Если $f(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$, то интеграл $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ сходится.

Г) Если сходится интеграл $\int_1^{+\infty} |f(x)| dx$, то сходится и интеграл $\int_1^{+\infty} f(x) dx$.

Д) Пусть a_n - знакопеременная числовая последовательность. Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$.

11. Пусть функция $f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi \leq x < 0 \\ -1 & 0 \leq x \leq \pi, \end{cases}$ и её ряд Фурье имеет вид

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx. \quad \text{Найти коэффициенты } a_6, b_7.$$

Список литературы

1. Л.Д. Кудрявцев и др. Сборник задач по математическому анализу. **Том2.** –Москва: ФИЗМАТЛИТ. 2003.
2. А.М.Кытманов и др. Математический анализ с элементами алгебры, геометрии и функционального анализа (учебное пособие) (<http://math.sfu-kras.ru/sites/default/files/matananaliz2.pdf>).

ОБРАЗЕЦ

ВАРИАНТ 0

1. Дать определение:
 - радиуса сходимости степенного ряда;
 - равномерной сходимости функциональной последовательности на множестве X .
2. Теорема о свойстве минимальности коэффициентов Фурье.
3. Сформулировать и доказать критерий Коши.
4. Найти интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n \cdot 2^n}$. Исследовать сходимость ряда на краях полученного интервала.
5. Доказать, что последовательность $f_n(x) = \frac{\cos \sqrt{nx}}{n+x}$ сходится равномерно на множестве $E = [0; +\infty)$.
6. Доказать или опровергнуть утверждение:
«Если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится.»
7. Исследовать на сходимость несобственный интеграл $\int_3^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{x^5+4}}$.