Математический анализ (зимняя сессия 2016-2017 уч.год)

Лектор Шипина Т.Н.

Теоретические разделы

1.Непрерывность функции. Локальные свойства непрерывных функций.
2. Точки разрыва. Классификация.
3. Глобальные свойства непрерывных функций: теорема Коши о существовании корня, теоремы Вейерштрасса о непрерывных функциях, заданных на отрезке, теорема Больцано-Коши о промежуточном значении.
4. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора о равномерной непрерывности.
5. Производная и дифференцируемость функции.
6. Теорема о равносильности дифференцируемости и существования производной.
7. Касательная. Геометрический смысл производной, геометрический смысл дифференциала функции. Физический смысл производной.
8. Односторонние производные.
9. Производные суммы, произведения и частного двух функций.
10. Производные сложной и обратной функций.
11. Свойства дифференциала, Инвариантность формы дифференциала первого порядка.
14. Производные и дифференциалы высших порядков.
15. Теорема Ферма.
16. Теорема Ролля.
17. Теорема Лагранжа. Теорема Коши.
17. Правило Лопиталя.
18. Формула Тейлора. Формула Макларена.
19. Монотонные функции. Необходимые и достаточные условия возрастания (убывания) непрерывной и дифференцируемой функции на интервале.
20. Экстремумы функции. Условия существования экстремума.
21. Использование второй производной для исследования функции (выпуклость, вогнутость, точки перегиба)
22. Асимптоты графика функции.

Из представленных разделов нужно знать все **определения и формулировки теорем.**

Теоремы с доказательствами

- Теорема Коши о существовании корня.
- Первая теорема Вейерштрасса (Функция, непрерывная на отрезке, ограничена на нем.)
- Вторая теорема Вейерштрасса (Функция, непрерывная на отрезке, принимает на нем свое максимальное и минимальное значение.)
- Теорема Кантора о равномерной непрерывности.
- Теорема Ферма
- Теорема Ролля
- Теорема Лагранжа.
- Теорема Коши.
- Теорема Тейлора

- Условия возрастания (убывания) непрерывной и дифференцируемой функции на интервале.
- Достаточное условие существования экстремума в точке.
- Достаточное условие существования экстремума в точке с использованием старших производных.
- Достаточное условие существования точки перегиба.

Практические задания

1. Привести пример непрерывной на интервале функции и неограниченной на нем.
2. Привести пример непрерывной на интервале функции и ограниченной на нем, но не достигающей ни своей верхней, ни нижней грани.
3. Указать множество точек, в которых непрерывна функция, найти ее точки разрыва, установить их род, нарисовать график функции.

   А) $y = \begin{cases} 2^x, & -1 \le x < 1, \\ 1, & x = 1, \\ x-1, & 1 < x \le 4. \end{cases}$

   Б) $y = \begin{cases} -x, & x \le -1, \\ \frac{2}{x-1}, & x > -1. \end{cases}$

   В) $f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$.

   Г) $f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{x^{2n+1}+1}$.

4. Асимптоты графика функции.

   А) $y = \frac{1}{1-x^2}$.

   Б) $y = \frac{x^2}{1+x}$.

   В) $y = xe\hat{}x$.

   Г) $y = \sqrt{x^2-4}$.

5. Доказать, что функция $f(x)$ равномерно непрерывна на множестве X.

   А) $f(x) = 2x - 1,\ X = R,$

   Б) $f(x) = x^2 + 1, \quad X = (-1; 2)$

   В) $f(x) = \sin(2x+1), \ X = R$

   Г) $f(x) = e^{\arcsin x}, \ X = [-1; 1]$.

6. Вычисление производных ([1] §13. №3-№167, №191-№193б №197, №201, №207, §15 № 1, №11, 14, 21).
7. Дифференциал функции ([1] §13 № 213-№215, §15 №9, №22).
8. Доказать, что корни производной многочлена $x(x-2)(x-3)(x-4)$ действительные, простые и лежат на интервалах $(0; 1), (1; 2), (2; 3), (3; 4)$.
9. Вычисление пределов с использованием правила Лопиталя ([1] §17 №1-№75).
10. Разложить по формуле Маклорена до $o(x^2)$ функцию $f(x) = \cos(\pi e^x)$.
11. Разложить по формуле Маклорена до $o(x^2)$ функцию $f(x) = e^{-x+cosx-1}$.
12. Разложить по формуле Маклорена до $o(x^2)$ функцию $f(x) = \ln(1+x+x^2)$.
13. Найти интервалы возрастания и убывания, точки максимума и минимума функции.

    А) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 12,$

    Б) $f(x) = \frac{x}{x^2+4},$

    В) $f(x) = (x-1)e^{3x},$

    Г) $f(x) = x + \sqrt{3-x}$.

14. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции.

А) $f(x) = x^4 - 12x^2 + 12x$,

Б) $f(x) = \frac{x^3}{x^2+12}$,

В) $f(x) = (x^2 + 1)e^x$,

Г) $f(x) = \sqrt[3]{x+3}$.

15. Доказать или опровергнуть утверждения.

- Если функция непрерывна в точке, то она в этой точке имеет производную.
- Если функция дифференцируема в точке, то она имеет в этой точке производную.
- Если функция имеет производную в некоторой точке, то она в этой точке дифференцируема.
- Если функция непрерывна в точке, то она ограничена в некоторой окрестности этой точки.
- Если функция дифференцируема в точке, то она в этой точке непрерывна.
- Если функция в каждой точке интервала $(a; b)$ имеет ограниченную производную, то функция равномерно непрерывна на этом интервале.
- Если функция $f(x)$ имеет, а функция $g(x)$ не имеет производной в некоторой точке x_0, то функция $f(x) + g(x)$ не имеет производной в этой точке.
- Если функции $f(x)$ и $g(x)$ не имеют производной в некоторой точке x_0, то и функция $f(x) + g(x)$ не имеет производной в этой точке.
- Если функция $f(x)$ имеет, а функция $g(x)$ не имеет производной в некоторой точке x_0, то функция $f(x) \cdot g(x)$ не имеет производной в этой точке.
- Если функции $f(x)$ и $g(x)$ не имеют производной в некоторой точке x_0, то и функция $f(x) \cdot g(x)$ не имеет производной в этой точке.
- Если функция $f(x)$ возрастает на интервале $(a; b)$, то ее производная $f'(x)$ так же возрастает на интервале $(a; b)$.

Список литературы

1. Л.Д. Кудрявцев и др. Сборник задач по математическому анализу. Том1. –Москва: ФИЗМАТЛИТ. 2003. (http://math.sfu-kras.ru/sites/default/files/kudr_zad_v1.pdf)
2. А.М.Кытманов и др. Математический анализ с элементами алгебры, геометрии и функционального анализа (учебное пособие) (http://math.sfu-kras.ru/sites/default/files/matananaliz2.pdf).

ОБРАЗЕЦ

ВАРИАНТ 0

1. Дать определение равномерно непрерывной функции на множестве E.
2. Доказать или опровергнуть утверждения:

А) Если функция непрерывна в точке, то она в этой точке имеет производную.

Б) Если функция непрерывна в точке, то она ограничена в некоторой окрестности этой точки.

3. Сформулировать и доказать теорему Кантора о равномерной непрерывности функции.

4. Указать множество точек, в которых непрерывна функция $f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$, найти ее точки разрыва, установить их род, нарисовать график функции.

5. Разложить по формуле Маклорена до $o(x^2)$ функцию $f(x) = \ln(1 + x + 2x^2)$

6. Найти асимптоты графика функции $y = \frac{1}{1-x^2}$.