Математический анализ (осенняя минисессия 2016-2017 уч.год)

Лектор Шипина Т.Н.

Теоретические разделы

1. Элементы теории множеств
2. Натуральные числа, индукция, бином Ньютона
3. Аксиоматика множества вещественных чисел
4. Ограниченные множества. Теорема о верхней грани. Принцип Архимеда.
5. Три принципа математического анализа: принцип Кантора о вложенных отрезках, принцип Больцано-Вейерштрасса, принцип Бореля-Лебега о покрытии.
6. Понятие функции. График функции. Обзор элементарных функций.
7. Последовательности. Предел последовательности и его свойства.
8. Теоремы о существовании предела последовательности: критерий Коши, теорема Вейерштрасса о существовании предела монотонной последовательности.
9. Подпоследовательности. Частичный предел последовательности. Верхний и нижний пределы.
10. Предел функции. Предел функции и арифметические операции. Предел функции и неравенства. Теоремы о существовании предела функции (критерий Коши, предел монотонной функции).
11. Первый и второй замечательные пределы.
12. Односторонние пределы функции. Асимптотическое поведение функций.

Из представленных разделов нужно знать все **определения и формулировки теорем.**

Теоремы с доказательствами

- Принцип Кантора о вложенных отрезках.
- Принцип Больцано-Вейерштрасса.
- Принцип Бореля-Лебега.
- Критерий Коши сходимости числовой последовательности.
- Теорема Вейерштрасса о сходимости монотонной последовательности.
- Критерий Коши существования предела функции.

Практические задания

1. Доказать, что при каждом $n \in N$ верно равенство $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{(n+1)n(2n+1)}{6}$.
2. Доказать, что при каждом $n \in N$ верно неравенство $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n+1} > 1$.
3. Доказать, что при каждом $n \in N$ выражение $6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}$ делится на 11.
4. Найти наибольший и наименьший элементы, точную верхнюю и точную нижнюю грани множеств

   А) $\left\{2 + \frac{(-1)^n}{3n}\right\},\ n \in N,$ Б) $\left\{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{5^k}\right\},\ n \in N.$
5. Доказать или опровергнуть утверждения.
   - Если множество X ограничено сверху, то оно имеет точную верхнюю грань.
   - Если множество X не содержит максимального элемента, то множество не имеет точной верхней грани.

- Если множество X ограничено снизу, то оно имеет точную нижнюю грань.
- Если множество X не содержит минимального элемента, то множество не имеет точной нижней грани.
- Если точная верхняя грань множества X существует, то она всегда является предельной точкой множества X.

6. Доказать , что $\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n+1}=0$.
7. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ расходится, если:
   А) $x_n=\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$, Б) $x_n=(1)^n\cdot n$.
8. Доказать , что $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{n}\right)^n=0$.
9. Доказать , что $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1, a>1$.
10. Доказать , что $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1, a>1$.
11. Доказать , что $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0, a>1$.
12. Доказать , что $\lim_{n\to\infty}(n+5)=+\infty$.
13. Задания на вычисления пределов числовых последовательностей из задачника [1] (§8. №26, №34-36, №39, №53, №57, №58, №66, №68)
14. Доказать, что последовательность $x_n=a+a\cdot q+a\cdot q^2+\cdots+aq^{n-1}$, где $|q|<1$, $n\in N$. является фундаментальной.
15. Для последовательности $\{x_n\}$ найти все частичные пределы, верхний и нижний пределы, $\sup\{x_n\}$, $\inf\{x_n\}$.
   А) $x_n=(-1)^n\cdot\frac{3n-1}{n+2}$, Б) $x_n=\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)$, В) $x_n=3^{(-1)^n}$.

16. Доказать или опровергнуть утверждения.
    - Если последовательность $\{x_n\}$ сходиться, то она ограничена.
    - Если последовательность $\{x_n\}$ ограничена, то она сходиться.
    - Если последовательность $\{x_n\}$ ограничена, а последовательность $y_n\to 0$ при $n\to\infty$, то $x_n\cdot y_n\to 0$ при $n\to\infty$.
    - Если последовательность $x_n\to 0$, при $n\to\infty$, и последовательность $y_n\to 0$, при $n\to\infty$, то $\frac{x_n}{y_n}\to 0$, при $n\to\infty$.
    - Если последовательность $x_n\to 0$, при $n\to\infty$, и последовательность $y_n\to 0$, при $n\to\infty$, то $\frac{x_n}{y_n}\to\infty$, при $n\to\infty$.

17. Доказать, что $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+1}{2}=1$.
18. Задания на вычисления пределов функций из задачника [1] (§9 № 20-32)

Список литературы

1. Л.Д. Кудрявцев и др. Сборник задач по математическому анализу. Том1. –Москва: ФИЗМАТЛИТ. 2003. (http://math.sfu-kras.ru/sites/default/files/kudr_zad_v1.pdf)

2. А.М.Кытманов и др. Математический анализ с элементами алгебры, геометрии и функционального анализа (учебное пособие) (http://math.sfu-kras.ru/sites/default/files/matananaliz2.pdf).

ОБРАЗЕЦ

ВАРИАНТ 0

1. Дать определение ограниченного множества.
2. Доказать или опровергнуть утверждения:

А) Если последовательность $\{x_n\}$ ограничена, то она сходиться.

Б) Если множество X не содержит максимального элемента, то множество не имеет точной верхней грани.

3. Сформулировать и доказать принцип Кантора о вложенных отрезках.

4. Найти $\lim_{n\to\infty} x_n$.

А) $x_n = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$, Б) $x_n = \frac{\sqrt{n^2+1} - n}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$.

5. Доказать по определению $\lim_{x\to 1}(x^2+1) = 2$.