Дисциплина «Методы решения краевых задач»

Экзаменационные вопросы

1. Свойства гармонических функций.
2. Интеграл Пуассона и его свойства.
3. Пусть $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Доказать, если $\Delta u \geq 0$ в Ω, тогда $u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u$.
4. Пусть $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Доказать, если $\Delta u \leq 0$ в Ω, тогда $u(x) \geq \min_{\partial\Omega} u$.
5. Доказать, если гармоническая в Ω функция $u(x)$ $(u(x) \in C\,\overline{\Omega})$, то максимальное и минимальное значения функция $u(x)$ достигается на $\partial\Omega$.
6. Доказать теорему единственности классического решения первой краевой задачи для уравнения Пуассона.
7. Пусть $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ Единственно ли классическое решение второй краевой задачи для уравнения Лапласа?
8. Теорема сходимости метода слабой аппроксимации.
9. Примеры обратных задач.
10. Определение корректной задачи.
11. Примеры некорректно поставленных задач

Экзаменационные задачи

1. Пусть функция $\mathrm{u}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2)$ – гармоническая. Выяснить является ли гармонической функция $\mathrm{v}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2) = \mathrm{x}_1 \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}_1} - \mathrm{x}_1 \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}_2}$.
2. Пусть $\Omega = \{(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathrm{R}^2 | 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$, $\mathrm{u}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathrm{C}^2(\overline{\Omega})$,
3. $$\Delta \mathrm{u} = 0, \ (\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \Omega,$$ $$\mathrm{u}|_{\mathrm{y}=0} = \mathrm{u}|_{\mathrm{y}=1} = 0, 0 \leq \mathrm{x} \leq 1.$$
4. Может ли функция $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \int_0^1 \mathrm{u}^2(\mathrm{x}, \mathrm{y}), \mathrm{dy}$ иметь точку перегиба внутри интервала $(0{,}1)$?
5. Найти функцию гармоническую внутри единичного круга такую, что $\mathrm{u}|_{\mathrm{r}=1} = \cos^2 \varphi$.
6. Пусть Ω – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^1. В $\overline{\Omega}$ рассматривается краевая задача

$$\Delta \mathrm{u} - \mathrm{u} = 1, \qquad \mathrm{x} \in \Omega,$$
$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{n}}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \qquad \mathrm{x} \in \partial\Omega.$$

7. Дать определение классического решения задачи. Может ли классическое решение краевой задачи быть строго положительным в $\overline{\Omega}$.
8. При каких значениях k существует решение задачи

$$\Delta u = k(x^2 + y^2), \qquad (x,y) \in \Omega,$$
$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = x^2 y, \qquad (x,y) \in \partial\Omega,$$

где $\Omega = \{x^2 + y^2 < 16\}$.

9. В полосе $\Pi_{[0;T]} = \{(t,x) | 0 \leq t \leq T, x \in E_1\}$ рассматривается задача нахождения действительнозначных функций {u(t,x), b(t)}.

$$u_t = u_{xx} + b(t)u + f(t,x),$$

$$u(0,x) = u_0(x), \ \ x \in E_1$$
$$u(t,0) = \beta(t), \qquad 0 \leq t \leq T.$$

1. Привести обратную задачу к прямой задаче для нагруженного уравнения. Сформулировать определение решения прямой задачи.

2. Сформулировать условия согласования на входные данные обратной задачи.

3. Доказать, что обратная задача имеет единственное решение

$$u(t,x) \in C^{1,4}(\Pi_{[0,T]}), b(t) \in C([0,T]).$$

10. Пусть функция $u(x) \in C^2(\Omega) \cup C(\overline{\Omega})$ удовлетворяет задаче

$$\Delta u = x^2 + y^2, \qquad (x,y) \in \Omega,$$
$$u|_{\partial\Omega} = \varphi(x,y), \qquad (x,y) \in \partial\Omega.$$

Пусть функции $u_k(x) \in C^2(\Omega) \ \cap \ C(\overline{\Omega})$ удовлетворяют задачам

$$\Delta u_k = x^2 + y^2 + \frac{\sin(x+y)}{k}, \ (x,y) \in \Omega,$$
$$u_k|_{\partial\Omega} = \varphi(x), \ (x,y) \in \partial\Omega.$$

Доказать, что $\left|\left|u_{x_i} - (u^k)_{x_i}\right|\right|_{L(\Omega)} \to 0, k \to \infty.$

11. Найти значения константы a, при которых для решения задачи

$$\Delta u = 0, \qquad (x, y) \in \Omega,$$
$$\frac{\partial u}{\partial n} + au|_{\partial\Omega} = x^2(y+1), \qquad (x, y) \in \partial\Omega.$$

в $\Omega = \{x^2 + y^2 < 4\}$ верно неравенство $|u(x, y)| \le 2$. Дать определение классического решения задачи.

12. Пусть функция $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ удовлетворяет задаче
$$\Delta u = 0, \qquad (x, y) \in \Omega,$$
$$\frac{\partial u}{\partial n} + au|_{\partial\Omega} = \varphi(x, y), \qquad (x, y) \in \partial\Omega.$$

Пусть функции $u_k(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ удовлетворяют задачам
$$\Delta u_k = 0\,, \quad (x, y) \in \Omega,$$
$$\frac{\partial u}{\partial n} + au|_{\partial\Omega} = \varphi(x, y) + \frac{x^2 + y}{k}, \quad (x, y) \in \partial\Omega.$$
Считая, что $\Omega = \{x^2 + y^2 < R^2\}$, доказать, что $\lim_{k\to\infty} u_k = u$.

13. Пусть Ω – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^1. В $\overline{\Omega}$ рассматривается краевая задача
$$\Delta u - u = 1, \qquad x \in \Omega,$$
$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0, \qquad x \in \partial\Omega.$$
Дать определение классического решения задачи. Может ли классическое решение краевой задачи быть строго положительным в $\overline{\Omega}$.

ОБРАЗЕЦ ЭКЗАМЕНАЦИОННОГО БИЛЕТА

Экзаменационный билет 1

1. Дать определение метода слабой аппроксимации. Сформулировать и доказать теорему метода слабой аппроксимации. *(40 баллов)*
2. В полосе $\Pi_{[0;T]} = \{(t, x) | 0 \le t \le T, x \in E_1\}$ рассматривается задача нахождения действительнозначных функций {u(t,x), b(t)}.
$$u_t = u_{xx} + b(t)u + f(t, x),$$
$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in E_1$$
$$u(t, 0) = \beta(t), \qquad 0 \le t \le T.$$

Доказать, что обратная задача имеет единственное решение в классе

$u(t,x) \in C^{1,4}\left(\Pi_{[0,T]}\right), b(t) \in C([0,T])$. *(20 баллов)*

3. Пусть функция $u(x_1, x_2)$ – гармоническая. Выяснить является ли гармонической функция $v(x_1, x_2) = x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial u}{\partial x_2}$. *(20 баллов)*