Структура билета

Билет состоит из 6 вопросов.

1. Дать определение или сформулировать теорему / утверждение
2. Сформулировать и доказать теорему / утверждение
3. Доказать одну из теорем исчисления высказываний
4. Задание на тему «Исчисление предикатов»
5. Задание на тему «Рекурсивные функции»
6. Задание на тему «Машина Тьюринга»

Список определений и теорем, приводимых без доказательства

1. Исчисление предикатов
2. Интерпретация теории
3. Выполнимая формула
4. Тождественно истинная формула в интерпретации
5. Общезначимая формула
6. Ослабленная теорема о дедукции для исчисления предикатов
7. Теорема Гёделя о полноте
8. Частичная арифметическая функция (ЧАФ)
9. Схема композиции ЧАФ
10. Схема примитивной рекурсии для ЧАФ
11. Кусочная схема задания ЧАФ
12. Схема минимизации для ЧАФ
13. Схема возвратной рекурсии
14. Примитивно рекурсивная функция, частичная рекурсивная функция
15. Общерекурсивная функция
16. Машина Тьюринга
17. Вычисление машиной Тьюринга частичной арифметической функции
18. Взаимно однозначная нумерация машин Тьюринга
19. Применимость машин Тьюринга
20. Самоприменимая машина Тьюринга
21. Тезис Тьюринга
22. Тезис Черча

Теоремы исчисления высказываний

Задание №3 является теоретическим. Для доказательства можно использовать аксиомы:

A1 $A \to (B \to A)$

A2 $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

A3 $(\overline{B} \to A) \to ((\overline{B} \to \overline{A}) \to B)$

и правило вывода Modus Ponens. При доказательстве каждой теоремы можно использовать теоремы с меньшими номерами:

1) $\overline{\overline{A}} \to A$ 2) $A \to \overline{\overline{A}}$ 3) $\overline{A} \to (A \to B)$ 4) $(\overline{B} \to \overline{A}) \to (A \to B)$ 5) $(A \to B) \to (\overline{B} \to \overline{A})$

6) $(A \to B) \to ((\overline{A} \to B) \to B)$ 7) $A \to (\overline{B} \to \overline{A \to B})$

Список теорем/утверждений

1. Примитивная рекурсивность арифметических функций: +(*a*, *b*) = *a* + *b*; *(*a*, *b*) = *ab;*

$\wedge(a,b)=a^b$; $\dot{-}(a,b)=\begin{cases} a-b, & \text{если } a>b, \\ 0, & \text{если } a\leqslant b; \end{cases}$ $sg(x)=\begin{cases} 1, & \text{если } x=0, \\ 0 & \text{иначе}; \end{cases}$ $\overline{sg}(x)=1-sg(x)$;

4. Частичная рекурсивность функций: – (a, b) = a – b; $\operatorname{div}(a,b)=\lfloor a/b \rfloor$; нигде не определенная функция w(x)

5. Теорема о примитивной рекурсивности суммы.

6. Теорема о примитивной рекурсивности произведения.

7. Теорема о мажорировании неявной функции.

8. Теорема о примитивной рекурсивности кусочно заданной функции.

9. Примитивная рекурсивность функций: $\widetilde{\operatorname{div}}(x,y)=\begin{cases} 0, & \text{если } y=0, \\ [x/y], & \text{если } y>0; \end{cases}$

$\widetilde{\operatorname{mod}}(x,y)=\begin{cases} 0, & \text{если } y=0, \\ x \bmod y & \text{при } y>0; \end{cases}$ (здесь *x* mod *y* – остаток от деления *x* на *y*);

$|(x,y)=\begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ делится на } y, \\ 0 & \text{в противном случае}; \end{cases}$ $\chi_p(x)=\begin{cases} 1, & \text{если } x-\text{простое число}, \\ 0 & \text{в противном случае}; \end{cases}$ $n_p(x)$ – число простых чисел p в пределах $0 < p \le x$; $p(n)$ – n-е простое число; ex(n, y) – максимальный показатель e степени $p(n)^e$, на которую делится число y.

10. Теорема о схеме возвратной рекурсии.

11. Теорема о самоприменимости машин Тьюринга.

12. Теорема о неразрешимости исчисления предикатов

Примеры заданий на тему “Исчисление предикатов”

1) Является ли формулой исчисления предикатов следующее слово в алфавите исчисления предикатов? Ответ обосновать.

а) $\neg(\forall x(A(x))) \to \exists y(\neg A(y))$, где A — предикатный символ;

б) $\neg(\forall x\, A(x)) \to \exists y(\neg A(x,y))$, где A — предикатный символ;

в) $\neg(\forall x(A(y))) \to \exists y(\neg A(y))$, где A — одноместный предикатный символ.

2) Перечислить свободные и связанные переменные в формуле. Для связанных переменных указать область действия квантора.

$\exists y(\forall x\, A(x,y,z) \to B(y)) \to \exists t\, B(z,t)$

3) Доказать выводимость формулы исчисления предикатов:

а) $\forall x(\forall y(A(x,y))) \to \forall y(\forall x(A(x,y)))$;

б) $\exists x(\exists y(A(x,y))) \to \exists y(\exists x(A(x,y)))$;

в) $\exists x(\forall y(A(x,y))) \to \forall y(\exists x(A(x,y)))$;

г) $\neg(\forall x(\neg A(x)) \rightarrow A(y))$.

4) Для следующего утверждения на естественном языке составить формулу исчисления предикатов и привести интерпретацию, в которой составленная формула равносильно утверждению

а) Не существует максимального натурального числа

б) Наименьшее значение функции f(x) всегда больше наибольшего значения функции g(x)

в) Минимальное значение функции f(x) всегда больше максимального значения функции g(x)

г) Не существует максимального простого числа

д) Существует последовательность $a\,n + b$ простых чисел произвольной конечной длины

е) Любое четное натуральное число можно представить как сумму ровно двух простых чисел

Примеры заданий на тему “Рекурсивные функции”

1) Доказать примитивную рекурсивность функций:

а) $f(x,y)=\begin{cases} 0 & \text{при } x+y>2; \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$

б) $f(x,y)=\begin{cases} 0 & \text{при } (x+1)\cdot y>5; \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$

в) $f(x,y)=\begin{cases} 0 & \text{при } x>2 \text{ и } y>3; \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$

г) $f(x) = x!$

д) $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(n + 2) = f(n + 1) + f([(n + 2)/2])$;

е) $f(x, y) = \min(x, y)$;

ж) $f(x, y) = \max(x, y)$;

з) $f(x, y) = | x - y |$;

и) $\varphi(x)$ — количество натуральных чисел, меньших x, взаимно простых с x.

2) Доказать частичную рекурсивность функций:

а) Нигде не определённая функция $w(x_1,..., x_n)$;

б) $f(x) = x - 5$;

в) $f(x) = [2 / x]$;

г) $f(x)$, не определённая при $x > 5$, и равная x для $x \le 5$;

Примеры задач по теме “Машина Тьюринга”

1. Пусть на ленте записана конфигурация: $...000\underbrace{111...1}_{n_1 \text{единиц}}0\underbrace{111...1}_{n_2 \text{единиц}}0...0\underbrace{111...1}_{n_s \text{единиц}}000...$.

Написать машину Тьюринга, стартующую в состоянии q1 с крайней левой единицы, заменяющую все 1 на 0 и останавливающуюся на крайнем правом нуле

3. Построить машину Тьюринга, корректно вычисляющую функции:

а) $f(x) = x + 1$;

б) $f(x) = x + 3$;

в) $f(x) = x - 3$, если $x > 2$, или 0, если $x < 3$;

г) $f(x, y) = x + y$;

д) $f(x) = x \bmod 2$;

е) $f(x) = \text{НОД}\ (x, 2)$;

4. Построить протокол работы машины Тьюринга, созданной для задания 3.