

Аналитическая геометрия, вопросы и задачи группам 01-03 к экзамену в  
январе 2016

1. Операции сложения векторов и умножения вектора на число, их свойства.
2. Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов. Признак коллинеарности и компланарности векторов.
3. Линейная зависимость четырёх векторов. Базис совокупности векторов на прямой, на плоскости и в пространстве. Координаты вектора. Как найти координаты суммы векторов и вектора, умноженного на число?
4. Деление отрезка в данном отношении. Системы координат на плоскости и в пространстве. Золотое сечение.
5. Основные инварианты параллельного проектирования. Как задать параллельную проекцию плоской фигуры?
6. Основные свойства числовых проекций вектора на вектор.
7. Скалярное произведение и его основные свойства.
8. Векторное произведение. Свойства векторного произведения.
9. Тождество Якоби.
10. Вычисление векторного и смешанного произведений по координатам сомножителей.
11. Замена декартовой системы координат.
12. Уравнения линий и поверхностей. Поверхность вращения, цилиндр, конус. Инвариантность порядка алгебраической линии при замене декартовой системы координат.
13. Параметрические уравнения прямых на плоскости и в пространстве. Уравнения прямой на плоскости. Расстояние от точки до прямой.
14. Уравнения плоскости. Расстояние от точки до плоскости. Угол между вектором и плоскостью.
15. Уравнения прямых в пространстве. Расстояние между скрещивающимися прямыми.
16. Конические сечения. Геометрический смысл эксцентриситета. Эллипс. Построение проекций параллелей и меридиан сферы.
17. Уравнения конических сечений в полярных координатах.
18. Вывод декартовых уравнений конических сечений из: а) их уравнений в полярных координатах или б) построения сфер, касающихся плоскости сечения и всех образующих конуса.
19. Классификация кривых второго порядка.
20. Построение сечений плоскостью поверхности второго порядка. Эллипсоид.
21. Гиперболоид двуполостный. Прямолинейные образующие однополостного гиперболоида.
22. Эллиптический параболоид. Прямолинейные образующие гиперболического параболоида.
23. Цилиндры и конусы второго порядка. Построение параллельных проекций конических сечений.
24. Аффинные преобразования плоскости. Ортогональные преобразования.
25. Переход от одного ортонормированного базиса к другому с помощью ортогональной матрицы. Представимость ортогонального преобразования композицией поворота, симметрии и параллельного переноса.

26. Приведение квадратичной формы к каноническому виду.  
27. Классификация поверхностей второго порядка. Схема доказательства. Построение проекций пересечений с плоскостями конического сечения.

28. Аксиоматика Гильберта и обоснование метода координат.

Задачи:

1. Доказать утверждения: 1) конечная система векторов, содержащая нулевой вектор, линейно зависима; 2) конечная система векторов, содержащая два равных вектора, линейно зависима.

2. Доказать, что для любых трех векторов  $a, b, c$  и любых трех чисел  $\alpha, \beta, \gamma$  векторы  $\alpha a - \beta b, \gamma b - \alpha c, \beta c - \gamma a$  линейно зависимы.

3. Даны векторы  $a(3, 2), b(5, -1), c(-1, 3)$ . Найти координаты векторов  $2a + 5b - c, 6a + 5b - 9c$ .

4. Даны три вектора  $a(1, 3), b(-2, 1), c(-4, 1)$ . Найти числа  $\alpha$  и  $\beta$  такие, что  $\alpha a + \beta b + c = 0$ .

5. Проверить, что векторы  $a(-5, -1)$  и  $b(-1, 3)$  образуют базис на плоскости. Найти координаты векторов  $c(-1, 2)$  и  $d(-2, 6)$  в этом базисе.

6. В трапеции  $ABCD$  длины оснований  $AD$  и  $BC$  относятся как 3:2. Принимая за базисные векторы  $\overline{AC}$  и  $\overline{BD}$ , найти в этом базисе координаты векторов  $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$ .

7. В трапеции  $ABCD$  длины оснований  $AD$  и  $BC$  относятся как 3:1.  $O$  — точка пересечения диагоналей трапеции,  $S$  — точка пересечения продолжений боковых сторон. Принимая за базисные векторы  $\overline{AD}$  и  $\overline{AB}$ , найти координаты векторов  $\overline{AC}, \overline{AO}, \overline{AS}$ .

8. В трапеции задачи 7 точка  $M$  — середина стороны  $CD$ . Найти координаты вектора  $\overline{AD}$  в базисе  $\overline{OS}, \overline{OM}$ .

9. В тетраэдре  $OABC$  точки  $K, L, M, N, P, Q$  — середины ребер  $OA, OB, OC, AB, AC, BC$  соответственно,  $S$  — точка пересечения медиан треугольника  $ABC$ . Принимая за базисные векторы  $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}$ . найти в этом базисе координаты:

- 1) векторов  $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC}$ ;
- 2) векторов  $\overline{KL}, \overline{PQ}, \overline{CN}, \overline{MP}, \overline{KQ}$ ;
- 3) векторов  $\overline{OS}$  и  $\overline{KS}$ .

10. Даны три точки  $O, A, B$ , не лежащие на одной прямой. Принимая за базисные векторы  $\overline{OA}$  и  $\overline{OB}$ , найти:

1) координаты вектора  $\overline{OM}$ , если точка  $M$  лежит на отрезке  $AB$  и  $AM : BM = m : n$ ;

2) координаты вектора  $\overline{ON}$ , если точка  $N$  лежит на прямой  $AB$  вне отрезка  $AB$  и  $AN : BN = m : n$ .

11. В треугольнике  $ABC$  проведена биссектриса  $AD$ . Найти координаты вектора  $\overline{AD}$  в базисе, образованном векторами  $\overline{AB}$  и  $\overline{AC}$ .

12. Доказать, что средняя линия трапеции параллельна основаниям, а длина средней линии равна полусумме длин оснований (теорема о средней линии трапеции).

13. Теорема, обратная теореме о средней линии трапеции. Точки  $E$  и  $F$  являются серединами сторон  $AB$  и  $CD$  четырехугольника  $ABCD$  (на плоскости или в пространстве). Доказать, что если  $|EF| = (|BC| + |AD|)/2$ , то  $ABCD$  — трапеция.

14. Найти расстояние между точками  $A$  и  $B$ , заданными своими координатами:

- 1)  $A(-2, 3, 1), B(3, 2, 8)$ , 2)  $A(-2, 4, 3), B(1, -5, 2)$ ,  
 3)  $A(4, 4, -3), B(2, -1, 3)$ , 4)  $A(-1, -1, 1), B(7, -5, 2)$ .
15. Доказать, что векторы  $a$  и  $b(a, c) - c(a, b)$  взаимно перпендикулярны.
16. Пусть  $M$  — точка пересечения медиан треугольника  $ABC$ . Доказать, что  $|AM|^2 + |BM|^2 + |CM|^2 = (|AB|^2 + |BC|^2 + |AC|^2)/3$ .
17. Доказать, что векторное произведение не изменится, если к одному из сомножителей прибавить вектор, коллинеарный другому сомножителю.
18. На векторах  $a(2, 1, 3)$  и  $b(-1, 2, 1)$ , отложенных из одной точки, построен треугольник. Найти:
- 1) площадь этого треугольника;
  - 2) длины трех его высот.
19. Доказать, что площадь выпуклого четырехугольника  $ABCD$  равна половине длины векторного произведения  $[AC, BD]$ .
20. Доказать, что сумма векторов, перпендикулярных к граням произвольного тетраэдра, равных по длине площадям этих граней и направленных в сторону вершин, противоположащих этим граням, равна нулю.
21. Объяснить геометрический смысл всех решений векторного уравнения  $[x, a] = b$ .
22. Три некопланарных вектора  $a, b, c$  отложены из одной точки. Найти:
- 1) объем треугольной призмы, основание которой построено на векторах  $a$  и  $b$ , а боковое ребро совпадает с вектором  $c$ ;
  - 2) объем тетраэдра, построенного на векторах  $a, b, c$ .
23. Доказать, что любая плоскость, проходящая через середины двух скрепляющихся ребер произвольного тетраэдра, делит этот тетраэдр на две одинаковые по объему части.
24. В пространстве даны два базиса  $e_1, e_2, e_3$  и  $e'_1, e'_2, e'_3$ . Векторы второго базиса имеют в первом базисе координаты  $(1, 1, 1), (-1, -2, -3), (1, 3, 6)$  соответственно.
- 1) Найти координаты вектора в первом базисе, если известны его координаты  $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3$  во втором базисе.
  - 2) Найти координаты вектора во втором базисе, если известны его координаты  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  в первом базисе.
  - 3) Найти координаты векторов  $e_1, e_2, e_3$  во втором базисе.
25. Найти координаты точки в системе координат  $O(2, -1), e_1(1, 5), e_2(-1, 4)$  на плоскости, если известны ее координаты  $x', y'$  в системе координат  $O'(3, 2), e'_1(1, -1), e'_2(4, 2)$ .
26. В тетраэдре  $ABCD$  точка  $M$  — точка пересечения медиан грани  $B CD$ . Найти координаты точки пространства в системе координат  $A, \overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ , если известны ее координаты  $x', y', z'$  в системе координат  $M, \overline{MB}, \overline{MC}, \overline{MA}$ .
27. При каком необходимом и достаточном условии прямые  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}_1 t$  и  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{a}_2 t$ :
- 1) пересекаются в единственной точке;
  - 2) параллельны, но не совпадают;
  - 3) совпадают?
28. Найти угол между прямыми, заданными своими уравнениями  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}_1 t$  и  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{a}_2 t$ .
29. Даны точка  $M_0$  с радиус-вектором  $\mathbf{r}_0$  и прямая  $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D$ . Найти радиус-векторы:
- 1) проекции точки  $M_0$  на прямую;
  - 2) точки  $M_1$ , симметричной с  $M_0$  относительно данной прямой.

30. 1) Записать уравнение прямой  $x = 2 + 3t$ ,  $y = 3 + 2t$  в виде  $Ax + By + C = 0$ . 2) Записать уравнение прямой  $3x - 4y + 4 = 0$  в параметрической и канонической формах. 3) Найти угловой коэффициент прямой  $x = 2 + 3t$ ,  $y = 3 + 2t$ .

31. При каких  $a$  прямые  $ax - 4y = 6$  и  $xy = 3$ : 1) пересекаются; 2) параллельны; 3) совпадают?

32. Две медианы треугольника лежат на прямых  $x + y = 3$  и  $2x + 3y = 1$ , а точка  $A(1, 1)$  является вершиной треугольника. Составить уравнения сторон треугольника.

33. Составить уравнения прямых, проходящих через точку  $A(-1, 5)$  и равноудаленных от двух точек  $B(3, 7)$  и  $C(-5, -5)$ .

34. Через вершину  $C$  параллелограмма  $ABCD$  проведена прямая, пересекающая продолжения сторон  $AB$  и  $AD$  соответственно в точках  $K$  и  $L$  таких, что  $|AK|/|AB| = 5|AL|/|AD|$ . Найти отношение площади параллелограмма к площади треугольника  $AKL$ .

35. Длина стороны ромба с острым углом  $60^\circ$  равна 2. Диагонали ромба пересекаются в точке  $M(1, 2)$ , причём большая диагональ параллельна оси абсцисс. Составить уравнения сторон ромба.

36. Составить уравнения прямых, параллельных прямой  $-2x + y + 5 = 0$  и отстоящих от точки  $A(1, -2)$  на расстояние  $\sqrt{20}$ .

37. Даны координаты двух вершин треугольника  $A(1, 3)$ ,  $B(2, 5)$  и точки пересечения его высот  $H(1, 4)$ . Найти координаты третьей вершины треугольника и составить уравнения его сторон.

38. В параллелограмме  $ABCD$  точки  $K(-1, 2)$ ,  $L(3, 4)$  и  $M(5, 6)$  — середины сторон соответственно  $AB$ ,  $BC$  и  $CD$ . Составить уравнение прямой  $BC$ . Найти угол между прямыми  $AL$  и  $AM$ .

39. Составить уравнение биссектрисы острого угла между прямыми  $x - 7y = 1$  и  $x + y = -7$ .

40. На плоскости даны три точки  $A(2, 3)$ ,  $B(1, 4)$ ,  $C(-1, 2)$  и прямая  $x - 5y + 7 = 0$ . Составить уравнение этой прямой в новой системе координат  $A$ ,  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$ .

41. В прямоугольной системе координат  $O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  прямая задана уравнением  $\sqrt{3}x + 2y - 6 = 0$ . Начало новой прямоугольной системы координат находится в точке  $O'(-2, 3)$ , а базисные векторы  $\mathbf{e}'_1$  и  $\mathbf{e}'_2$  получаются из векторов  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$  соответственно поворотом на угол  $30^\circ$  в направлении кратчайшего поворота от  $\mathbf{e}_1$  к  $\mathbf{e}_2$ . Составить уравнение данной прямой в системе координат  $O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$ .

42. Найти необходимое и достаточное условие, при котором прямые  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}_1 t$  и  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{a}_2 t$ : 1) пересекаются (т.е. имеют единственную общую точку); 2) скрещиваются; 3) параллельны, но не совпадают; 4) совпадают.

42. Найти расстояние:

1) от точки  $M_0(\mathbf{r}_0)$  до плоскости  $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D$ ;

2) между двумя параллельными плоскостями  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}u + \mathbf{b}v$  и  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{a}u + \mathbf{b}v$ ;

3) между двумя параллельными плоскостями  $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D_1$  и  $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D_2$ ;

4) от точки  $M_0(\mathbf{r}_0)$  до прямой  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}_1 t$ ;

5) от точки  $M_0(\mathbf{r}_0)$  до прямой  $[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \mathbf{b}$ ;

6) между двумя параллельными прямыми  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}t$  и  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{a}t$ ;

7) между двумя параллельными прямыми  $[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \mathbf{b}_1$  и  $[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \mathbf{b}_2$ ;

8) между двумя скрещивающимися прямыми  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}_1 t$  и  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{a}_2 t$ ;

- 9) между двумя скрещивающимися прямыми  $[\mathbf{r}, \mathbf{a}_1] = \mathbf{b}_1$  и  $[\mathbf{r}, \mathbf{a}_2] = \mathbf{b}_2$ .
43. 1) Записать уравнения прямой  $x = 2 + 3t, y = 3 - t, z = 1 + t$  в виде пересечения двух плоскостей и в канонической форме. 2) Записать уравнения прямой  $x - y + 2z + 4 = 0, -2x + y + z + 3 = 0$  в параметрической и канонической форме.
44. Составить уравнения прямой, проходящей через две данные точки: 1)  $A(3, 2, 5)$  и  $B(4, 1, 5)$ ; 2)  $A(-1, 1, 2)$  и  $B(5, 1, 2)$ .
45. Составить уравнение плоскости, проходящей через три данные точки (если эти точки определяют плоскость):
- 1)  $A(2, 1, 3), B(-1, 2, 5), C(3, 0, 1)$ ;
  - 2)  $A(1, -1, 3), B(2, 3, 4), C(-1, 1, 2)$ ;
  - 3)  $A(3, 0, 0), B(0, -1, 0), C(0, 0, 4)$ ;
  - 4)  $A(2, 1, 1), B(2, 0, -1), C(2, 4, 3)$ ;
  - 5)  $A(1, 1, 2), B(2, 3, 3), C(-1, -3, 0)$ .
46. При каких  $a$  плоскости  $x + ay + z - 1 = 0$  и  $ax + 9y + \frac{a^3}{9}z + 3 = 0$ : 1) пересекаются; 2) параллельны; 3) совпадают?
47. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку  $A(1, 3, 0)$  и параллельной прямым  $x + y - z + 3 = 0, 2x - y + 5z + 1 = 0$  и  $y - x = 1, 5x + y - z + 2 = 0$ .
48. Вершинами треугольника являются точки  $A(1, 2, 3), B(1, 5, -1), C(5, 3, -5)$ . Найти радиусы и координаты центров вписанной и описанной окружностей.
49. В основании прямой призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  лежит ромб  $ABCD$  с углом  $\angle A = 60^\circ$ . Длина стороны основания призмы равна  $a$ , длина бокового ребра равна  $a\sqrt{3}$ . Точка  $E$  является ортогональной проекцией вершины  $C_1$  на плоскость  $AB_1 D_1$ , а точка  $F$  — ортогональной проекцией точки  $E$  на плоскость  $AA_1 D_1 D$ . Найти объем пирамиды  $ADEF$ .
50. Плоскости  $x - 2y + 3z - 6 = 0, 2x + y - z = 0, 4x + z - 5 = 0$  являются соответственно плоскостями  $O'y'z', O'z'x', O'x'y'$  новой системы координат, а точка  $A(2, 0, 1)$  имеет в новой системе координаты  $1, 1, 1$ .
- 1) Найти координаты точки в исходной системе координат, если известны ее координаты  $x', y', z'$  в новой системе.
  - 2) Составить в новой системе координат канонические уравнения прямой, которая в исходной системе задается уравнениями  $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z-2}{-1}$ .
51. Составить уравнение окружности с центром в точке  $M(2, 2)$ , касающейся прямой  $3x + y - 18 = 0$ .
52. Доказать, что множеством точек  $M$  таких, что для двух фиксированных точек  $A$  и  $B$  модуль разности  $|MA| - |MB|$  постоянен и равен  $2a$ , является гипербола с фокусами  $A$  и  $B$ . Выразить полуоси этой гиперболы через  $a$  и длину отрезка  $AB$ .
53. Изобразить множество точек, которое в полярных координатах задается уравнением: 1)  $r = 1$ ; 2)  $r = \frac{1}{1-2\cos\phi}$ ; 3)  $r = \frac{3}{2-\cos\phi}$ ; 4)  $r = \frac{1}{\sin^2(\phi/2)}$ .
54. Вычислить эксцентриситет эллипса, если:
- 1) расстояние между фокусами равно среднему арифметическому длин осей;
  - 2) отрезок между фокусом и дальней вершиной большой оси делится вторым фокусом в отношении 2:1;
  - 3) расстояние от фокуса до дальней вершины большой оси в 1,5 раза больше расстояния до вершины малой оси;

4) отрезок между фокусами виден из конца малой оси под прямым углом;

5) большая ось видна из конца малой оси под углом  $120^\circ$ ;

6) отрезок между фокусом и дальнейшей вершиной большой оси виден из конца малой оси под прямым углом.

55. Составить уравнения семейств эллипсов:

1) с общими фокусами  $(-c, 0)$ ,  $(c, 0)$ ;

2) с общими директрисами  $x = -d$ ,  $x = d$  и общим центром в начале координат.

56. Вычислить эксцентриситет гиперболы, если:

1) ее полуоси равны (равносторонняя гипербола);

2) угол между асимптотами, содержащий фокус, равен  $120^\circ$ ;

3) асимптотами гиперболы являются прямые  $y = -3x$ ,  $y = 3x$ .

57. Доказать, что для данной гиперболы следующие величины постоянны, и выразить их через полуоси  $a$ ,  $b$  гиперболы:

1) произведение расстояний от любой точки гиперболы до её асимптот;

2) площадь параллелограмма, одна из вершин которого лежит на гиперболе, а две стороны лежат на асимптотах.

58. Доказать, что середины хорд параболы, параллельных некоторой прямой, лежат на прямой, параллельной оси параболы.

59. Две параболы, оси которых взаимно перпендикулярны, имеют четыре точки пересечения. Доказать, что эти четыре точки лежат на одной окружности.

60. Найти наибольший радиус окружности, лежащей внутри параболы  $y^2 = 2px$  и касающейся этой параболы в ее вершине.

61. Составить уравнения касательных к эллипсу  $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{24} = 1$  :

1) параллельных прямой  $2x - y - 1 = 0$ ;

2) перпендикулярных этой же прямой.

62. Составить уравнения касательных к гиперболе  $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$ , параллельных прямой: 1)  $4x = 3y$ ; 2)  $x = 1$ ; 3)  $x - 2y + 1 = 0$ .

63. Составить уравнение касательной к параболе  $y^2 = 10x$ , перпендикулярной прямой: 1)  $2x + y - 4 = 0$ ; 2)  $3y$ ; 3)  $x = 0$ .

64. Из произвольной точки директрисы кривой второго порядка проведены две касательные к этой кривой. Доказать, что прямая, соединяющая точки касания, проходит через фокус, соответствующий этой директрисе.

65. Определить тип кривой второго порядка, составить её каноническое уравнение и найти каноническую систему координат:

1)  $xy + 2x + y = 0$ ,

2)  $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$ ,

3)  $5x^2 + 12xy + 10y^2 - 6x + 4y - 1 = 0$ ,

4)  $8x^2 + 34xy + 8y^2 + 18x - 18y - 17 = 0$ .

66. Доказать, что кривая второго порядка, заданная уравнением  $x^2 + 2xy + y^2 + x = 0$ , является параболой. Найти параметр этой параболы, координаты вершины и фокуса, составить уравнения оси и директрисы.

67. Доказать, что кривая второго порядка, заданная уравнением  $7x^2 + 48xy - 7y^2 - 62x - 34y + 98 = 0$ , является гиперболой. Найти длины полуосей и эксцентриситет этой гиперболы, координаты центра и фокусов, составить уравнения осей, директрис и асимптот.

68. Найти координаты центра поверхности, её полуоси и уравнения плоскостей симметрии, изобразить поверхность в исходной системе координат: 1)  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2x + 4y + 6z = 0$ ; 2)  $3x^2 + 2y^2 + z^2 + 6x + 4y + 2z - 6 = 0$ .

69. Найти координаты центра поверхности, уравнения оси вращения и горловой окружности, определить радиус горловой окружности, изобразить поверхность  $x^2 + 2yz = 1$ .

70. Ось  $Oz$  направлена вверх. Определить, лежит ли точка  $M(1, 1, 1)$  выше или ниже параболоида  $x^2 + 2y^2 = 2z$ .

71. Найти уравнение поверхности, получаемой вращением окружности  $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$  вокруг оси  $Oy$ .

72. Найти уравнения поверхностей, получаемых вращением гиперболы  $xy = 1$  вокруг асимптот.

73. Исключив параметры, получить алгебраическое уравнение поверхности  $x = U + \cos v$ ,  $y = u + \sin v$ ,  $z = u - \cos v - \sin v$ . Что это за поверхность?

74. 1) Сечения поверхности  $x^2 + 2y^2 - 3z^2 - 1 = 0$  плоскостями  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = 2$  спроектированы на плоскость  $Oyz$ . Изобразить проекции.

2) Сечения поверхности  $x^2 + 2y^2 - 3z^2 - 1 = 0$  плоскостями  $x = -1$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$  спроектированы на плоскость  $Oyz$ . Изобразить проекции.

3) Сечения поверхности  $2x^2 - y^2 = 2z$  плоскостями  $x = -1$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$  спроектированы на плоскость  $Oyz$ . Изобразить проекции.

4) Сечения поверхности  $2x^2 - y^2 = 2z$  плоскостями  $y = -1$ ,  $y = 0$ ,  $y = 1$  спроектированы на плоскость  $Oxz$ . Изобразить проекции.

5) Сечения поверхности  $2x^2 - y^2 = 2z$  плоскостями  $z = -1$ ,  $z = 0$ ,  $z = 1$  спроектированы на плоскость  $Oxy$ . Изобразить проекции.

75. Даны формулы перехода от системы координат  $O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  к системе  $O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$ . Записать формулы, задающие в системе координат  $O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  аффинное преобразование  $f$  такое, что  $f(O) = O', f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}'_1, f(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}'_2$ :

1)  $x = x' + y' - 2, y = 2x' - y' + 3$ ;

2)  $x = 3x' - 4y' - 5, y = 4x' + 3y' + 1$ .

76. Доказать, что линейное преобразование плоскости тогда и только тогда будет аффинным, когда образ каждого ненулевого вектора будет отличен от нуля.

77. Записать формулы, задающие произведения  $fg$  и  $gf$  данных аффинных преобразований (система координат общая декартова):  $f : x^* = y, y^* = x; g : x^* = 3x + 4y + 1, y^* = -7x + 5y - 2$ .

78. Записать формулы, задающие  $n$ -ю степень данного преобразования ( $n$  – натуральное число):

1)  $x \cos \alpha - y \sin \alpha, y^* = x \sin \alpha + y \cos \alpha$ ; 2)  $x^* = x + y, y^* = y$ .

79. Записать формулы, задающие преобразование, обратное к данному (система координат общая декартова), если такое преобразование существует.

1)  $x^* = y + 3, y^* = x + 3y - 1$ ; 2)  $x^* = 3x + 4y + 8, y^* = 5x + 7y + 6$ .

80. Доказать, что произведение поворота плоскости вокруг некоторой точки и параллельного переноса является поворотом вокруг некоторой другой точки.

ИМиФИ СФУ  
Кафедра алгебры и математической логики  
Аналитическая геометрия  
БИЛЕТ 13

1. Параметрические уравнения прямых на плоскости и в пространстве. Уравнения прямой на плоскости. Расстояние от точки до прямой.
2. Задача.