

Вопросы по АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

К устному экзамену 22 января 2016 г.

kiv@icm.krasn.ru

1. Вектор. Равенство векторов. Коллинеарные и компланарные векторы.
2. Линейные операции над векторами и их свойства.
3. Линейная комбинация векторов. Линейная независимость системы векторов. Необходимое и достаточное условие линейной зависимости системы векторов.
4. Геометрические критерии линейной зависимости.
5. Базис векторов прямой, плоскости и пространства. Координаты вектора в базисе. Координаты линейной комбинации векторов в базисе.
6. Декартова система координат на прямой, плоскости и в пространстве. Деление отрезка в данном отношении. Координаты точки, делящей отрезок пополам. Золотое сечение.
7. Декартовы прямоугольные системы координат. Полярные, цилиндрические и сферические системы координат. Их связь с прямоугольными координатами.
8. Числовая и векторная проекции вектора на направление и её свойства.
9. Скалярное произведение векторов и его свойства.
10. Ортонормированный базис. Выражение скалярного произведения через координаты данных векторов, угол между векторами. Условие ортогональности двух векторов.
11. Векторная проекция вектора на плоскость, ортогональную заданному направлению. Свойства векторной проекции.
12. Левая и правая пары и тройки векторов. Векторное произведение. Свойства векторного произведения.
13. Координаты векторного произведения в ортонормированном базисе. Выражение через векторное произведение условия коллинеарности векторов.
14. Тождество Якоби.
15. Смешанное произведение трёх векторов. Нахождение смешанного произведения векторов через их координаты в ортонормированном и произвольном базисе.
16. Свойства смешанного произведения. Вычисление объёма тетраэдра по координатам его вершин.
17. Замена базиса и системы координат.
18. Уравнения прямой на плоскости.
19. Взаимное расположение прямой и точки на плоскости. Полуплоскости.
20. Расстояние от точки до прямой на плоскости.
21. Взаимное расположение прямых на плоскости. Угол между прямыми. Пучок прямых.
22. Уравнения плоскости в пространстве.
23. Взаимное расположение плоскости и точки в пространстве. Полупространства.

24. Расстояния от точки до плоскости.
25. Взаимное расположение плоскостей в пространстве. Угол между плоскостями. Пучок плоскостей.
26. Уравнения прямой в пространстве.
27. Взаимное расположение прямых в пространстве.
28. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве.
29. Уравнения линий и поверхностей. Поверхности вращения.
30. Цилиндрическая поверхность и её уравнение. Образующие и направляющие линии цилиндра.
31. Коническая поверхность и её уравнение. Образующие и направляющие линии конуса.
32. Алгебраические линии и поверхности. Инвариантность порядка алгебраической линии или поверхности при изменении декартовой системы координат.
33. Классификация кривых второго порядка на плоскости.
34. Касательная к плоской кривой второго порядка.
35. Эллипс.
36. Гипербола.
37. Парабола.
38. Аффинная классификация поверхностей второго порядка.

Типовые задачи

1. Точки K и L служат серединами сторон BC и CD параллелограмма $ABCD$. Выразить векторы \overline{BC} и \overline{CD} через векторы \overline{AK} и \overline{AL} .
2. На стороне AD параллелограмма $ABCD$ отложен отрезок $AK = \frac{1}{5}AD$, а на диагонали AC - отрезок $AL = \frac{1}{6}AC$. Доказать, что векторы \overline{KL} и \overline{LB} коллинеарны, и найти отношение \overline{KL} к \overline{LB} .
3. Проверить, что векторы $\vec{a}(4,1,1)$, $\vec{b}(1,2,-5)$ и $\vec{c}(-1,1,1)$ образуют базис в пространстве. Найти координаты векторов $\vec{l}(4,4,-5)$, $\vec{m}(2,4,-10)$ и $\vec{n}(0,3,-4)$ в этом базисе.
4. Найти прямоугольные координаты точки, лежащей на шаре радиуса 1, зная ее широту 45° и долготу 330° .
5. Найти цилиндрические координаты точек по их прямоугольным координатам: $A(3,-4,5)$, $B(1,-1,-1)$, $C(6,0,8)$.
6. В треугольнике ABC проведены медианы AD, BE, CF . Вычислить выражение $(\overline{DC}, \overline{AD}) + (\overline{CA}, \overline{BE}) + (\overline{AB}, \overline{CF})$.
7. Найти скалярное произведение векторов \vec{a} и \vec{b} , заданных своими координатами:
 - 1) $\vec{a}(3,2,-5), \vec{b}(10,1,2)$;
 - 2) $\vec{a}(1,0,3), \vec{b}(-4,15,1)$;
 - 3) $\vec{a}(2,1,5), \vec{b}(7,-9,-1)$.
8. Найти угол между векторами \vec{a} и \vec{b} , заданными своими координатами:
 - 1) $\vec{a}(1,-1,1), \vec{b}(5,1,1)$;
 - 2) $\vec{a}(1,-1,1), \vec{b}(-2,2,-2)$.
9. Дан вектор $\vec{a}(3,3,6)$. Найти ортогональную проекцию вектора \vec{b} на прямую, направление которой определяется вектором \vec{a} , и ортогональную составляющую вектора \vec{b} относительно этой прямой, если вектор \vec{b} имеет координаты: 1) $(2,-2,4)$, 2) $(1,1,2)$, 3) $(4,0,-2)$.
10. Найти векторное произведение векторов \vec{a} и \vec{b} , заданных своими координатами: 1) $\vec{a}(3,-1,2), \vec{b}(2,-3,-5)$; 2) $\vec{a}(2,-1,1), \vec{b}(-4,2,-2)$; 3) $\vec{a}(6,1,0), \vec{b}(3,-2,0)$.
11. Параллелепипед $ABCD A'B'C'D'$ задан координатами вершин ребер, выходящих из вершины A с координатами $A(1,2,3), B(9,6,4), C(3,0,4)$ и $A'(5,2,6)$. Найти длину ребра AB , угол между ребром AB и AC ; площадь основания $ABCD$, объем параллелепипеда и вычислить высоту, опущенную из вершины A' . Система координат прямоугольная.
12. Найти координаты точки в системе координат $O(1,3,3), \vec{e}_1(3,3,1), \vec{e}_2(3,5,2)$,

$\vec{e}_3(1,2,1)$ в пространстве, если известны ее координаты x', y', z' в системе координат $O'(-1,0,2)$, $\vec{e}_1(1,-2,1), \vec{e}_2(4,2,1), \vec{e}_3(2,-1,3)$.

13. Написать уравнение поверхности Ω , получающейся при вращении прямой $y=0$ вокруг прямой $y=x$.

14. Даны две прямые $x=3+2t, y=-1-t, z=2+2t$ и $x+2y-z=2, x-y+3z-1=0$. Установить, пересекаются они, скрещиваются, параллельны или совпадают. Если прямые пересекаются или параллельны, составить уравнение плоскости, в которой они лежат. Если прямые пересекаются, найти также координаты точки их пересечения.

15. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1,-1,1)$ и параллельной прямым $x+2y-z=2, 2x-2y+6z-1=0$ и $-2x-4y+2z=1, x-y+3z+2=0$.

16. Составить уравнение касательной к кривой:

1) $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$ в точке $(3,1)$;

17. Пусть в некоторой прямоугольной системе координат кривая второго порядка задана уравнением

$$5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0.$$

Найти ее канонический вид и каноническую систему координат.

18. Определить тип поверхности 2-го порядка, составить её каноническое уравнение и найти каноническую систему координат $4x^2 + 3y^2 - 16x + 6y + 14 = 0$.

Кафедра алгебры и математической логики
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ
Билет 10

1. Линейные операции над векторами и их свойства.
 2. Касательная к плоской кривой второго порядка.
-
2. Задача.