ПРОГРАММА ПО АЛГЕБРЕ

1. Системы линейных алгебраических уравнений.

Основные понятия: основная и расширенная матрицы системы; решение системы; совместные и несовместные, определенные и неопределенные системы; эквивалентные системы; общее и частное решение системы; элементарные преобразования системы.

Теоремы и методы: эквивалентность систем при элементарных преобразованиях; метод Гаусса.

Задачи: найти общее (частное) решение системы уравнений; исследовать систему с параметрами.

2. Перестановки.

Основные понятия: перестановка; инверсия; четная и нечетная перестановка; транспозиция.

Теоремы и методы: теорема о числе перестановок; теорема об изменении четности перестановки при траспозиции.

Задачи: найти число инверсий в перестановке; определить четность перестановки.

3. Теория определителей.

Основные понятия: определитель матрицы; минор и дополнительный минор; алгебраическое дополнение элемента.

Теоремы и методы: свойства определителя (определитель треугольной матрицы; определитель транспонированной матрицы; аддитивность определителя по строкам и столбцам; изменение определителя при перестановке строк или столбцов; равенство нулю определителя с нулевой строкой, с пропорциональными строками или столбцами); теорема о произведении минора на дополнительный минор; разложение Лапласа; методы вычисления определителя (приведение к треугольному виду; рекуррентных соотношений; выделения линейных множителей; представления в виде суммы определителей); формулы Крамера.

Задачи: вычислить определитель; решить систему уравнений, используя формулы Крамера.

4. Основные алгебраические системы.

Основные понятия: бинарная алгебраическая операция, нейтральный и обратный элементы; аксиомы коммутативности, ассоциативности, дистрибутивности; группа, кольцо, поле.

Теоремы и методы: единственность нейтрального и обратного элементов; следствия из аксиом коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности.

5. Примеры алгебраических систем.

Основные понятия: подстановка, операция произведения подстановок; матрица, операции произведения и суммы матриц, обратная матрица; алгебраическая и тригонометрическая формы комплексного числа, модуль и аргумент комплексного числа; отношение эквивалентности, сравнение, класс вычетов целых чисел, операции суммы и произведение классов; наибольший общий делитель.

Построение алгебраических систем: группа подстановок на n символах; группа обратимых матриц порядк n над полем; кольцо вычетов целых чисел по модулю n; поле комплексных чисел.

Теоремы и методы: теорема о числе подстановок на n символах; теорема об умножении определителей, теорема об ассоциативности умножения матриц, необходимые и достаточные условия существования обратной матрицы; формула Муавра, формула извлечения корня n-й степени из комплексного числа; теорема о делении целых чисел, линейное разложение НОД.

Задачи: разложение подстановок в произведение независимых циклов, решение уравнений в группе подстановок; вычисление обратной матрицы, решение матричных уравнений; определение алгебраической и тригонометрической форм комлексного числа, изображение комплексных чисел, возведение в степень и извлечение корня из комплексного числа, решение уравнений с комплексными коэффициентами; решение сравнений и систем сравнений.

6. Многочлены одного переменного.

Основные понятия: многочлен, степень многочлена, операции произведения и суммы многочленов, наибольший общий делитель многочленов.

Построение алгебраических систем: кольцо многочленов одного переменного на полем.

Теоремы и методы: лемма степени произведения многочленов, теорема о делении многочленов, алгорит Евклида, линейное разложение НОД.

Задачи: найти частное и остаток от деления одного многочлена на другой; найти НОД многочленов и его линейное разложение.

Задачи

1. Найти решения системы или доказать её несовместность

$$A)\ \begin{cases} x_2+x_3+x_4=1, \\ x_1+x_3+x_4=2, \\ x_1+x_2+x_4=3, \\ x_1+x_2+x_3=4; \end{cases} \qquad B)\ \begin{cases} 2x_1-2x_2-3x_3=-1, \\ 4x_1-4x_2+x_3=19, \\ 6x_1-6x_2-2x_3=-11; \end{cases}$$

$$C)\ \begin{cases} -x_1+4x_2-3x_3+3x_4 &= 4, \\ x_1-3x_2+7x_3-5x_4 &= -1, \\ 6x_1-21x_2+31x_3-28x_4 &= -11, \\ 4x_1-15x_2+17x_3-18x_4 &= -9; \end{cases} \qquad D)\ \begin{cases} 2x_1-x_2=0, \\ -x_1+2x_2-x_3=0, \\ -x_2+2x_3-x_4=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -x_{n-2}+2x_{n-1}-x_n=0, \\ -x_{n-1}+x_n=1. \end{cases}$$

2. Найти решение системы или установить её несовместность в зависимости от значений параметров a, b

$$\begin{cases} ax+y+z &= 4, \\ x+by+z &= 3, \\ x+2by+z &= 4. \end{cases}$$

3. Определить число инверсий в перестановке

$$2n, 2n-2, ..., 4, 2, 2n-1, 2n-3, ..., 3, 1$$

и её четность в зависимости от n.

4. Вычислить определители

$$A)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \qquad B)\ \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 \end{vmatrix},$$

$$C)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & n & n \\ . & . & . & . & . & . & . \\ n & n & n & \dots & n & n & n \end{vmatrix}.$$

5. Пусть $\mathbb{R}$ — множество действительных чисел, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ — фиксированные действительные числа. Определим на $\mathbb{R}$ операции $\oplus$ и $\odot$, полагая

$$a \oplus b = \alpha_1 a + \alpha_2 b + \alpha_3, \qquad a \odot b = \beta_1 a + \beta_2 b + \beta_3 ab + \beta_4$$

для любых $a, b \in \mathbb{R}$.

1) Найти необходимые и достаточные условия на константы $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, при которых $\langle \mathbb{R}, \oplus \rangle$ — абелева группа.

2) Найти необходимые и достаточные условия на константы $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$, при которых операция $\odot$ является: коммутативной, ассоциативной.

3) Найти необходимые и достаточные условия на константы $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$, при которых $\langle \mathbb{R}, \oplus, \odot \rangle$ — поле.

6. Вычислить

$$\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{30}, \qquad \sqrt[4]{\frac{7-2i}{1+i\sqrt{2}}+\frac{4+14i}{\sqrt{2}+2i}-(8-2i)}.$$

7. Решить систему

$$\begin{cases} (1+i)z_1+(1-i)z_2=1+i, \\ (1-i)z_1+(1+i)z_2=1+3i. \end{cases}$$

8. Решить систему матричных уравнений

$$\begin{cases} 2X-Y=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ -4X+2Y=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

9. Найти обратную к матрице

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

10. Найти частное и остаток от деления числа 367598 на 12573.

11. Число 42157 при делении на некоторое целое положительное число b дало в частном 321. Найти делитель b и остаток r.

12. Пусть m, n, p, q — целые числа. Показать, что если число $mn+pq$ делится на $m-p$, то и число $mq+np$ тоже делится на $m-p$.

13. Найти наибольший общий делитель пар чисел и его линейное представление: а) 321 и 843; б) 23521 и 75217.

14. Найти наибольший общий делитель чисел, запись которых в десятичной системе состоит из n и m единиц.

15. Найти наибольший общий делитель чисел 2^n-1 и 2^m-1, где n, m — натуральные числа.

16. Дать определение наибольшего общего делителя s чисел и доказать равенство

$$\text{НОД}(a_1, a_2, \ldots, a_s) = \text{НОД}(a_1, \text{НОД}(a_2, \ldots, a_s)).$$

17. Доказать, что наибольший общий делитель d чисел $a_1, a_2, \ldots, a_s$ допускает линейное представление

$$d = u_1a_1 + u_2a_2 + \ldots + u_sa_s$$

с целыми $u_1, u_2, \ldots, u_s$.

18. Найти наибольший общий делитель трёх чисел 2737, 9163, 9639.

20. Найти каноническое разложение чисел: а) 1440; б) 1575; в) 111111.

21. Доказать, что существует бесконечно много простых чисел вида $4k-1$.

22. Решить сравнения $2x+1 \equiv 0 \pmod{13}$; $5x \equiv 7 \pmod{21}$; $10x \equiv 3 \pmod{49}$; $x^2 \equiv -1 \pmod{13}$; $x^2 \equiv -1 \pmod{11}$; $x^2 \equiv 2 \pmod{31}$; $x^2+2x+14 \equiv 0 \pmod{17}$; $x^2+3x+10 \equiv 0 \pmod{19}$.

22. Решить систему уравнений над полем $\mathbb{Z}_5$

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1, \\ x + 2y + z = 2, \\ x + y - z = 4. \end{cases}$$

23. Решить сравнение $x^2 - 1 \equiv 0 \pmod{p^m}$, $p > 2$ — простое число, $m \geqslant 1$ — целоые число.

24. Доказать, что $(p-1)! - 1 \equiv 0 \pmod{p}$, если p — простое число.

25. Найти остаток от деления числа 3^{1000} на 13.

26. Решить сравнение $2^n \equiv n \pmod{7}$.

28. Найти наибольший общий делитель многочленов $f(x)$ и $g(x)$:

$$\begin{array}{lll} 1) & f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1, & g(x) = x^3 + x^2 - x - 1; \\ 2) & f(x) = x^4 - 4x^3 + 1, & g(x) = x^3 - 3x^2 + 1. \end{array}$$

29. Пусть $d(x)$ =НОД$(f(x), g(x))$. Доказать, что существуют и единственны многочлены $u(x)$ и $v(x)$ такие, что $d(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$, причем, $deg(u) < deg(g) - deg(d)$ и $deg(v) < deg(f) - deg(d)$.

30. Методом неопределённых коэффициентов подобрать многочлены $u(x)$ и $v(x)$ так, чтобы $f(x)u(x) + g(x)v(x) = 1$, если

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 1, \quad g(x) = x^3 - 3x^2 + 1.$$

31. Найти такие многочлены $u(x)$ и $v(x)$, что

$$x^m\, u(x) + (1-x)^n\, v(x) = 1.$$

32. Найти наибольший общий делитель $f(x)$ и $g(x)$ над полем $\mathbb{Z}_2$:

$$f(x) = x^5 + x^4 + 1, \quad g(x) = x^4 + x^2 + 1.$$