Темы, выносимые на промежуточный экзамен по курсу «Уравнения математической физики» (3 сессия)

1. Банахово и гильбертово пространства. Финитная функция. Пространства $C^k(\Omega), C^k(\overline{\Omega}), \overset{\circ}{C}{}^k(\Omega), C^\infty(\Omega), L_p(\Omega), L_{p,loc}(\Omega)$. Нормы и скалярные произведения. Определение обобщенной производной (по С.Л.Соболеву).
2. Обобщенная производная. Основные свойства. Примеры вычисления обобщенных производных. Примеры, когда обобщенная производная не существует.
3. Пространство $H^l(\Omega)$. Полнота пространства $H^l(\Omega)$. Сильная и слабая сходимость.
4. След функции класса $H^1(\Omega)$ на поверхности размерности n-1. Лемма о следе. Примеры вычисления следов. Формулы интегрирования по частям для функций класса $H^1(\Omega)$. Пространство $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$.
5. Неравенство Пуанкаре-Фридрихса.
6. Эквивалентные нормы. Примеры эквивалентных норм в пространстве $H^1(\Omega)$. Теорема об эквивалентности норм в $H^1(\Omega)$.

Учебно-методические материалы по дисциплине

- В.С. Владимиров. Уравнения математической физики. - М.: Физматлит., 2002. - 400 с.
- Михайлов В.П. Лекции по уравнениям математической физики: Учеб. пособие для вузов. -- М.: Физматлит. 2001. -- 208 с.
- Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. - М.: МГУ, Наука, 2004.-798с.
- Михлин С.Г. Курс математической физики. - СПб.: Лань, 2002. - 576с.
- Сборник задач по уравнениям математической физики / Под ред. В.С. Владимирова. – М.: Физматлит., 2004.

Дополнительная литература

- О. А. Ладыженская. Краевые задачи математической физики. - М.: Наука, 1988. - 386 с.
- Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов Дифференциальные уравнения математической физики. - М.: Гос. изд. ф.-м. литер., 1962. - 767 с.

- С. Л. Соболев. Уравнения математической физики. ≈ М.: ГИТТЛ, 1966. - 444 с., изд. 4-ое.
- И. Г. Петровский. Лекции об уравнениях с частными производными. - М.: ГИТТЛ, 1953.
- А. Фридман. Уравнения с частными производными параболического типа. - М.: Мир, 1968. - 427 с.

Тема 1: Определение пространств

Варианты заданий

1. Дать определение пространства $C^k(\Omega)$. Выписать норму и скалярное произведение, если они определены. Указать, является ли оно банаховым, гильбертовым.
2. Дать определение пространства $C^k(\overline{\Omega})$. Выписать норму и скалярное произведение, если они определены. Указать, является ли оно банаховым, гильбертовым.
3. Дать определение пространства $\overset{\circ}{C}{}^k(\Omega)$. Выписать норму и скалярное произведение, если они определены. Указать, является ли оно банаховым, гильбертовым.
4. Дать определение пространства $L_p(\Omega)$. Выписать норму и скалярное произведение, если они определены. Указать, является ли оно банаховым, гильбертовым.
5. Дать определение пространства $L_{2,loc}(\Omega)$. Выписать норму и скалярное произведение, если они определены. Указать, является ли оно банаховым, гильбертовым.
6. Дать определение пространства $H^k(\Omega)$. Выписать норму и скалярное произведение, если они определены. Указать, является ли оно банаховым, гильбертовым.
7. Дать определение пространства $H^1(\Omega)$. Выписать норму и скалярное произведение, если они определены. Указать, является ли оно банаховым, гильбертовым.
8. Дать определение пространства $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$. Выписать норму и скалярное произведение, если они определены. Указать, является ли оно банаховым, гильбертовым.
9. Доказать полноту пространства $H^1(\Omega)$.

Тема: Обобщённая производная (по Соболеву)

Варианты заданий

1. Дать определение α-обобщённой производной.
2. Доказать единственность α-обобщённой производной.
3. Доказать независимость α-обобщённой производной от последовательности операций обобщённого дифференцирования.
4. Доказать, что если функция $f(x)$ имеет α-обобщённую производную в области Ω, то она имеет α-обобщённую производную в любой подобласти Ω, и эти производные совпадают в этой подобласти.
5. Найти первую обобщённую производную функции $f(x) = |x|$ в области
а) $\Omega = (-5; 7)$; б) $\Omega = (5; 7)$.
6. Найти первую обобщённую производную функции $f(x) = |x - 2|$ в области
а) $\Omega = (-5; 7)$; б) $\Omega = (5; 7)$.
7. Найти первую обобщённую производную функции $f(x) = |x| \sin x$ в области
а) $\Omega = (-1; 1)$; б) $\Omega = (\pi; 7\pi)$.
8. Найти вторую обобщённую производную функции $f(x) = |x| \sin x$ в области
а) $\Omega = (-1; 1)$; б) $\Omega = (\pi; 7\pi)$.
9. Доказать, что функция $f(x) = \operatorname{sign} x$ не имеет первой обобщённой производной в области $(-a; a)$, $a > 0$.

Тема: След функции

Варианты заданий

1. Дать определение следа функции из класса $H^1(\Omega)$ на $\partial\Omega$.

2. Найти след $f|_{\partial\Omega}$ функции $f(x) = \begin{cases} 0, & |x| < 1, \\ 1/2, & |x| = 1, \end{cases}$ на границе $\partial\Omega$ области $\Omega = (-1;1)$.

3. Найти след $f|_{\partial\Omega}$ функции $f(x) = \begin{cases} 7, & |x| < 1, \\ 1, & |x| = 1 \end{cases}$ на границе $\partial\Omega$ области $\Omega = (-1;1)$.

4. Выписать неравенство о следе функции из класса $H^1(\Omega)$ на $\partial\Omega$.

Тема: Эквивалентность норм пространств

Варианты заданий

1. Дать определение эквивалентности норм нормированного пространства.

2. Привести примеры эквивалентных норм в пространстве $H^1(\Omega)$ (с доказательством эквивалентности).

3. Привести примеры эквивалентных норм в пространстве $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ (с доказательством эквивалентности).

4. Доказать эквивалентность норм в пространстве $H^1(\Omega)$:
$||u|| = \int\limits_\Omega (u^2(x) + |\nabla u(x)|^2)\,dx$ и $|||u||| = \int\limits_\Omega (a(x)u^2(x) + k(x)|\nabla u(x)|^2)\,dx$,
где $a(x)$, $k(x)$ измеримы по Лебегу и ограничены и положительны на Ω.

5. Доказать эквивалентность норм в пространстве $H^1(\Omega)$:
$||u|| = \int\limits_\Omega (u^2(x) + |\nabla u(x)|^2)\,dx$ и $|||u||| = \int\limits_\Omega (2u^2(x) + k(x)|\nabla u(x)|^2)\,dx$,
где $k(x)$ измерима по Лебегу и ограничена и положительна на Ω.

6. Доказать эквивалентность норм в пространстве $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$:
$||u|| = \int\limits_\Omega (u^2(x)+|\nabla u(x)|^2)\,dx$ и $|||u||| = \int\limits_\Omega k(x)|\nabla u(x)|^2)\,dx$, где $k(x)$ измерима по Лебегу и ограничена и положительна на Ω.

7. Доказать эквивалентность норм в пространстве $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$:
$||u|| = \int\limits_\Omega (u^2(x) + |\nabla u(x)|^2)\,dx$ и $|||u||| = \int\limits_\Omega |\nabla u(x)|^2)\,dx$.

Фамилия группа

1	2	3	4	5	$\sum$
4	4	4	4	4	20

Сибирский федеральный университет
Институт математики и фундаментальной информатики

Экзаменационная работа по уравнениям математической физики (3 сессия))

Всюду ниже Ω – ограниченная область с кусочно-гладкой границей.

1. Дать определение пространств $C^k(\Omega)$, $\overset{\circ}{C}{}^k(\Omega)$, $H^1(\Omega)$, $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$, $L_{2,loc}(\Omega)$. Выписать норму и скалярное произведение этих пространств, если они определены. Какие из этих пространств являются банаховыми, гильбертовыми?

2. Дать определение α-обобщённой производной. Доказать её единственность.

3. Доказать независимость α-обобщённой производной от последовательности операций обобщённого дифференцирования.

4. Найти след $f|_{\partial\Omega}$ функции $f(x) = \begin{cases} 0, & |x| < 1, \\ 1/2, & |x| = 1, \end{cases}$ на границе области $\Omega = (-1; 1)$.

5. Дать определение эквивалентности норм нормированного пространства. Доказать эквивалентность норм в пространстве $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$:
$||u|| = \int\limits_\Omega (u^2(x) + |\nabla u(x)|^2)\, dx$ и $|||u||| = \int\limits_\Omega k(x)|\nabla u(x)|^2)\, dx$,
где $k(x)$ измерима по Лебегу и ограничена и положительна на Ω.