Перечень тем и вопросов, выносимых на зимнюю сессию
2015-2016 уч. год, 1 курс, 2 поток
Дисциплина “Математический анализ”,
лектор к.ф.-м.н., доцент Фроленков И.В.

1. Понятие функции. График функции. Обзор элементарных функций.
2. Предел функции. Теоремы о пределе функции (Определения предела функции по Коши и Гейне. Определение на языке окрестностей, Арифметические свойства предела функции, Теорема «о двух милиционерах», Первый и второй замечательные пределы, Критерий Коши существования предела функции, Монотонные функции, теорема Вейерштрасса о пределе монотонной функции).
3. Непрерывность функции. Локальные свойства непрерывных функций.
4. Точки разрыва. Классификация. Разрывы монотонной функции.
5. Глобальные свойства непрерывных функций: Теорема Коши о существовании корня, теоремы Вейерштрасса о непрерывных функциях, заданных на отрезке, теорема Больцано-Коши о промежуточном значении.
6. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора о равномерной непрерывности.
7. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Асимптотическое поведение функций. О-символика.
8. Производная и дифференцируемость функции. Теорема о равносильности дифференцируемости и существования производной.
9. Касательная. Геометрический смысл производной, геометрический смысл дифференциала функции. Физический смысл производной.
10. Односторонние производные.
11. Производные суммы, произведения и частного двух функций.
12. Производные сложной и обратной функций.
13. Свойства дифференциала, Инвариантность формы дифференциала первого порядка (дифференциал сложной функции через дифференциал промежуточного аргумента).
14. Производные и дифференциалы высших порядков.
15. Теорема Ферма (о равенстве нулю производной в точке локального максимума или минимума). Теорема Ролля.
16. Теорема Лагранжа. Теорема Коши.
17. Правило Лопиталя.
18. Формула Тейлора. Формула Макларена.
19. Формулы Тейлора для элементарных функций.

Практические задачи к п.18 и п.19 на зимнюю сессию не выносятся.

Учебные материалы по математическому анализу в электронном виде, а также примеры экзаменационных билетов прошлых лет вы можете найти на сайте

http://igor.frolenkov.ru/onlinelab/first_year/math_analysis/

**Некоторые типовые задачи. Математический анализ.
Первый семестр, зимняя минисессия, 2013-2014 год.**

1. Дайте определение:

   (a) равномерно непрерывной на множестве E функции;

   (b) дифференцируемой в точке функции и дифференциала функции.

   (c) Непрерывной функции в точке и записать его на языке "ε - δ";

   (d) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

   (e) Число A является пределом функции $f(x)$ при $x \to 0$;

   (f) Непрерывной функции в точке.

   (g) Записать многочлен Тейлора функции $f(x)$ в точке x_0 степени 3 с остаточным членом в форме Пеано.

   (h) Производной функции в точке x_0 справа.

   (i) Записать многочлен Маклорена функции $f(x)$ степени 3 с остаточным членом в форме Пеано.

   (j) Устранимой точки разрыва функции $f(x)$.

   (k) Того, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, на языке "$\varepsilon - \delta$".

   (l) Точки разрыва второго рода функции $f(x)$.

   (m) Того, что $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 0$, на языке "$\varepsilon - \delta$".

2. Исследовать функцию на непрерывность, если есть точки разрыва функции, установить их род, схематично изобразить график функции. Исследовать функцию на дифференцируемость в точке $x_0 = 0$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{2}, & |x| < 1, x \neq 0 \\ -x, & |x| \geq 1, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

3. Исследовать функцию на непрерывность, если есть точки разрыва функции, установить их род, схематично изобразить график функции. Исследовать функцию на дифференцируемость в точке $x_0 = 0$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}, & |x| < 1, \\ x, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

4. Вычислить производные

   (a) $y''(x)$, где $y(x) = xe^{2x}\sin x^3 + 2x + 3$,

   (b) $\frac{dy}{dx}$, где $y(x)$ задано неявно $\frac{\sin y}{\cos x} + 2ye^y = x^2 + \sin 2$.

5. Вычислить производные

   (a) $y''(x)$, где $y(x) = \frac{1}{\sin 2x^3} + \ln\cos x$,

   (b) $\frac{dy}{dx}$, где $y(x)$ задано неявно $\sqrt{e^{2xy} + 2x^2} = \cos x$.

6. Вычислить производную $y''(x)$, где $y(x) = (x+1)^7(x-2)\cos x$.
7. Вычислить производную $y''(x)$, где $y(x) = (x^2 - 7x + 8)e^x + \cos x^2$.
8. Найти дифференциалы указанных функций при произвольных значениях аргумента x и при произвольном его приращении $\Delta x = dx$:
$$x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a} - 5,$$
$$\sin x - x\cos x + 4$$
9. Найти дифференциалы функций, заданных неявно:
$$y^5 + y - x^2 = 1,$$
$$e^y = x + y.$$
10. Вычислить приближенно (используя понятие дифференциала):
$$\arcsin 0.05, \quad \ln 1.2, \quad arctg 1.04.$$
11. Найти дифференциалы 2-го порядка указанных функций:
$$y = a\sin(bx + c), \quad y = \frac{\sin x}{x}, \quad y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}.$$
12. Найти дифференциалы 2-го порядка следующих неявно заданных функций
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2, \quad x^3 + y^3 = y.$$
13. Написать уравнения касательной и нормали к графику функции $y = f(x)$ в данной точке, если:
$$y = x^2 - 5x + 4, x_0 = -1,$$
$$y = \sqrt{x}, x_0 = 4.$$
14. Найти углы, под которыми пересекаются заданные кривые: $y = x^2$ и $y = x^3$
15. Исследуйте на равномерную непрерывность функции на указанных множествах
$$e^x \sin\frac{1}{x}, \quad x \in (0,1),$$
$$\frac{x^2}{x+1}(-1,0), (0,10), (0,+\infty),$$
$$x^2\cos x[0,\pi],$$
$$\frac{x}{4-x^2}[0,1).$$
16. Вычислить по правилу Лопиталя
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos 4x}{x^2}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{x - \sin x}{\operatorname{tg} x - x}.$$

17. Вычислить по правилу Лопиталя

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\ln\cos 3x},\quad \lim_{x\to 2}\frac{x^2-2^x}{2^x-4}.$$

18. Вычислить по правилу Лопиталя

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin 4x+1)}{x},\quad \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{e^x-(x+1)}.$$

19. Вычислить по правилу Лопиталя

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\ln(3x-2)},\quad \lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^2-1}{e^x-1}.$$

20. Доказать теорему о свойстве единственности предела функции.

21. Сформулировать и доказать теорему Вейерштрасса о максимальном и минимальном значении непрерывной функции.

22. Сформулировать и доказать теорему о двух милиционерах.

23. Сформулировать и доказать теорему о правиле Лопиталя.

24. Сформулировать и доказать критерий дифференцируемости функции.

25. Дать определение производной функции $f(x)$. Используя определение, доказать, что справедливо $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$.

26. Дать определение производной функции $f(x)$. Используя определение, доказать, что справедливо $(C\cdot f(x))' = C\cdot f'(x)$. Здесь C – некоторая константа.

ВНИМАНИЕ, ЗДЕСЬ ПРЕДСТАВЛЕНЫ ЛИШЬ ПРИМЕРЫ ЗАДАНИЙ, ЧТОБЫ ВЫ МОГЛИ ОЦЕНИТЬ УРОВЕНЬ СЛОЖНОСТИ И РАЗНООБРАЗИЕ. ЭТО НЕ ИСЧЕРПЫВАЮЩИЙ СПИСОК, ЗАДАЧИ МОГУТ БЫТЬ ПО ЛЮБОЙ ИЗ ИЗУЧЕННЫХ ТЕМ!

Пример экзаменационного билета. Математический анализ. 1 курс. Зимняя сессия. Вариант 1 (http://igor.frolenkov.ru/onlinelab/first_year/math_analysis/)

Фамилия группа

1	2	3	4	$\sum$
12	15	10	15	52

1. Дайте следующие определения:
   (a) Дифференцируемой функции и дифференциала функции.
   (b) Непрерывной функции в точке.
   (c) Записать многочлен Тейлора функции $f(x)$ в точке x_0 степени 3 с остаточным членом в форме Пеано.

2. Исследовать функцию на непрерывность, если есть точки разрыва функции, установить их род, схематично изобразить график функции. Исследовать функцию на дифференцируемость в точке $x_0 = 0$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{2}, & |x| < 1, x \neq 0 \\ -x, & |x| \geq 1, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

3. Вычислить производные
   (a) $y''(x)$, где $y(x) = \frac{1}{\sin 2x^3} + \ln \cos x$,
   (b) $\frac{dy}{dx}$, где $y(x)$ задано неявно $\sqrt{e^{2xy} + 2x^2} = \cos x$.

4. Сформулировать и доказать теорему о правиле Лопиталя.

Пример экзаменационного билета. Математический анализ. 1 курс. Зимняя сессия. Вариант 2 (http://igor.frolenkov.ru/onlinelab/first_year/math_analysis/)

Фамилия группа

1	2	3	4	$\sum$
12	12	14	12	50

1. Дайте следующие определения:
   (a) Равномерно непрерывной на множестве E функции.
   (b) Точки разрыва второго рода функции $f(x)$.
   (c) Того, что $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 0$, на языке "$\varepsilon - \delta$".

2. Исследовать функцию на непрерывность, если есть точки разрыва функции, установить их род. Исследовать функцию на дифференцируемость в точке $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & x < -1, \\ |x|, & -1 \le x \le 1, \\ \ln(x-1), & |x| \ge 1. \end{cases}$$

3. Вычислить следующие пределы

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{\ln(3x-2)}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{(x+1)^2 - 1}{e^x - 1}.$$

4. Дать определение производной функции $f(x)$. Используя определение, доказать, что справедливо $(C \cdot f(x))' = C \cdot f'(x)$. Здесь C – некоторая константа.