Аналитическая геометрия, вопросы и задачи к минисессии группам 01-03, октябрь 2015

1. Операции сложения векторов и умножения вектора на число, их свойства.

2. Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов. Признак коллинеарности и компланарности векторов.

3. Линейная зависимость четырёх векторов. Базис совокупности векторов на прямой, на плоскости и в пространстве. Координаты вектора. Как найти координаты суммы векторов и вектора, умноженного на число?

4. Деление отрезка в данном отношении. Системы координат на плоскости и в пространстве. Золотое сечение.

5. Основные инварианты параллельного проектирования. Как задать параллельную проекцию плоской фигуры?

6. Основные свойства числовых проекций вектора на вектор.

7. Скалярное произведение и его основные свойства.

8. Векторное произведение. Свойства векторного произведения.

9. Тождество Якоби.

10. Вычисление векторного и смешанного произведений по координатам сомножителей.

11. Замена декартовой системы координат.

12. Уравнения линий и поверхностей. Поверхность вращения, цилиндр, конус. Инвариантность порядка алгебраической линии при замене декартовой системы координат.

13. Параметрические уравнения прямых на плоскости и в пространстве. Уравнения прямой на плоскости. Расстояние от точки до прямой.

14. Уравнения плоскости. Расстояние от точки до плоскости. Угол между вектором и плоскостью.

Задачи:

1. Доказать утверждения:1) конечная система векторов, содержащая нулевой вектор, линейно зависима; 2) конечная система векторов, содержащая два равных вектора, линейно зависима.

2. Доказать, что для любых трех векторов a, b, c и любых трех чисел α, β, γ векторы $\alpha a - \beta b$, $\gamma b - \alpha c$, $\beta c - \gamma a$ линейно зависимы.

3. Даны векторы $a(3, 2)$, $b(5, -1)$, $c(-1, 3)$. Найтикоординаты векторов $2a + 5b - c, 6a + 5b - 9c$.

4. Даны три вектора $a(1, 3), b(-2, 1), c(-4, 1)$. Найти числа α и β такие, что $\alpha a + \beta b + c = 0$.

5. Проверить, что векторы $a(-5, -1)$ и $b(-1, 3)$ образуют базис на плоскости. Найти координаты векторов $c(-1, 2)$ и $d(-2, 6)$ в этом базисе.

6. В трапеции $ABCD$ длины оснований AD и BC относятся как 3:2. Принимая за базисные векторы $\overline{AC}$ и $\overline{BD}$,найти в этом базисе координаты векторов $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$.

7. В трапеции $ABCD$ длины оснований AD и BC относятся как 3:1. 0 — точка пересечения диагоналей трапеции, S – точка пересечения продолжений боковых сторон. Принимая за базисные векторы $\overline{AD}$ и $\overline{AB}$, найти координаты векторов $\overline{AC}, \overline{AO}, \overline{AS}$.

8. В трапеции задачи 7 точка M — середина стороны CD. Найти координаты вектора $\overline{AD}$ в базисе $\overline{OS}, \overline{OM}$.

9. В тетраэдре $OABC$ точки K, L, M, N, P, Q — середины ребер OA, OB, OC, AB, AC, BC соответственно, S — точка пересечения медиан треуголь-

ника ABC. Принимая за базисные векторы OA, OB, OC. найти в этом базисе координаты:

1) векторов $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$;

2) векторов $\overline{KL}$, $\overline{PQ}$, $\overline{CN}$, $\overline{MP}$, $\overline{KQ}$;

3) векторов OS и KS.

10. Даны три точки O, A, B, не лежащие на одной прямой. Принимая за базисные векторы $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$, найти:

1) координаты вектора $\overline{OM}$, если точка M лежит на отрезке AB и $AM : BM = m : n$;

2) координаты вектора $\overline{ON}$, если точка N лежит на прямой AB вне отрезка AB и $AN : BN = m : n$.

11. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD. Найти координаты вектора AD в базисе, образованном векторами AB и AC.

12. Доказать, что средняя линия трапеции параллельна основаниям, а длина средней линии равна полусумме длин оснований (теорема о средней линии трапеции).

13. Теорема, обратная теореме о средней линии трапеции. Точки E и F являются серединами сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$ (на плоскости или в пространстве). Доказать, что если $|EF| = (|BC| + |AD|)/2$, то $ABCD$ — трапеция.

14. Найти расстояние между точками A и B, заданными своими координатами:

1) $A(-2, 3, 1), B(3, 2, 8)$, 2) $A(-2, 4, 3), B(1, -5, 2)$,

3) $A(4, 4, -3), B(2, -1, 3)$, 4) $A(-1, -1, 1), B(7, -5, 2)$.

15. Доказать, что векторы a и $b(a, c) - c(a, b)$ взаимно перпендикулярны.

16. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC. Доказать, что $|AM|^2 + |BM|^2 + |CM|^2 = (|AB|^2 + |BC|^2 + |AC|^2)/3$.

17. Доказать, что векторное произведение не изменится, если к одному из сомножителей прибавить вектор, коллинеарный другому сомножителю.

18. На векторах $a(2, 1, 3)$ и $b(-1, 2, 1)$, отложенных из одной точки, построен треугольник. Найти:

1)площадь этого треугольника;

2)длины трех его высот.

19. Доказать, что площадь выпуклого четырехугольника $ABCD$ равна половине длины векторного произведения $[\overline{AC}, \overline{BD}]$.

20. Доказать, что сумма векторов, перпендикулярных кграням произвольного тетраэдра, равных по длине площадям этих граней и направленных в сторону вершин, противолежащих этим граням, равна нулю.

21. Объяснить геометрический смысл всех решений векторного уравнения $[x, a] = b$.

22. Три некомпланарных вектора a, b, c отложены из одной точки. Найти:

1)объем треугольной призмы, основание которой построено на векторах a и b, а боковое ребро совпадает с вектором c;

2)объем тетраэдра, построенного на векторах a, b, c.

23. Доказать, что любая плоскость, проходящая через середины двух скрещивающихся ребер произвольного тетраэдра, делит этот тетраэдр на две одинаковые по объему части.

24. В пространстве даны два базиса e_1, e_2, e_3 и e'_1, e'_2, e'_3. Векторы второго базиса имеют в первом базисе координаты (1,1,1), (-1,-2,-3), (1,3,6) соответственно.

1) Найти координаты вектора в первом базисе, если известны его координаты $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3$ во втором базисе.

2) Найти координаты вектора во втором базисе, если известны его координаты $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ в первом базисе.

3) Найти координаты векторов e_1, e_2, e_3 во втором базисе.

25. Найти координаты точки в системе координат $O(2,-1), e_1(1,5)$, $e_2(-1,4)$ на плоскости, если известны ее координаты x', y' в системе координат $O'(3,2)$, $e'_1(1,-1), e'_2(4,2)$.

26. В тетраэдре $ABCD$ точка M — точка пересечения медиан грани BCD. Найти координаты точки впространства в системе координат A, $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, если известны ее координаты x', y', z' в системе координат M, $\overline{MB}, \overline{MC}, \overline{MA}$.