Вопросы по АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ
к минисессии 29 октября 2015 г.

kiv@icm.krasn.ru

1. Вектор. Равенство векторов. Коллинеарные и компланарные векторы.
2. Линейные операции над векторами и их свойства.
3. Линейная комбинация векторов. Линейная независимость системы векторов. Необходимое и достаточное условие линейной зависимости системы векторов.
4. Геометрические критерии линйной зависимости.
5. Базис векторов прямой, плоскости и пространства. Координаты вектора в базисе. Координаты линейной комбинации векторов в базисе.
6. Декартова система координат на прямой, плоскости и в пространстве. Деление отрезка в данном отношении. Координаты точки, делящей отрезок пополам. Золотое сечение.
7. Декартовы прямоугольные системы координат. Полярные, цилиндрические и сферические системы координат. Их связь с прямоугольными координатами.
8. Числовая проекции вектора на направление и её свойства.
9. Скалярное произведение векторов и его свойства.
10. Ортонормированный базис. Выражение скалярного произведения через координаты данных векторов, угол между векторами. Условие ортогональности двух векторов.
11. Векторная проекция вектора на плоскость, ортогональную заданному нанаправлению. Свойства векторной проекции.
12. Левая и правая пары и тройки векторов. Векторное произведение. Свойства векторного произведения.
13. Координаты векторного произведения в ортонормированном базисе. Выражение через векторное произведение условия коллинеарности векторов.
14. Тождество Якоби.
15. Смешанное произведение трёх векторов. Нахождение смешанного произведения векторов через их координаты в ортонормированном и произвольном базисе.
16. Свойства смешанного произведения. Вычисление объёма тетраэдра по координатам его вершин.
17. Замена системы координат.

Типовые задачи

1. В треугольнике ABC проведены медианы AD, BE и CF. Представить векторы $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BE}$ и $\overrightarrow{CF}$ в виде линейных комбинаций векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.
2. Точки E и F служат серединами сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$ (плоского или пространственного). Доказать, что $EF = \dfrac{BC + AD}{2}$. Вывести отсюда теорему о средней линии трапеции.
3. Точки K и L служат серединами сторон BC и CD параллелограмма $ABCD$. Выразить векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CD}$ через векторы $\overrightarrow{AK}$ и $\overrightarrow{AL}$.
4. На стороне AD параллелограмма $ABCD$ отложен отрезок $AK = \dfrac{1}{5}AD$, а на диагонали AC - отрезок $AL = \dfrac{1}{6}AC$. Доказать, что векторы $\overrightarrow{KL}$ и $\overrightarrow{LB}$ коллинеарны, и найти отношение $\overrightarrow{KL}$ к $\overrightarrow{LB}$.
5. Доказать утверждения:

 1) конечная система векторов, содержащая нулевой вектор, линейно зависима;

 2) конечная система векторов, содержащая два равных вектора, линейно зависима.

6. Даны три вектора $\vec{a}(1,2), \vec{b}(-5,-1), \vec{c}(-1,3)$. Найти координаты векторов $2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$, $16\vec{a} + 5\vec{b} - 9\vec{c}$.
7. Проверить, что векторы $\vec{a}(4,1,1)$, $\vec{b}(1,2,-5)$ и $\vec{c}(-1,1,1)$ образуют базис в пространстве. Найти координаты векторов $\vec{l}(4,4,-5)$, $\vec{m}(2,4,-10)$ и $\vec{n}(0,3,-4)$ в этом базисе.
8. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Принимая за базисные векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AF}$, найти в этом базисе координаты векторов $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CF}, \overrightarrow{CE}$.
9. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Принимая за начало координат вершину A, а за базисные векторы $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AA_1}$, найти координаты:

 1) вершин C, D_1 и C_1;

 2) точек K и L - середин ребер A_1B_1 и CC_1 соответственно;

 3) точек M и N пересечения диагоналей граней $A_1B_1C_1D_1$ и ABB_1A_1 соответственно;

 4) точки O пересечения диагоналей параллелепипеда.

10. Найти прямоугольные координаты точки, лежащей на шаре радиуса 1, зная ее широту 45° и долготу 330°.
11. Найти цилиндрические координаты точек по их прямоугольным координатам: $A(3,-4,5), B(1,-1,-1), C(6,0,8)$.
12. В треугольнике ABC проведены медианы AD, BE, CF. Вычислить выражение

$(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{AD})+(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{BE})+(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CF})$.

13. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:

1) $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=1, \angle(\vec{a},\vec{b})=45^\circ$;
2) $|\vec{a}|=6, |\vec{b}|=7, \angle(\vec{a},\vec{b})=120^\circ$;
3) $|\vec{a}|=4, |\vec{b}|=2, \angle(\vec{a},\vec{b})=90^\circ$;
4) $|\vec{a}|=5, |\vec{b}|=1, \vec{a}$ и $\vec{b})$ сонаправлены;
5) $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=2, \vec{a}$ и $\angle(\vec{a},\vec{b})=45^\circ$ противоположно направлены.

14. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, заданных своими координатами:

1) $\vec{a}(3,2,-5), \vec{b}(10,1,2)$;
2) $\vec{a}(1,0,3), \vec{b}(-4,15,1)$;
3) $\vec{a}(2,1,5), \vec{b}(7,-9,-1)$.

15. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, заданными своими координатами:

1) $\vec{a}(1,-1,1), \vec{b}(5,1,1)$;
2) $\vec{a}(1,-1,1), \vec{b}(-2,2,-2)$.

16. Дан вектор $\vec{a}(3,3,6)$. Найти ортогональную проекцию вектора $\vec{b}$ на прямую, направление которой определяется вектором $\vec{a}$, и ортогональную составляющую вектора $\vec{b}$ относительно этой прямой, если вектор $\vec{b}$ имеет координаты: 1)(2,-2,4), 2)(1,1,2), 3(4,0,-2).

18. Найти векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, заданных своими координатами: 1) $\vec{a}(3,-1,2), \vec{b}(2,-3,-5)$; 2) $\vec{a}(2,-1,1), \vec{b}(-4,2,-2)$; 3) $\vec{a}(6,1,0), \vec{b}(3,-2,0)$.

19. Параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$ задан координатами вершин ребер, выходящих из вершины A с координатами $A(1,2,3), B(9,6,4), C(3,0,4)$ и $A'(5,2,6)$. Найти длину ребра AB, угол между ребром AB и AC; площадь основания $ABCD$, объем параллелепипеда и вычислить высоту, опущенную из вершины A'. Система координат прямоугольная.

20. Найти необходимые и достаточные условия того, чтобы уравнение $[\vec{a},\vec{x}]=\vec{b}$, где $\vec{a}\neq\vec{0}$, имело решение. Найти общее решение этого уравнения.

21. Найти координаты точки в системе координат $O(1,3,3), \vec{e}_1(3,3,1), \vec{e}_2(3,5,2), \vec{e}_3(1,2,1)$ в пространстве, если известны ее координаты x', y', z' в системе координат $O'(-1,0,2)$, $\vec{e}_{1'}(1,-2,1), \vec{e}_{2'}(4,2,1), \vec{e}_{3'}(2,-1,3)$.

22. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Найти координаты точки плоскости в системе координат $A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF}$, если известны ее координаты x', y' в системе координат $C, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CE}$.

Кафедра алгебры и математической логики

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Билет 10

1. Ортонормированный базис. Выражение скалярного произведения через координаты данных векторов, угол между векторами. Условие ортогональности двух векторов.
2. Задача.