Пространства Соболева. Обобщенные решения краевых задач для уравнений в частных производных.

1. Банахово и гильбертово пространства. Финитная функция. Пространства $C^k(\Omega), C^k(\overline{\Omega}), \overset{\circ}{C}{}^k(\Omega), C^\infty(\Omega), L_p(\Omega), L_{p,loc}(\Omega)$. Нормы и скалярные произведения. Определение обобщенной производной (по С.Л.Соболеву).
2. Пространство $H^l(\Omega)$. Полнота пространства $H^l(\Omega)$. Сильная и слабая сходимость.
3. Неравенство Пуанкаре-Фридрихса.
4. Эквивалентные нормы. Примеры эквивалентных норм в пространстве $H^1(\Omega)$. Теорема об эквивалентности норм в $H^1(\Omega)$.
5. Обобщенное решение первой краевой задачи для эллиптического уравнения. Теорема Рисса. Теоремы существования и единственности обобщенного решения.
6. Обобщенное решение второй краевой задачи для эллиптического уравнения. Теоремы существования и единственности обобщенного решения.

Функциональные методы решения краевых задач для уравнений в частных производных.

7. Метод Галеркина для первой краевой задачи для эллиптического уравнения. Исследование единственности решения. Сильная сходимость последовательности галеркинских приближений.
8. Метод Галеркина для второй и третьей краевых задач для эллиптического уравнения.
9. Понятие квадратичного функционала, его ограниченность снизу.
10. Теорема существования решения первой краевой задачи для эллиптического уравнения. Функциональный метод.
11. Метод Ритца построения минимизирующей последовательности функционала $E(u) = \|u\|_H^2 + 2(f,u)_{L_2}$.

Основная литература

- В.С. Владимиров. Уравнения математической физики. - М.: Физматлит., 2002. - 400 с.
- Михайлов В.П. Лекции по уравнениям математической физики: Учеб. пособие для вузов. -- М.: Физматлит. 2001. -- 208 с.
- Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. - М.: МГУ, Наука, 2004.-798с.
- Михлин С.Г. Курс математической физики. - СПб.: Лань, 2002. - 576с.

- Сборник задач по уравнениям математической физики / Под ред. В.С. Владимирова. – М.: Физматлит**.**, 2004.

Дополнительная литература

- О. А. Ладыженская. Краевые задачи математической физики. - М.: Наука, 1988. - 386 с.
- Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов Дифференциальные уравнения математической физики. - М.: Гос. изд. ф.-м. литер., 1962. - 767 с.
- С. Л. Соболев. Уравнения математической физики. ≈ М.: ГИТТЛ, 1966. - 444 с., изд. 4-ое.
- И. Г. Петровский. Лекции об уравнениях с частными производными. - М.: ГИТТЛ, 1953.
- А. Фридман. Уравнения с частными производными параболического типа. - М.: Мир, 1968. - 427 с.

Тема 1: Определение пространств

Варианты заданий

1. Дать определение пространства $C^k(\Omega)$. Выписать норму и скалярное произведение, если они определены. Указать, является ли оно банаховым, гильбертовым.
2. Дать определение пространства $C^k(\overline{\Omega})$. Выписать норму и скалярное произведение, если они определены. Указать, является ли оно банаховым, гильбертовым.
3. Дать определение пространства $\overset{\circ}{C}{}^k(\Omega)$. Выписать норму и скалярное произведение, если они определены. Указать, является ли оно банаховым, гильбертовым.
4. Дать определение пространства $L_p(\Omega)$. Выписать норму и скалярное произведение, если они определены. Указать, является ли оно банаховым, гильбертовым.
5. Дать определение пространства $L_{2,loc}(\Omega)$. Выписать норму и скалярное произведение, если они определены. Указать, является ли оно банаховым, гильбертовым.
6. Дать определение пространства $H^k(\Omega)$. Выписать норму и скалярное произведение, если они определены. Указать, является ли оно банаховым, гильбертовым.
7. Дать определение пространства $H^1(\Omega)$. Выписать норму и скалярное произведение, если они определены. Указать, является ли оно банаховым, гильбертовым.
8. Дать определение пространства $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$. Выписать норму и скалярное произведение, если они определены. Указать, является ли оно банаховым, гильбертовым.
9. Доказать полноту пространства $H^1(\Omega)$.

Тема: Эквивалентность норм пространств

Варианты заданий

1. Дать определение эквивалентности норм нормированного пространства.
2. Привести примеры эквивалентных норм в пространстве $H^1(\Omega)$ (с доказательством эквивалентности).
3. Привести примеры эквивалентных норм в пространстве $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ (с доказательством эквивалентности).
4. Доказать эквивалентность норм в пространстве $H^1(\Omega)$:
$||u|| = \int\limits_\Omega (u^2(x) + |\nabla u(x)|^2)\,dx$ и $|||u||| = \int\limits_\Omega (u^2(x) + k(x)|\nabla u(x)|^2)\,dx$,
где $k(x) \geqslant 1$, измерима по Лебегу, ограничена и положительна на $\overline{\Omega}$.
5. Доказать эквивалентность норм в пространстве $H^1(\Omega)$:
$||u|| = \int\limits_\Omega (u^2(x) + |\nabla u(x)|^2)\,dx$ и $|||u||| = \int\limits_\Omega (2u^2(x) + k(x)|\nabla u(x)|^2)\,dx$,
где $k(x)$ измерима по Лебегу, ограничена и положительна на $\overline{\Omega}$.
6. Доказать эквивалентность норм в пространстве $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$:
$||u|| = \int\limits_\Omega (u^2(x) + |\nabla u(x)|^2)\,dx$ и $|||u||| = \int\limits_\Omega k(x)|\nabla u(x)|^2)\,dx$, где $k(x)$ измерима по Лебегу, ограничена и положительна на $\overline{\Omega}$.
7. Доказать эквивалентность норм в пространстве $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$:
$||u|| = \int\limits_\Omega (u^2(x) + |\nabla u(x)|^2)\,dx$ и $|||u||| = \int\limits_\Omega |\nabla u(x)|^2)\,dx$.
8. Выписать неравенство Пуанкаре-Фридрихса.

Тема: Обобщенное решение эллиптического уравнения

Варианты заданий

1. Доказать теорему существования и единственности в классе $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ обобщенного решения задачи
$-\Delta u = \sin x_1 \cdot \sin x_2,\ u|_{\partial\Omega} = 0.$
2. Дать определение обобщенного решения краевой задачи
$-(x_1^2 + x_2^2 + 1)\Delta u + u = f,\ u|_{\partial\Omega} = 0,$
где Δ — двумерный оператор Лапласа.

3. Дать определение обобщенного решения первой краевой задачи в $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ для уравнения Пуассона. Сформулировать и доказать теорему существования и единственности обобщенного решения этой задачи.
4. Пусть задан элемент $u \in H^1(\Omega)$. Является ли линейным непрерывным функционалом над $H^1(\Omega)$ $(\partial\Omega \in C^1)$ функционал
$\int\limits_\Omega uv\,dx + \int\limits_{\partial\Omega} u(\xi)v(\xi)\,d\xi$?
5. Доказать, что при $\varphi(x) \in H^1(\Omega)$, функционал
$\int\limits_\Omega \varphi(x)v(x)\,dx + \int\limits_{\partial\Omega} \sin^2(|s|)v(s)\,ds$ является непрерывным над $H^1(\Omega)$.

Тема: Метод Галёркина

Варианты заданий

1. Вывести априорную оценку последовательности $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ галёркинских приближений в случае первой краевой задачи для эллиптического уравнения.

2. Доказать сильную в $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ сходимость галёркинских приближений $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ к обобщенному решению u краевой задачи
$-\Delta u + u = f,\ u|_{\partial\Omega} = 0,$
считая, что слабая сходимость $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ к u уже доказана.

3. Дать определение базиса в $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$. Выписать схему построения решения первой краевой задачи для эллиптического уравнения (с однородными граничными условиями) методом Галёркина.

Тема: Квадратичный функционал

Варианты заданий

1. Пусть $f(x) \in L_2(\Omega)$. Выписать необходимое условие, которому удовлетворяет элемент u, реализующий минимум функционала $\Phi(u) = ||u||^2_{\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)} + 2(f,u)_{L_2(\Omega)}$ на $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$.
2.Доказать существование обобщенного решения задачи
$-\Delta u = f,\ u|_{\partial\Omega} = 0$
в классе $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$.

3. Дать определение квадратичного функционала. Доказать его ограниченность снизу.
4. Дать определение базиса в бесконечномерном банаховом пространстве; дать определение минимизирующей последовательности (для функционала).
5. Доказать сходимость минимизирующей последовательности к элементу, реализующему минимум функционала. Доказать единственность минимизирующего элемента.
6. Вывести необходимое условие, которому удовлетворяет элемент, реализующий минимум квадратичного функционала.

Фамилия группа

1	2	3	4	5	6	$\sum$
3	3	3	5	3	3	20

Сибирский федеральный университет
Институт математики

Экзаменационная работа 4 по уравнениям математической физики

Всюду ниже Ω – ограниченная область пространства E^n с кусочно-гладкой границей.

1. Доказать теорему существования и единственности в классе $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ обобщенного решения задачи $-\Delta u = \sin x_1 \cdot \sin x_2$, $u|_{\partial\Omega} = 0$. (3 балла)

2. Дать определение обобщенного решения краевой задачи $-(x_1^2+x_2^2)+1)\Delta u+u = f(x_1, x_2)$, $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0$, где Δ — двумерный оператор Лапласа. (3 балла)

3. Дать определение квадратичного функционала. Доказать его ограниченность снизу. (3 балла)

4. Выписать необходимое условие, которому удовлетворяет элемент u, реализующий минимум квадратичного функционала $\Phi(v) = ||v||^2_{\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)} + 2(f, u)_{l_2(\Omega)}$ на $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$. (5 баллов)

5. Дать определение базиса в бесконечномерном банаховом пространстве. Выписать схему построения решения первой краевой задачи для эллиптического уравнения (с однородными граничными условиями) методом Галёркина. (3 балла)

6. Доказать, что при $\varphi(x) \in H^1(\Omega)$, функционал $F(v) = \int\limits_{\Omega} \varphi(x)v(x)\,dx + \int\limits_{\partial\Omega} \sin^2(|s|)v(s)\,ds$ является непрерывным на $H^1(\Omega)$. (3 балла)