Примеры задач

1. Найти положения равновесия автономной системы

$$\begin{cases}(x+3)\dot{x}+(\dot{x}+y)\dot{y}+3x+y-5=0,\\ y\dot{x}+\dot{y}+x^2+3y-7=0.\end{cases}$$

2. Известно, что точка $(2;1)$ является положением равновесия системы

$$\begin{cases}\dot{x}=x^2+\alpha y-5,\\ \dot{y}=3x+2y+\beta.\end{cases}$$

   Найти значения параметров α и β.

3. Система уравнений

$$\begin{cases}\dot{x}=x^2+\alpha y-7,\\ \dot{y}=3x-2y+\beta\end{cases}$$

   имеет решение $x\equiv 2$, $y\equiv 1$, которое не зависит от t. Найти значения параметров α и β. Как называются такие решения автономных систем?

4. Вычислить производную в силу системы $\dot{x}=x^2y$, $\dot{y}=xy^3$ от функции xy.

5. Проверив, что $v(x,y)=x^2+y^2$ является функцией Ляпунова для системы

$$\begin{cases}\dot{x}=-2y-x^3,\\ \dot{y}=2x-y^3,\end{cases}$$

   доказать, что нулевое положение равновесия этой системы устойчиво по Ляпунову.

6. Система $\dot{x}=Ax$, где $x\in R^3$, A — постоянная матрица, имеет частное решение, у которого известна только первая координата: $x_1=e^{-t}+\cos t$. Устойчиво ли нулевое решение?

7. Исследовать на устойчивость нулевое положение равновесия линейной системы

$$\begin{cases}\dot{x}=3x+4y,\\ \dot{y}=2x+y.\end{cases}$$

8. Исследовать на устойчивость нулевое положение равновесия системы

$$\begin{cases}\dot{x}=x^2+3x+2y,\\ \dot{y}=2xy+4x+y.\end{cases}$$

9. Найти все значения параметра k, при которых нулевое положение равновесия системы

$$\begin{cases}\dot{x}=-6x+2ky,\\ \dot{y}=3kx-9y\end{cases}$$

   будет устойчивым по Ляпунову.

10. Найти уравнения траекторий автономной системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 5x + y, \\ \dot{y} = 4x + 5y, \end{cases}$$

которые являются прямыми линиями.

11. Определить тип нулевого положения равновесия системы в зависимости от значения параметра α

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - 2y, \\ \dot{y} = 2x + \alpha y. \end{cases}$$

12. Матрица системы $\dot{x} = \alpha x + \beta y$, $\dot{y} = \gamma x + \delta y$ имеет собственные значения $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 5$. Определить тип положения равновесия. Будет ли оно устойчивым?

13. Известно, что матрица линейной однородной системы второго порядка с постоянными коэффициентами является невырожденной, а одно из ее собственных чисел $\lambda_1 = 4$. Найти положение равновесия данной системы. Какого типа оно может быть (перечислить все возможные варианты, выписать соответствующие условия на λ_2).

14. Решить уравнение в частых производных

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + (5y + x^6)\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

15. Найти решение уравнения в частых производных

$$x\frac{\partial z}{\partial x} - 2y\frac{\partial z}{\partial y} = z,$$

удовлетворяющее условию $z = y^2$ при $x = 1$.

16. При решении уравнения в частных производных первого порядка

$$f(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x} + g(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y} = h(x,y,z)$$

было выписана характеристическая система

$$\frac{dx}{x^4} = \frac{dy}{-y^2} = \frac{dz}{3z^3}.$$

Найти общее решение уравнения в частных производных. Определить, каковы в этом случае могут быть функции $f(x,y,z)$, $g(x,y,z)$ и $h(x,y,z)$ (достаточно привести хотя бы один пример этих функций).