Дискретная математика (летняя сессия)

Экзамен состоит из 5 заданий:
1. Дать определение
2. Сформулировать и доказать теорему
3-5. Задания из раздела «Теория графов».

Список определений
1) Простой граф
2) Ориентированный граф
3) Изоморфизм графов
4) Автоморфизм графа
5) Автоморфные вершины графа
6) Автоморфные ребра графа
7) Инвариант графа
8) Полный инвариант графа
9) Полный граф
10) Пустой граф
11) Маршрут в графе
12) Цикл в графе
13) Дерево, лес
14) Двудольный граф
15) Полный двудольный граф
16) Смежность двух вершин графа
17) Инцидентность вершины и ребра графа
18) Матрица смежности графа
19) Матрица инцидентности графа
20) Операция объединения двух графов
21) Операция произведения двух графов
22) Операция дополнения графа
23) Операция пересечения двух графов
24) Операция разности двух графов
25) Гомеоморфные графы
26) Диаграма графа (реализация графа на плоскости)
27) Планарный граф
28) Эйлеров и полуэйлеров граф
29) Допустимая раскраска графа
30) Хроматическое число графа
31) Хроматическая функция (хроматический полином) графа
32) Матрицы инцидентности, смежности, достижимости и связности ориентированного графа.
33) Транспортная сеть
34) Допустимый поток в транспортной сети
35) Полный поток в транспортной сети
36) Максимальный поток в транспортной сети
37) Минимальное сечение транспортной сети

Список теорем
1. Лемма о рукопожатиях

2. Лемма о числе ребер в полном графе
3. Критерий двудольного графа
4. Теорема о степенях матрицы смежности графа
5. Критерий планарности графа (без доказательства)
6. Критерий Эйлеровости графа
7. Критерий полуэйлеровости графа
8. Формула Эйлера для плоского графа
9. Лемма о об оценке числа ребер через число вершин в планарном графе и следствие о непланарности графов K_5 и $K_{3,3}$.
10. Теорема о раскраске плоского графа пятью красками
11. Теорема о рекуррентной формуле для вычисления хроматической функции графа
12. Следствие о полиномиальности хроматической функции графа
13. Доказательство полной инвариантности функции

$$\max_{\varphi \in S_{V(G)}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} 2^{n(i-1)+(j-1)} a_{ij}$$

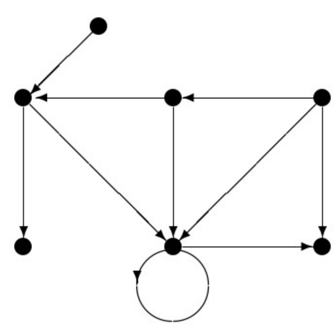
на множестве простых графов (где $\|a_{ij}\|$ – матрица смежности графа, $S_{V(G)}$ – множество всех подстановок на его вершинах).

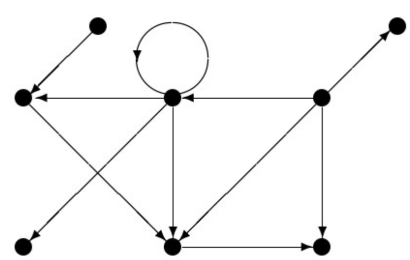
14. Лемма об ограничивающем сечении в транспортной сети
15. Теорема Форда-Фолкерсона

Типы заданий:
1) «Матрицы, связанные с графами»
2) «Эйлеровы и полуэйлеровы графы»
3) «Изоморфизмы и автоморфизмы графов»
4) «Планарные графы»
5) «Раскраска графов»
6) «Алгоритмы на ориентированных графах»

Примеры заданий подраздела «Матрицы, связанные с графами»

1. Построить матрицы смежности, инцидентности, достижимости и связности для ориентированных графов:





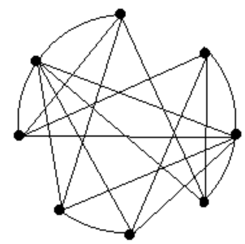
2. Восстановить неориентированный граф по его матрице смежности A. Восстановить ориентированный граф по его матрице инцидентности B.

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0&1&1&0\\1&0&0&1&1&0&0\\0&0&0&1&0&1&1\\0&1&1&0&1&0&0\\1&1&0&1&0&0&1\\1&0&1&0&0&0&1\\0&0&1&0&1&1&0\end{pmatrix}; \qquad B=\begin{pmatrix}0&0&0&0&1&-1&0&0&0&0\\-1&-1&0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&-1&-1&0&0\\0&1&0&-1&0&0&0&0&0&2\\1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&2&0&0&0&1&0&2&0\\0&0&0&1&-1&0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

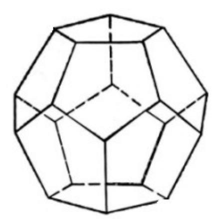
3. Существуют ли два неизоморфных ориентированных графа, имеющих одинаковые матрицы а) смежности? б) инцидентности? в) достижимости? г) связности?
В каждом случае, если такие графы существуют, привести примеры.
4. Найти число всех треугольников в графе K_6.

Примеры заданий подраздела «Эйлеровы и полуэйлеровы графы»

1) Найти эйлеров цикл или полуэйлеров маршрут в графе:

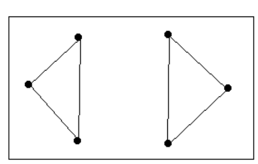


2) На какое минимальное число кусков нужно разрезать проволоку длины 30, чтобы согнуть из неё каркас додекаэдра с длиной ребра 1? Ответ обосновать. Схему сборки каркаса приводить не обязательно.

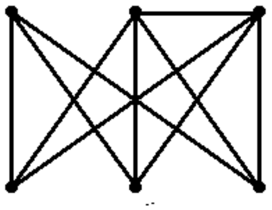
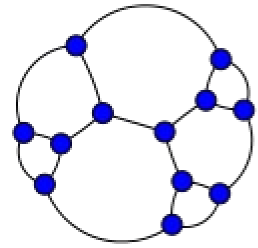


Примеры задач из раздела «изоморфизмы и автоморфизмы графов»

1) Перечислить все, с точностью до изоморфизма, деревья с 6 вершинами.
2) Найти порядок группы автоморфизмов графа:



3) Разбить множество вершин графа на классы автоморфности:

а)  б) 

Примеры задач из подраздела «Планарность графов»

1. С помощью формулы Эйлера доказать планарность/непланарность графов:

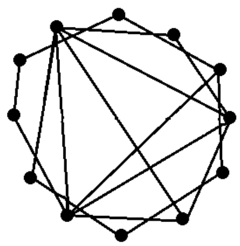


Рисунок 1

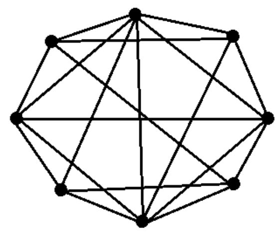
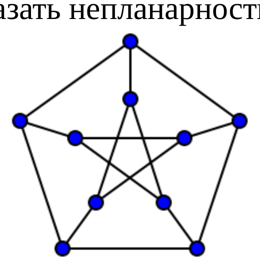


Рисунок 2

2. Построить все попарно неизоморфные непланарные простые графы с 6 вершинами и 11 ребрами.
3. Используя формулу Эйлера, доказать непланарность графа Петерсена.



4. Привести пример простого планарного графа с 8 вершинами и 17 ребрами.
5. Какое наибольшее число граней может быть у плоской реализации простого планарного графа с 5 вершинами? Изобразить такой граф.
6. Существует ли плоский простой граф с 6 вершинами и 9 гранями?
7. Построить все попарно не гомеоморфные связные планарные простые графы, чьи плоские реализации будут иметь 5 граней.

Примеры задач из подраздела «Раскраска графов»

1. Найти хроматическое число и хроматический многочлен графов:

Рисунок 3

2. В группах М1 и М2 требуется провести занятия по алгебре, дискретной математике, математическому анализу и истории России. Занятия ведут: преподаватель X (дискретная

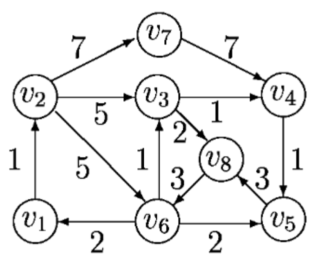
математика и алгебра), преподаватель Y (математический анализ) и преподаватель Z (история России). Все занятия со всеми группами проводятся раздельно. За какое минимальное количество пар можно провести все занятия?

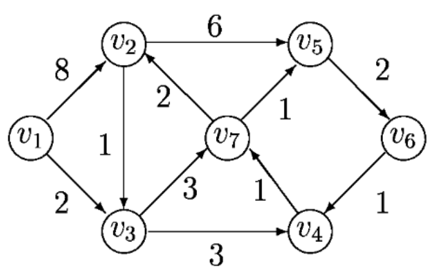
3. На предприятии имеется 6 станков, и необходимо изготовить 8 деталей. Для изготовления каждой детали требуется использование нескольких станков. Каждая деталь изготавливается в течение 1 часа, и при её изготовлении все требуемые станки заняты постоянно. Изготовление каждой детали занимает 1 час. Как нужно распределит работу, чтобы выполнить заказ за минимальное время? Какое это время?

Станок	Деталь							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	+		+				+	+
2		+		+				
3			+			+	+	
4	+	+		+	+			
5			+		+			+
6					+	+		+

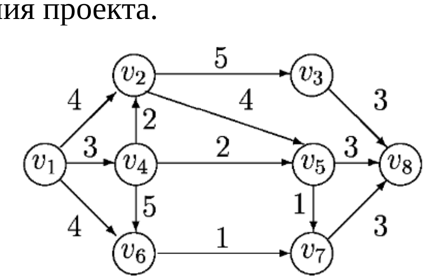
Примеры задач из подраздела «Алгоритмы на ориентированных графы»

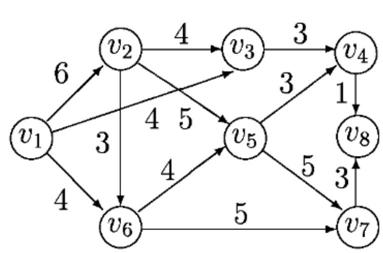
1. Найти расстояние от вершины v_1 графа до остальных вершин .



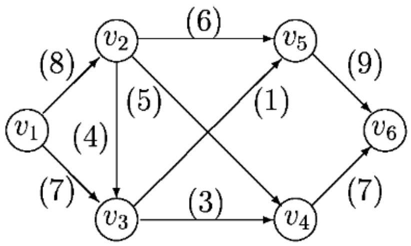


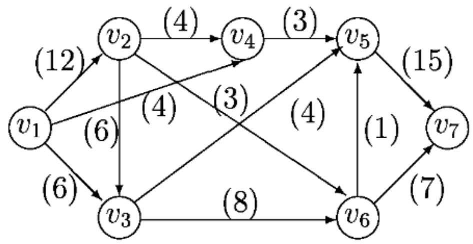
2. Приведённый на рисунке ориентированный граф определяет схему выполнения проекта. Каждая его дуга соответствует промежуточному результату проекта. Каждая его дуга соответствует подзадаче и помечается длительностью выполнения этой задачи. Задача, соответствующая дуге, выходящей из вершины v, может быть начата только если все задачи дуг, входящих в вершину, уже выполнены. Рассчитать минимальное время выполнения проекта.





3. Найти максимальный поток и минимальное сечение транспортной сети.





Список литературы

1. Нефедов В. Н., Осипова В. А. Курс дискретной математики: Учеб. пособие. – М.: Изд-во МАИ, 1992, – 264 с.
2. Новиков Ф. А. Дискретная математика для программистов: Учебник для вузов. 3-е изд. – СПб: Питер, 2009. – 384 с.
3. Эвнин А. Ю. Задачник по дискретной математике. – 2-е изд. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2002.