

Программа по ОДУ 3 минисессия
2 курс (поток 2)

1. Системы линейных уравнений. Основные понятия и определения.
2. Метод исключения.
3. Свойства решений линейных систем с переменными коэффициентами. Фундаментальные системы решений. Определитель Вронского.
4. Общее решение нормальной системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Метод Эйлера
5. Общее решение для неоднородных линейных систем. Метод вариации постоянных.
6. Понижение порядка линейных уравнений и систем
7. Краевые задачи. Функция Грина.

Примеры задач

1. Доказать, что любое решение системы

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -2x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - 2x_2\end{aligned}$$

ограничено при $t \geq 0$ (указать явно оценку сверху) и стремится к нулю при $t \rightarrow +\infty$.

2. Построить общее решение системы $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$, где

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Выделить все решения, для которых справедливо условие $\lim_{t \rightarrow +\infty} \vec{x} = \vec{0}$.

3. Найти общее решение линейной системы

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y + t^{-2}, \\ \dot{y} &= x + t^{-1}.\end{aligned}$$

4. Матрица A системы линейных однородных уравнений третьего порядка с постоянными коэффициентами

$$\dot{x} = Ax$$

имеет собственные векторы $(2; 5; 7)$ и $(3; -2; 4)$ соответствующие собственному значению $\lambda = 2$ и собственный вектор $(1; 2; -4)$ соответствующий собственному значению $\lambda = 5$. Написать общее решение этой системы.

5. Написать частное решение с неопределенными коэффициентами системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y + 5t \cos t, \\ \dot{y} = 3x + 2y \end{cases}$$

(числовых значений коэффициентов не находить).

6. При каких значениях параметра a соотношения

$$y'' - y = 0; \quad y(a) = 1, \quad y'(1) = 1 - a$$

задают краевую задачу? Найти решение этой задачи, выбрав какое-либо подходящее значение параметра.

7. Функция $y = \sin x$ является решением краевой задачи ($a(x)$, $b(x)$ — заданные функции)

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0.$$

Будет ли функция $y = -\sin x$ решением той же краевой задачи? Почему?

8. Функция $y = \sin x$ является решением краевой задачи ($a(x)$, $b(x)$ — заданные функции)

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(\pi) = -1.$$

Найти решение краевой задачи

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(\pi) = 3.$$