Методы решения краевых задач

Теоретические вопросы

1. Свойства гармонических функций.
2. Интеграл Пуассона
3. Пусть $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Доказать, если $\Delta u \geq 0$ в Ω, тогда $u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u$.
4. Пусть $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Доказать, если $\Delta u \leq 0$ в Ω, тогда $u(x) \geq \min_{\partial\Omega} u$.
5. Доказать, если гармоническая в Ω функция $u(x)$ $(u(x) \in C\,\overline{\Omega})$, то максимальное и минимальное значения функция $u(x)$ достигается на $\partial\Omega$.
6. Доказать теорему единственности классического решения первой краевой задачи для уравнения Пуассона.
7. Пусть $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ Единственно ли классическое решение второй краевой задачи для уравнения Лапласа?
8. Теорема метода слабой аппроксимации.

ЗАДАЧИ

1. Пусть функция $u(x_1, x_2)$ – гармоническая. Выяснить является ли гармонической функция $v(x_1, x_2) = x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial u}{\partial x_2}$.
2. Пусть $\Omega = \{(x, y) \in R^2 | 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$, $u(x, y) \in C^2(\overline{\Omega})$,

$$\Delta u = 0, \ (x, y) \in \Omega,$$
$$u|_{y=0} = u|_{y=1} = 0, 0 \leq x \leq 1.$$

Может ли функция $f(x) = \int_0^1 u^2(x, y), dy$ иметь точку перегиба внутри интервала $(0,1)$?

3. Найти функцию гармоническую внутри единичного круга такую, что $u|_{r=1} = \cos^2 \varphi$.
4. Пусть Ω – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^1. В $\overline{\Omega}$ рассматривается краевая задача

$$\Delta \mathrm{u} - \mathrm{u} = 1, \qquad \mathrm{x} \in \Omega,$$
$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{n}}|_{\partial\Omega} = 0, \qquad \mathrm{x} \in \partial\Omega.$$

Дать определение классического решения задачи. Может ли классическое решение краевой задачи быть строго положительным в $\overline{\Omega}$.

5. При каких значениях k существует решение задачи

$$\Delta u = k(x^2 + y^2), \qquad (x, y) \in \Omega,$$
$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = x^2 y, \qquad (x, y) \in \partial\Omega,$$

где $\Omega = \{\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 < 16\}$.

6. В полосе $\Pi_{[0;T]} = \{(\mathrm{t}, \mathrm{x}) | 0 \leq \mathrm{t} \leq \mathrm{T}, \mathrm{x} \in \mathrm{E}_1\}$ рассматривается задача нахождения действительнозначных функций {u(t,x), b(t)}.

$$u_t = u_{xx} + b(t)u + f(t, x),$$
$$u(0, x) = u_0(x), \; \mathrm{x} \in \mathrm{E}_1$$
$$u(t, 0) = \beta(t), \qquad 0 \leq t \leq T.$$

1. Привести обратную задачу к прямой задаче для системы нагруженных уравнений. Сформулировать определение решения прямой задачи.
2. Сформулировать условия согласования на входные данные обратной задачи.
3. Доказать, что обратная задача имеет единственное решение

$$u(t, x) \in C^{1,4}\left(\Pi_{[0,T]}\right), b(t) \in C([0, T]).$$