ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ
Минисеместр 2

Содержание разделов и тем лекционного курса

Раздел II: Линейные метрические пространства и функционалы (20 ч. лекций)

2.1. Линейные пространства. Линейная зависимость, размерность, базис, подпространства. Примеры линейных пространств и их подпространств.

2.2. Нормированные пространства.

Норма, сравнение с метрикой, банаховы пространства, замкнутые подпространства. Примеры нормированных пространств ($\mathbb{R}^n$, $C([a, b])$). Эквивалентность норм.

2.3. Евклидовы пространства.

Скалярное произведение (над полем $\mathbb{R}$). Неравенство Коши–Буняковского. Угол между векторами.

2.4. Ортогональные векторы.

Примеры. Ортогонализация Грама-Шмидта. Теорема об ортонормированном базисе в сепарабельном евклидовом пространстве.

2.5. Коэффициенты Фурье. Неравенство Бесселя.

2.6. Полные и замкнутые ортогональные системы. Теорема Рисса-Фишера.

2.7. Теорема об изоморфизме.

Любое конечномерное евклидово изоморфно $\mathbb{R}^n$; любое сепарабельное гильбертово изоморфно l_2.

2.8. Подпространства, ортогональные дополнения.

Прямая сумма подпространств. Прямая сумма евклидовых пространств.

2.9. Свойство параллелограмма.

2.10. Комплексные евклидовы пространств. Скалярное произведение над полем $\mathbb{C}$.

2.11. Функционалы.

Определения и примеры. Выпуклые, однородные и линейные функционалы. Теорема Хана-Банаха.

2.12. Функционалы в нормированных пространствах.

Ограниченность, норма функционала, непрерывность.

2.13. Теорема Хана-Банаха в нормированных пространствах.

2.14*. Теорема Хана-Банаха в комплексных пространствах.

Практические (семинарские) занятия

Раздел II. Линейные метрические пространства и функционалы (16 ч. практических занятий)

2.1 Линейные пространства. Размерность.

2.2. Нормированные пространства. Норма. Эквивалентные нормы.

2.3. Евклидовы пространства. Свойства скалярного произведения

2.4. Тождество параллелограмма.

2.5. Алгоритм ортогонализации.

2.6. Полные евклидовы пространства. Теорема о прямой сумме

2.7. Функционалы. Линейность. Непрерывность. Ограниченность. Норма функционала.

2.8. Теорема Хана-Банаха.

Список литературы

[1] Колмогоров А.Н. *Элементы теории функций и функционального анализа*/А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Физматлит, 2004.

[2] Треногин В.А. *Функциональный анализ*/ В.А. Треногин. – М.: Наука, 1980.

[3] Треногин В.А. *Задачи и упражнения по функциональному анализу*/ В.А. Треногин, Б.М. Писаревский, Т.С. Соболева. – М.: Физматлит, 2002.

Функциональный анализ, типовой билет на минисессии 2.

1. Дайте определение нормы (2 балла).
2. Сформулируйте и докажите теорему Рисса-Фишера (2+3=5 баллов)
3. Пусть $X = C[0,1]$ – множество непрерывных функций на отрезке $[0,1]$.

а) докажите, что функция

$$d(x) = \max_{t\in[0,1]} |x(t)| + |x(0)|$$

является нормой на X (3 балла);

б) выясните, является ли нормированное пространство (X, d) полным и постройте его пополнение (5 баллов);

4) Пусть $X = \mathbb{R}^3$, а $X_0 = \{x \in \mathbb{R}^3 : 3x_1 + 2x_2 = 0\}$. На пространстве X_0 задан функционал f_0 такой, что

$$f_0(x) = 2x_1.$$

Докажите, что он является линейным, непрерывным и найдите его норму. Можно ли продолжить его на все пространство X с сохранением нормы ? Если да, то будет ли это продолжение единственным ? (5 баллов)