Структура билета

Билет состоит из 5 вопросов.

1. Дать определение или сформулировать теорему / утверждение
2. Сформулировать и доказать теорему / утверждение
3. Задание на тему «Исчисление предикатов»
4. Задание на тему «Рекурсивные функции»
5. Задание на тему «Машина Тьюринга»

Список определений

1. Исчисление предикатов
2. Машина Тьюринга
3. Арифметическая функция, вычислимая по Тьюрингу
4. Самоприменимая машина Тьюринга
5. Частичная арифметическая функция
6. Схемы композиции, примитивной рекурсии и минимизации
7. Примитивно рекурсивная функция
8. Частично рекурсивная функция
9. Общерекурсивная функция
10. Кусочная схема задания арифметической функции
11. Схема возвратной рекурсии.
12. Тезис Тьюринга
13. Тезис Черча

Список теорем/утверждений

1. Теоремы Гёделя о полноте (без доказательства).

2. Теорема Гёделя о неполноте (без доказательства).

3. Примитивная рекурсивность арифметических функций: $+(a, b) = a + b$; $*(a, b) = ab$;
$\wedge(a,b)=a^b$; $\quad \dot{-}(a,b)=\begin{cases} a-b, & \text{если } a>b, \\ 0, & \text{если } a\leqslant b; \end{cases}$ $\quad sg(x)=\begin{cases} 1, & \text{если } x=0, \\ 0 & \text{иначе}; \end{cases}$ $\quad \overline{sg}(x)=1-sg(x)$;

4. Частичная рекурсивность функций: $-(a, b) = a - b$; $\mathrm{div}(a, b) = [a/b]$; $\mathrm{mod}(a, b) = a - b\,[a/b]$.

5. Теорема о примитивной рекурсивности суммы.

6. Теорема о примитивной рекурсивности произведения.

7. Теорема о мажорировании неявной функции.

8. Теорема о примитивной рекурсивности кусочно заданной функции.

9. Примитивная рекурсивность функций: $\widetilde{\mathrm{div}}(x,y)=\begin{cases} 0, & \text{если } y=0, \\ [x/y], & \text{если } y>0; \end{cases}$
$\widetilde{\mathrm{mod}}(x,y)=\begin{cases} 0, & \text{если } y=0, \\ x \bmod y & \text{при } y>0; \end{cases}$ (здесь $x \bmod y$ – остаток от деления x на y);
$|(x,y)=\begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ делится на } y, \\ 0 & \text{в противном случае}; \end{cases}$ $\quad \chi_p(x)=\begin{cases} 1, & \text{если } x-\text{простое число}, \\ 0 & \text{в противном случае}; \end{cases}$ $n_p(x)$ – число простых чисел p в пределах $0 < p \le x$; $p(n)$ – n-е простое число; $\mathrm{ex}(n, y)$ – максимальный показатель e

степени $p(n)^e$, на которую делится число y.

10. Теорема о схеме возвратной рекурсии.

Примеры заданий на тему “Исчисление предикатов”

1) Является ли формулой исчисления предикатов следующее слово в алфавите исчисления предикатов? Ответ обосновать.

а) $\neg(\forall x(A(x)))\rightarrow\exists y(\neg A(y))$, где A — предикатный символ;

б) $\neg(\forall x\, A(x))\rightarrow\exists y(\neg A(x,y))$, где A — предикатный символ;

в) $\neg(\forall x(A(y)))\rightarrow\exists y(\neg A(y))$, где A — одноместный предикатный символ.

2) Перечислить свободные и связанные переменные в формуле. Для связанных переменных указать обасть действия квантора.

$\exists y(\forall x\, A(x,y,z)\rightarrow B(y))\rightarrow\exists t\, B(z,t)$

2) Доказать выводимость формулы исчисления предикатов:

а) $\forall x(\forall y(A(x,y)))\rightarrow\forall y(\forall x(A(x,y)))$;

б) $\exists x(\exists y(A(x,y)))\rightarrow\exists y(\exists x(A(x,y)))$;

в) $\exists x(\forall y(A(x,y)))\rightarrow\forall y(\exists x(A(x,y)))$;

г) $\neg(\forall x(\neg A(x))\rightarrow A(y))$.

Примеры заданий на тему “Рекурсивные функции”

1) Доказать примитивную рекурсивность функций:

а) $f(x,y)=\begin{cases}0 & при\, x+y>2;\\ 1 & в\, противном\, случае.\end{cases}$

б) $f(x,y)=\begin{cases}0 & при\,(x+1)\cdot y>5;\\ 1 & в\, противном\, случае.\end{cases}$

в) $f(x,y)=\begin{cases}0 & при\, x>2\, и\, y>3;\\ 1 & в\, противном\, случае.\end{cases}$

г) $f(x) = x!$

д) $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(n + 2) = f(n + 1) + f([(n + 2)/2])$;

е) $f(x, y) = \min(x, y)$;

ж) $f(x, y) = \max(x, y)$;

з) $f(x, y) = | x - y |$;

и) $\varphi(x)$ — количество натуральных чисел, меньших x, взаимно простых с x.

2) Доказать частичную рекурсивность функций:

а) Нигде не определённая функция $w(x_1,..., x_n)$;

б) $f(x) = x - 5$;

в) $f(x) = [2 / x]$;

г) $f(x)$, не определённая при $x > 5$, и равная x для $x \le 5$;

д) $f(x) = \sqrt[x]{-1}$.

Примеры задач по теме "Машина Тьюринга"

1. Построить протокол работы машины Тьюринга

(

Внешний алфавит: {*, 0, 1};

внутренний алфавит: $\{q_0, q_1, \ldots, q_5\}$;

стартовое состояние: q_1;

конечное состояние: q_0;

программа:

$q_1 1 \rightarrow q_1 1L$

$q_1 0 \rightarrow q_2 1L$

$q_2 1 \rightarrow q_2 1L$

$q_2 * \rightarrow q_3 {*}R$

$q_3 1 \rightarrow q_4 {*}R$

$q_4 1 \rightarrow q_5 {*}R$

$q_5 1 \rightarrow q_5 1R$

$q_5 * \rightarrow q_0 {*}L$

(для всех остальных состояний q_i и символов j на ленте: $q_i j \rightarrow q_i j$).

)

на ленте: ...***110111***... .

Какую арифметическую функцию она корректно вычисляет?

2. Пусть на ленте записана конфигурация: $\ldots{*}{*}{*}\underbrace{111\ldots1}_{n_1\,единиц}0\underbrace{111\ldots1}_{n_2\,единиц}0\ldots0\underbrace{111\ldots1}_{n_s\,единиц}{*}{*}{*}\ldots$.

Написать машину Тьюринга, стартующую в состоянии q1 с крайней левой единицы, и

а) Заменяющую все 1 на 0 и останавливающуюся на крайнем правом нуле

б) Заменяющую все 0 на 1 и останавливающуюся на крайней правой единице

в) Оставляющей на ленте только левые n_1 единиц, стирающей (заменяющей символом *) все остальные 0 и 1, и останавливающейся на крайней правой 1.

г) Полностью стирающую все символы (заменяющую их на символ *) и останавливающуюся на любой *.

3. Построить машину Тьюринга, корректно вычисляющую функции:

а) $f(x) = x + 1$;

б) $f(x) = x + 3$;

в) $f(x) = x - 3$, если $x > 2$, или 0, если $x < 3$;

г) $f(x, y) = x + y$.