

## Примеры задач

1. Дано уравнение  $\dot{x} = 2\sqrt{|x|}$ . Построить два различных *продолжения* его решения  $x(t)$  заданного формулой

$$x(t) = \begin{cases} -(t+6)^2, & -8 < t < -6; \\ 0, & -6 \leq t \leq 4; \\ (t-4)^2, & 4 < t < 7. \end{cases}$$

2. Найти продолжение решения  $y_0 = x^3$ ,  $x \in (2; 3)$  уравнения  $xy' = 3y$  отличное от него самого. Ответ обосновать.
3. Построить *непродолжаемое* решение задачи Коши

$$\dot{x} = -2x/t, \quad x(1) = 1.$$

Построение обосновать.

4. Уравнение  $(x-1)y' = 5y$  имеет решение  $y_0 = |x-1|^5$ ,  $x \in (-2; 5)$ . Какие из следующих решений будут продолжениями  $y_0$ ?

- $y_1 = (x-1)^5$ ,  $x \in (-7; 7)$ .
- $y_2 = |x-1|^5$ ,  $x \in (-3; 6)$ .
- $y_3 = |x-1|^5$ ,  $x \in (-3; 4)$ .

Ответ обосновать в каждом из трех случаев.

5. Привести пример линейного однородного ДУ 3-го порядка с постоянными коэффициентами. Записать его характеристическое уравнение.
6. Найти все значения параметра  $k$ , при которых уравнение

$$y'' + (k-4)(xy'' - y^k) = 0$$

будет линейным. Ответ обосновать.

7. Найти общее решение уравнения  $y^{(n)} = 0$ .
8. Найти общее вещественное решение уравнения  $y^{(4)} - y = 0$ .
9. Построить общее (комплексное) решение линейного уравнения с постоянными комплексными коэффициентами

$$y''' - iy'' = 0,$$

Ответ обосновать.

10. В каком виде следует искать частное решение уравнения  $y^{(5)} - y = 5t^2 \exp t$ ?
11. Найти общее *вещественное* решение уравнения

$$y'' + 4y' + 20y = 100x.$$

12. Найти все значения  $a$ , для которых все решения уравнения

$$y'' - ay' + y = 0$$

стремятся к нулю при  $t \rightarrow -\infty$ . *Указание:* воспользоваться теоремой Виета.

13. Записать фундаментальную систему решений (ФСР) для уравнения

$$y'' - 5y' + 6y = 0.$$

Вычислить определитель Вронского решений из ФСР.

14. Функции  $y = y_1(x)$  и  $y = y_2(x)$  являются решениями уравнения

$$y'' + y' + xy = 0.$$

Известно значение определителя Вронского этих решений в нуле:  $W(y_1, y_2)|_{x=0} = 3$ . Найти  $W(y_1, y_2)|_{x=2}$ .

15. Привести пример промежутка, на котором функции  $f_1(x) = |x - 5|$ ,  $f_2(x) = x$ ,  $f_3(x) = 5$  будут являться: а) линейно независимыми; б) линейно зависимыми.

16. Функция  $y = x^2 e^{2x}$  является решением линейного однородного уравнения третьего порядка с постоянными коэффициентами. Выписать общее решение этого уравнения. Ответ обосновать.

17. Функция  $y = 3e^x + 5e^{4x}$  является решением линейного однородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Найти это уравнение. Ответ обосновать.

18. Известно, что функция  $y(x) = 4 + 3e^{2x} \cos 3x$  является решением линейного однородного уравнения  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами. Найти минимально возможное значение  $n$ . Выписать соответствующее уравнение наименьшего порядка. Ответ обосновать.

19. Найти хотя бы одно решение  $y_0(x) \neq 0$  уравнения  $y'' - 8y' + 7y = 0$  такое, что функции  $y_0(x)$ ,  $y_1(x) = e^x - 3e^{3x}$ ,  $y_2(x) = e^{3x} + e^{7x}$  будут линейно зависимыми. Ответ обосновать.

20. Известно, что общее решение некоторого линейного уравнения задано формулой

$$y = C_1 e^{(2+3i)x} + C_2 e^{(2-3i)x}.$$

Выделить вещественные решения этого уравнения. Ответ обосновать.

21. Понизить порядок линейного уравнения

$$y''' + 2y'' + 4xy' - 4y = 0,$$

зная частное решение  $y_1(x) = x$ . Ответ обосновать.