Программа по ОДУ 2 поток.

2 семестр(1 минисессия)

1. Определения уравнений и систем ДУ. Порядок уравнения, порядок системы. Определение решения, общего решения.
2. Метод изоклин и метод ломаных Эйлера.
3. Задача Коши. Теорема Коши-Пикара о существовании глобального решения. Контрпримеры несуществования и неединственности решения, несуществования глобального решения.
4. Локальная теорема Коши-Пикара.
5. Дифференциальные уравнения первого порядка. Особые решения дифференциальных уравнений.
6. Уравнения с разделяющимися переменными.
7. Однородные уравнения.
8. Линейные уравнения и уравнения к ним сводящиеся.
9. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель.
10. Теорема о продолжении решения задачи Коши.

1. Найти все значения параметров a и b, при которых функция $y = ax + b$ будет являться частным решением уравнения

$$y(y')^2 + (x+1)y' + y^2 = 9x^2 + 18x - 11.$$

Ответ обосновать.

2. Найти все значения параметра k, при которых уравнение

$$(k-3)y''' + 5xy'' + 2y^k = 0$$

будет уравнением второго порядка. Ответ обосновать.

3. Существуют ли значения параметров α и β, при которых две системы

$$\begin{cases} 2\dot{x} + \dot{y} + 4y - 2t = 0, \\ (\dot{x} + y + \alpha t)^5 + (\dot{y} - x + 7)^\beta + 3t = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \dot{x} = 0, \\ \dot{y} = 0 \end{cases}$$

являются эквивалентными? Ответ обосновать.

4. Написать нормальную систему эквивалентную данной:

$$\begin{cases} 3\dot{x} - \dot{y} + 3y + 5x = 0, \\ \dot{x} + 2y - 4t = 0. \end{cases}$$

Ответ обосновать.

5. Записать нормальную систему эквивалентную уравнению $y'' = \sin(xy')$.

6. Построить задачу Коши эквивалентную интегральному уравнению

$$x(t) = 3 + \int_1^t s\cos(x(s))\,ds.$$

Эквивалентность обосновать.

7. Написать интегральное уравнение эквивалентное задаче Коши

$$y' = \sin(xy); \quad y(1) = 2.$$

8. Для задачи Коши

$$\dot{x} = x + 1,$$
$$x(0) = 0$$

построить последовательные приближения y_1, y_2, y_3, начиная с $y_0 \equiv 0$.

9. Для некоторого линейного уравнения первого порядка построили последовательные приближения к решению задачи Коши:

$$y_0(x) = 1, \quad y_1(x) = 1 - 2x + \frac{x^2}{2}, \quad y_2(x) = 1 - 2x + \frac{5x^2}{2} - \frac{x^3}{3}.$$

Найти это линейное уравнение.

10. Задача Коши:
$$(x-1)y' = 3y; \quad y(2) = 1$$
имеет два решения $y_1 = (x-1)^3$, $y_1 = |x-1|^3$. Объяснить, как это согласуется с теоремой единственности.

11. Для уравнения $y'' = \dfrac{(y')^2}{y} - 1$ известны два решения: $y_1 = 1 + \sin x$, $y_2 = \left(\dfrac{x}{\sqrt{2}} + 1\right)^2$ проходящие через точку $(0,1)$. Как это согласуется с теоремой единственности?

12. Уравнение первого порядка имеет решения: $y = (x-C)^3$, $y \equiv 0$. Доказать, что решение $y \equiv 0$ является особым.

13. Найти дискриминантную кривую для уравнения $y'^2 = y$.

14. Используя локальную терему Коши — Пикара, для задачи Коши
$$\dot{x} = x^4 + 3, \quad x(0) = 0$$
указать максимальный интервал существования решения.

15. Найти какой-либо интервал существования решения задачи Коши
$$\dot{x} = x + \frac{1}{2t-3}; \quad x(0) = 0.$$

16. Для задачи Коши
$$\dot{x} = tx^2 + 1 - t^2, \quad x(0) = 0$$
проверить выполнение условий:
   - глобальной теоремы Коши — Пикара;
   - локальной теоремы Коши — Пикара (в области $(-1,1) \times (-1,1)$).

Вариант 1

1. Найти все значения параметра k, при которых уравнение

$$(k-5)y''' + 3xy'' + 4y^k = 0$$

будет уравнением второго порядка.

2. Найти все значения параметров a и b, при которых функция $y = ax + b$ будет являться частным решением уравнения

$$y(y')^2 + (x-1)y' + y^2 = 9x^2 - 18x - 11.$$

3. Написать нормальную систему эквивалентную данной:

$$\begin{cases} \dot{x} + \dot{y} + 5y + 2x = 0, \\ \dot{x} - y + 2t = 0. \end{cases}$$

4. Написать интегральное уравнение эквивалентное задаче Коши

$$y' = \sin(x^2 + y); \quad y(1) = 2.$$

5. Проверить выполнение условий локальной теоремы Коши — Пикара в области $[-1;1] \times [-1;1]$ для задачи Коши

$$\dot{x} = x^3 + \sqrt{3t+2}; \quad x(0) = 0.$$

6. Дано уравнение $\dot{x} = f(t,x)$. Про функцию f известно, что:
а) $(\forall\ t_1,\, t_2,\, x)\ |f(t_1,x) - f(t_2,x)| \le 3|t_1 - t_2|$;
б) $(\forall\ t,\, x_1,\, x_2)\ |f(t,x_1) - f(t,x_2)| \le 4t^2|x_1 - x_2|$;
в) $(\forall\ t,\, x_1,\, x_2)\ |f(t,x_1) - f(t,x_2)| \le 5(x_1 + x_2)^4|x_1 - x_2|$.

Следует ли из данного неравенства обобщенное условие Липшица? Ответ обосновать в каждом из трех случаев.