# ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Распопов В.Е.

## ВОПРОСЫ К ТРЕТЬЕЙ МНИСЕССИИ

1. Интерполяционные квадратурные формулы. Квадратурные формулы прямоугольников, трапеций, Симпсона. Погрешность. Правило Рунге оценки погрешности.
2. Квадратурные формулы наивысшей алгебраической степени точности. Построение. Погрешность. Устойчивость. Интегрирование функций специального вида.
3. Формулы численного дифференцирования. Оценка погрешности. Некорректность. Регуляризация. Понятие сеточной функции. Простейшие операторы конечных разностей.
4. Методы решения задачи Коши. Решение с помощью формулы Тейлора. Основные понятия и определения. Аппроксимация. Устойчивость. Сходимость. Явный метод Эйлера. Его модификации.
5. Одношаговые методы. Методы Рунге-Кутты. Устойчивость. Сходимость. Методы с контролем погрешности на шаге. Многошаговые методы. Методы Адамса. Сходимость. Итерационный метод прогноза-коррекции. Метод неопределенных коэффициентов построения схем повышенной точности.
6. Исследование на устойчивость. Нуль-устойчивость. A- и A($\alpha$)-устойчивость. Явление жесткости.
7. Краевые задачи. Методы сведения краевой задачи к задаче Коши. Методы стрельбы, дифференциальной прогонки. Метод конечных разностей.

# ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ

1. Построить разностное уравнение, аппроксимирующее $y'(1) = \alpha$ с погрешностью $O(h^2)$.

*Указание:* Использовать $y(1)$, $y(1-h)$, $y(1-2h)$.

2. Получить разностный оператор, аппроксимирующий дифференциальный оператор $L(y) = y''(x) + y(x)$ в точке $x_n$ с погрешностью $O(h^4)$.

*Указание:* Использовать $y(x_n \pm 2h)$, $y(x_n \pm h)$, $y(x_n)$

3. Получить разностную схему, аппроксимирующую исходную задачу

$$u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = f(x),\ a < x < b,$$

$$c_1 u(a) + c_2 u'(a) = c,$$

$$d_1 u(b) + d_2 u'(b) = d,$$

где $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ – заданные функции; $c_1$, $c_2$, $c_3$, $d_1$, $d_2$, $d_3$ –заданные константы с погрешностью $O(h^2)$ на сетке $x_n=(n+1/2)h$, $n=-1,0,\dots,N$; $h=1/N$.

4. При каких $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ разностная схема

$$\frac{-y_{n+1} + 2y_n - y_{n-1}}{h^2} + (\alpha y_{n+1} + \beta y_n + \gamma y_{n-1}) = f(x_n) + \frac{h^2}{12} f''(x_n),$$

$y_0=0$, $y_n=0$, $n=1,2,\dots,N-1$; $x_n=nh$, $h=1/N$

аппроксимирует задачу

$$-y''(x) + y(x) = f(x),$$

$0 \le x \le 1$, $y(0)=0$, $y(1)=0$ с четвертым порядком?

5. Для уравнения $y' = f(x, y)$ построить разностную схему вида $\frac{by_{n+1} + ay_n - y_{n-1}}{2h} = cf_{n-1} + \frac{2}{3} f_n + df_{n+1}$ наиболее высокого порядка аппроксимации. Привести все выкладки.

6. Для дифференциальной задачи $u' + \frac{4x^2}{u} = 1 + 4x$, $u(0)=0$ с точным решением $u=x$ рассматривается схема $\frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} + \frac{4(kh)^2}{y_k} = 1 + 4kh$, $y_0 = 0$, $y_1 = 0$. Каков порядок аппроксимации данной схемы. Можно ли его улучшить? Если да, то как?

7. Для уравнения $y' = f(x, y)$ построить разностную схему вида $\frac{y_{n+1} + ay_n + by_{n-1}}{2h} = \frac{1}{6} f_{n-1} + df_n + cf_{n+1}$ наиболее высокого порядка аппроксимации. Привести все выкладки.

8. Для задачи $y''(x) - \frac{7x}{x^3+1} y'(x) + \frac{e^x}{3} y = \cos(2x) + 2,\ 0 \le x \le 10,$
$y(10) + 2y'(10) = 7,\ y(0)=3$ построить разностную схему второго порядка аппроксимации. Предложить метод решения разностной задачи.

9. Для решения краевой задачи
$$\frac{d^2u}{dx^2} + a(x)\frac{du}{dx} + b(x)u = \cos x,\ 0 \le x \le 1,\ u(0) = 1,\ u'(0) = 3$$
Предложена разностная схема
$$\frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2} + a(x_n)\frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h} + b(x_n)u_n = \cos x_n,\ n = 1,2,\ldots,N-1,$$
$$u_0 = 1,\ \frac{u_1 - u_0}{h} = 2 - \frac{h}{2}[3a(0) + b(0) - K]$$

Найти значение коэффициента К, при котором схема аппроксимирует краевую задачу со вторым порядком аппроксимации.

10. Построить разностное уравнение, аппроксимирующее $y'(0) = \alpha$ с погрешностью $O(h^2)$.

*Указание:* Использовать значения *y(x)* в точках $x_k=(k+1/2)h$, $k=-1,0$.

11. Является ли метод $\frac{y_{n+1} + y_n - 2y_{n-1}}{3\tau} = \frac{5f_n + f_{n-1}}{6}$ нуль-устойчивым?