1. Неприводимые многочлены.

Основные понятия и определения: *неприводимый многочлен; группа, подгруппа, нормальная подгруппа, факторгруппа; кольцо, идеал, главный идеал, факторкольцо; поле разложением многочлена.*

Основные теоремы:

1. Теорема о разложении произвольного мночлена в произведение неприводимых многочленов.
2. Описание неприводимых многочленов над полями комплексных и действительных чисел.
3. Лемма Гаусса.
4. Признак Эйзенштейна неприводимости многочлена над $\mathbb{Z}$.
5. Конструкции факторгруппы и факторкольца.
6. Теорема существования корня.

2. Линейные пространства.

Основные понятия и определения: *аксиомы линейного пространства, линейно зависимая (независимая) система векторов, система образующих пространства, база пространства, размерность пространства; система координат, координаты вектора, матрица перехода от одной системы координат к другой; подпространство, пересечение и сумма подпространств, прямая сумма подпространств; ранг матрицы, фундаментальная система решений.*

Основные теоремы:

1. Критерий линейной зависимости системы ненулевых векторов.
2. Теорема о размерности конечномерного линейного пространства.
3. Теорема о связи координат вектора в старой и новой системах координат.
4. Теорема о невырожденности матрицы перехода.
5. Теорема о размерности суммы и пересечения двух подпространств.
6. Необходимое и достаточное условие, при котором сумма двух пространств является прямой.
7. Теорема о ранге матрицы.
8. Теорема Кронекера-Капелли и ее следствие для однородных систем.

Задача 1. Разложить на неприводимые множители многочлены x^6+27, x^4-ax^2+1, $(|a|<2)$ над полем а) $\mathbb{C}$, б) $\mathbb{R}$.

Задача 2. Найти рациональные корни многочленов а) $x^3-6x^2+15x-14$, б) $x^5-7x^3-12x^2+6x+36$.

Задача 3. Доказать, неприводимость над полем $\mathbb{Q}$ многочленов а) $x^4-8x^3+12x^2-6x+2$, б) x^4-x^3+2x+1.

Задача 4. Векторы $a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1}$ образуют базу линейного пространства V над полем вещественных чисел. Образует ли базу V следующая система векторов: $a_1, a_2+a_3, a_2-a_3, \ldots, a_{2n}+a_{2n+1}, a_{2n}-a_{2n+1}$?

Задача 5. Найти базу и размерность суммы и пересечения подпространств U и W, порождённых векторами $a_1=(1,2,1,-2)$, $a_2=(2,3,1,0)$, $a_3=(1,2,2,-3)$ и $b_1=(1,1,1,1)$, $b_2=(1,0,1,-1)$, $b_3=(1,3,0,-4)$ соответственно.

Задача 6. При каком значении λ матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

имеет наименьший ранг?

Задача 7. Для каких значений параметра λ размерность пространства решений системы

$$\begin{cases} x + (2\lambda - 1)y - \lambda z = 0, \\ (2-\lambda)x + y - \lambda z = 0, \\ x + \lambda y - \lambda z = 0 \end{cases}$$

будет максимальной?